ЕЛЕКТРОННЕ МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО І ТЕХНОЛОГІЇ

531.992: 621.302

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕВРАЩЕНИЙ В МЕТАЛЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЧАСТОТНЫХ МОМЕНТОВ

Псарев В.И.
Запорожский национальный университет

Введение

Многочисленные превращения в твердых металлах и сплавах носят массовый характер и вызывают существенные изменения их структурного состояния и свойств. К ним относятся: процессы рекристаллизации и графитизации, эвтектоидные и перитектоидные превращения, распад пересыщенных твердых растворов и многие другие. Их анализ обычно производится с помощью обобщенных эмпирически подобранных формул или же полученных на основе определенных физических представлений. Задача состоит в выборе подходящей аппроксимирующей функции, отображающей экспериментальную зависимость, задаваемую в виде формулы, таблицы или графика.

Требование наилучшего приближения подгоночной функции к экспериментальной зависимости обычно связывается с потребностью выявления сущности познаваемого процесса и его природного содержания. Между ними всегда существует изначальное отношение "сходства в различиях и различия в сходстве" (принцип Аквината). Степень осознания природной сущности изучаемого явления находит свое отображение в осмысленном теоретическом подходе. Его последующее объективирование может быть достигнуто только путем использования языка математики, что обеспечивает доступность восприятия теоретических предпосылок путем конкретизации, приближающейся к истине представлений.

Аппроксимирующая функция в той или иной мере должна отображать истинную сущность природной зависимости. Но прежде всего необходимо иметь достаточно полные сведения о свойствах, возможностях и сущности самой подгоночной функции. Это более жесткое и дополняющее условие ее выбора по сравнению с математической интерполяцией.

Ниже приведены результаты показательных испытаний аппроксимирующей функции с использованием метода частотных моментов.

Кинетические закономерности

Многочисленные данные превращений в твердых металлах и сплавах анализируются с помощью формулы Аврами:

$$S = 1 - \exp(Bt^k), \qquad (1)$$

где S – объемная доля части вещества, испытавшего превращение за время t при температуре T; B и k - постоянные. Температурная зависимость $B = B_0 \exp(-Q/RT)$, где Q – энергия активации процесса; R – универсальная газовая постоянная.

Формула (1) используется во многих случаях: при анализе перлитного превращения в нелегированной стали [1], рекристаллизации алюминия [2; 3] и меди [4] и в других. Выделение тепла при рекристаллизации со временем превращения, как было показано [2], можно выразить зависимостью

$$f(x) = \left[1 - \exp(-x^k)\right](ax^3 + b)^{-1}, \qquad (2)$$

где $x = \dfrac{t}{t_0}$ –безразмерное время; $t_0 = B^{-1/k}$; a, b –постоянные.

Применительно к рекристаллизации деформированного алюминия [3] было получено [2]: k = 2; t_0=6 ч; a = 15,52; b=1,542. Формулу (2) можно применять также и в случае опосредованного анализа графитизации стали через изменение количества растворяющейся в ее объеме цементитной фазы [5]. Следовательно, она может быть выбрана в качестве аппроксимирующей к данным экспериментального исследования многих превращений в твердом состоянии вещества. Произведем ее испытание.

Сформируем на основе функции (2) выражение для моментов в таком виде:

$$I(x) = \int_0^{\infty} (1+x)^n f(x)dx\,. \tag{3}$$

Замена $1 + x = \dfrac{y+d}{d-y}$ позволяет перейти к зависимости от переменной y, задаваемой на конечном интервале (0, d], такого вида

$$M'_{nm} = 2d(y+d)^{-n}(d-y)^{m+1}\left\{1 - \exp\left[-4\left(\frac{y}{d-y}\right)^2\right]\right\}\left[8ay^3 + b(d-y)^3\right]^{-1}. \tag{4}$$

С помощью преобразований, аналогичных проведенным в работах [6-8], получим соотношение между частотными моментами

$$nM_2 + (m+2)M_1 = 8dM_3 - 3M_4, \tag{5}$$

где n и m – целые или дробные положительные числа; в терминах моментов:

$$M_1 = M_{nm} = \int_0^d M'_{nm}dy;\, M_2 = M_{n-1,m+1} = \int_0^d M'_{nm}(d-y)(d+y)^{-1}dy;$$

$$M_3 = M_{n,m-2+\gamma_1} = \int_0^d M'_{nm}(d-y)^{-2}\gamma_1(y)dy;\, M_4 = M_{n,m+\gamma_2} = \int_0^d M'_{nm}\gamma_2(y)dy;$$

$$\gamma_1(y) = y\left\{\exp\left[4\left(\frac{y}{d-y}\right)^2\right] - 1\right\}^{-1};\, \gamma_2(y) = \left[8a\left(\frac{y}{d-y}\right)^2 - b\right]\left[8a\left(\frac{y}{d-y}\right)^2 + b\right]^{-1}.$$

В таблице 1 приведены численные значения моментов соотношения (5). При изменении величины d и постоянных n и m значение каждого из моментов можно рассчитать с помощью формулы (см. [7; 8]):

$$M_{ij}(d) = M_{ij}(1)\,d^{i+j}, \tag{6}$$

где i=n, n+1, а $j = m, m+1, m\text{-}2+\gamma_1, m+\gamma_2$. Заметим, величина $\gamma_1(y)$ имеет единичную размерность, а $\gamma_2(y)$ – нулевую (безразмерная величина). При задании численных значений n и m можно записать $M_{nm}(d) = M_{nm}(1)d^{-n+m}$ (в выражении (4) перед показателем степени n стоит знак минус). Следовательно, если n=m=0, то соответствующий момент $M_1(d) = 6,9073 \cdot 10^{-2} = \text{const}$; при n=m=5 момент $M_1(d) = 0,6241 \cdot 10^{-2} = \text{const}$. По этой же причине при n=m сохраняют постоянное значение с изменением d и другие моменты – $M_{n-1,m+1}$ и $M_{n,m+\gamma_2}$. При том же условии моменты $M_3(d) = M_3(1)d^{-n+m-2+\gamma_1} = 5,3422 \cdot 10^{-2} \cdot d^{-1}$.

Таблица 1

Данные расчетов численных значений моментов в соотношении (5) при условии: $a = 15,52$ и $b = 1,542$

d	n	m	$M_1 \cdot 10^2$	$M_2 \cdot 10^2$	$M_3 \cdot 10^2$	$M_4 \cdot 10^2$	$l_n \cdot 10^2$	$r_m \cdot 10^2$
1	0	0	6,9073	3,7344	5,3422	9,6398	13,810	13,818
2	0	0	6,9073	3,7344	2,6711	9,6398	13,811	13,819
3	0	0	6,9073	3,7344	1,7806	9,6398	13,810	13,818
1	5	5	0,6241	0,4402	1,0668	0,6561	6,5691	6,5651
2	5	5	0,6241	0,4401	0,5334	0,6560	6,5690	6,5651
3	5	5	0,6241	0,4401	0,3556	0,6562	6,5690	6,5653
1	1	0	5,3209	2,9706	4,4941	7,4464	13,610	13,610
2	1	0	2,6604	1,4853	1,1235	3,7232	6,8062	8,8071
3	1	0	1,7736	0,9902	0,4993	2,4821	4,5375	4,5361
1	0	1	4,7381	2,7308	4,2976	6,7226	14,210	14,210
2	0	1	9,4761	5,4617	4,2975	13,445	28,430	28,428
3	0	1	14,210	8,1925	4,2976	20,170	42,541	42,539

Примечание. $l_n = nM_2 + (m+2)M_1$; $r_m = 8dM_3 - 3M_4$.

Обнаружение подобных моментов в экспериментальной зависимости составляет сущность подгоночного приближения функции (2). Выявим и другие ее свойства. Воспользуемся заменой $x = \dfrac{y}{d-y}$ и перейдем к переменной *y* в выражении $I(x) = \int_0^\infty x^n f(x)dx$. После преобразования получим соотношения между моментами в таком виде:

$$(m+1)M_2 - (n+1)M_1 = 2dM_4 - 3aM_3 + 3bM_5, \qquad (7)$$

где

$$M_1 = M_{nm} = \int_0^d M'_{nm}dy; M_2 = M_{n+1,m-1} = \int_0^d yM'_{nm}(d-y)^{-1}dy;$$

$$M_3 = M_{n+3,m-\gamma_2} = \int_0^d y^3 M'_{nm}[\gamma_2(y)]^{-1}dy; M_4 = M_{n+2,m-3+\gamma_1} = \int_0^d y^2 M'_{nm}[\gamma_1(y)](d-y)^{-3}dy;$$

$$M_5 = M_{n+1-\gamma_2,m-2} = \int_0^d yM'_{nm}(d-y)^{-2}[\gamma_2(y)]^{-1}dy;\ \gamma_1(y) = \left[\exp\left(\frac{y}{d-y}\right)^2 - 1\right]^{-1};$$

$$M'_{nm} = dy^n (d-y)^{m+1} \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{d-y} \right)^2 \right] \right\} \left[ay^3 + b(d-y)^2 \right]^{-1}; \gamma_2(y) = ay^3 + b(d-y)^2 .$$

Величина $\gamma_1(y)$ имеет нулевую размерность, а $\gamma_2(y)$ размерность три.

Таблица 2

Данные расчетов численных значений моментов в соотношении (7) при условии: $a = 15{,}52$ и $b = 1{,}542$

d	n	m	$M_1 \cdot 10^2$	$M_2 \cdot 10^2$	$M_3 \cdot 10^2$	$M_4 \cdot 10^2$	$M_5 \cdot 10^2$	$l_n \cdot 10^2$	$r_m \cdot 10^2$
1	0	0	6,8995	8,2484	3,2722	6,9667	5,7285	1,3489	1,3481
2	0	0	6,8995	8,2484	3,2722	3,4834	5,7285	1,3489	1,3481
3	0	0	6,8995	8,2484	3,2722	2,3222	5,7285	1,3485	1,3481
1	-2	2	0,3142	0,1086	5,7285	37,280	33,254	0,6400	0,6327
2	-2	2	0,3142	0,1086	5,7285	18,640	33,254	0,6400	0,6327
3	-2	2	0,3142,	0,1086	5,7285	12,427	33,254	0,6399	0,6360
1	2	5	0,0626	0,0424	0,0253	0,0752	0,0691	0,0665	0,0665
2	2	5	8,0099	5,4230	3,2425	4,8790	8,8400	8,5091	8,5083
3	2	5	136,86	92,660	55,40	55,580	151,12	145,39	142,37

Примечание. $l_n = (m+1)M_2 - (n+1)M_1$; $r_m = 2dM_4 - 3aM_3 + 3bM_5$.

В таблице 2 приведены численные значения моментов соотношения (7). При n=m= 0, а также при n = -2 и m = 2 моменты M_i (i = 2, 3, 5) с изменением d сохраняют постоянные значения. В других случаях, согласно зависимости (6), при n=2 и m=5 действенны формулы:

$$M_1(d) = 6{,}26 \cdot 10^{-4} d^7; M_2(d) = 4{,}24 \cdot 10^{-4} d^7; M_3(d) = 2{,}53 \cdot 10^{-5} d^7; M_4(d) = 7{,}62 \cdot 10^{-4} d^6;$$
$$M_5(d) = 6{,}91 \cdot 10^{-5} d^7; l_n(d) = r_n(d) = 6{,}65 \cdot 10^{-4} d^7.$$

Этими свойствами моментов должны обладать и экспериментальные зависимости.

Аналогичному испытанию могут быть подвергнуты и множители аппроксимирующей функции (2). Воспользуемся заменой $ax^3 + b = b(y+d)(d-y)^{-1}$, т. е. $x = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/3} \left(\frac{y}{d-y}\right)^{1/3}$ (при y=0 и x=0, при y=d значение $x = \infty$). В этом случае соотношение между моментами получим в таком виде

$$(m - 1/3)M_2 - (n + 1/3)M_1 = 2/3\, d \left(\frac{2b}{a}\right)^{2/3} M_3 - M_4 , \qquad (8)$$

где

$$M_1 = M_{nm} = \int_0^d M'_{nm} dy; M_2 = M_{n+1,m-1} = \int_0^d y M'_{nm} (d-y)^{-1} dy;$$

$$M_3 = M_{n+2/3, m-5/3+\gamma_1} = \int_0^d y^{2/3} M'_{nm} (d-y)^{-5/3} \gamma_1(y) dy; M_4 = M_{n+1,m-\gamma_2} = \int_0^d y M'_{nm} [\gamma_2(y)]^{-1} dy;$$

$$M'_{nm}=\frac{d}{3b}\left(\frac{2b}{a}\right)^{1/3}y^{n-1/3}(y+d)^{-1}(d-y)^{m-1/3}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{2b}{a}\right)^{2/3}\left(\frac{y}{d-y}\right)^{2/3}\right]\right\};$$

$$\gamma_1(y)=\left\{\exp\left[\left(\frac{2b}{a}\right)^{2/3}\left(\frac{y}{d-y}\right)^{2/3}\right]-1\right\}^{-1};\ \gamma_2(y)=d+y.$$

Величина $\gamma_1(y)$ -безразмерная, а $\gamma_2(y)$ имеет размерность единицу.

Таблица 3

Данные расчетов численных значений моментов в соотношении (8) при условии:
$a=15,52$ и $b=1,542$

d	n	m	$M_1\cdot10^3$	$M_2\cdot10^3$	$M_3\cdot10^3$	$M_4\cdot10^3$	$l_n\cdot10^3$	$r_m\cdot10^3$
1	1	3	2,2913	1,7789	10,041	0,5683	1,6887	1,7112
2	1	3	36,661	28,463	80,330	9,0984	27,019	27,379
3	1	3	185,60	144,09	271,11	46,035	136,78	138,61
1	2	7	0,1207	0,0542	0,4619	0,0254	0,0794	0,0794
2	2	7	61,805	27,733	118,25	13,007	40,653	40,679
3	2	7	2376,4	1066,8	3030,4	499,95	1562,8	1563,8
1	5	5	0,0184	0,0245	0,0993	0,0062	0,0168	0,0164
2	5	5	18,792	25,058	50,830	6,3217	16,716	16,757
3	5	5	1083,6	1445,9	1954,1	364,30	963,97	966,34

Примечание. $l_n=(m-1/3)M_2-(n+1/3)M_1;\quad r_n=2/3\,d\left(\frac{2b}{a}\right)^{2/3}M_3-M_4$

Приведенные в таблице 3 численные значения моментов соотношения (8) с изменением параметров d, n и m следуют закону (6). Например, при n=m=5 моменты M_1, M_2 и M_4 можно рассчитать, соответственно, с помощью числовых формул:

$$M_1(d)=1,835\cdot10^{-2}d^{10};M_2(d)=2,45\cdot10^{-2}d^{10};M_4(d)=6,17\cdot10^{-3}d^{10}.$$

Для момента $M_3(d)=9,928\cdot10^{-2}d^9$ значение показателя степени следует из суммы:

$$(n-2/3)+(m-5/3+\gamma_1)=5+2/3+5-5/3=9.$$

Аналогичные зависимости характерны для $l_n=1,6325\cdot10^{-2}\cdot d^{10}$ и $r_m=1,6365\cdot10^{-2}d^{10}$.

Таким образом, произведя приведенные выше расчеты для аппроксимирующей и экспериментальной зависимости, можно выявить элементы сходства и различия между ними. Это поможет, в частности, решению отдельных вопросов рекристаллизации металлов. Существует мнение, что при постоянном действии движущих сил рекристаллизации ее кинетика в процессе изотермического отжига, по-видимому, должна описываться формулами (1) и (2). В то же время отклонение (1) от хода временной зависимости действительно зафиксировано многими исследователями этого процесса. Применение предлагаемого метода может способствовать решению этого вопроса, в частности влияния на рекристаллизацию низкотемпературного процесса возврата (см. [3]).

Примерный расчет

В таблице 4 приведены данные числовой последовательности $f_0(x)$ в зависимости от x (взяты из [9, с. 584]). В качестве аппроксимирующей для нее выбрана функция $f(x) = ax^b \exp(-cx)$. Ее максимальная приближенность к $f_0(x)$ определяется численными значениями постоянных a, b и c. Вычислим их, решая задачу с использованием метода моментов.

Таблица 4

Данные приближения аппроксимирующих функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ к числовой последовательности $f_0(x)$

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
$f_0(x)$	1,78	3,18	3,19	2,54	1,77	1,14	0,69	0,40	0,23	0,13	0,07	0,04
$f_1(x)$	1,79	3,40	3,48	2,77	1,91	1,21	0,72	0,41	0,25	0,12	0,06	0,03
$f_2(x)$	1,76	3,11	3,13	2,50	1,76	1,14	0,70	0,41	0,24	0,13	0,07	0,04

Примечание. $f_1(x) = 601,2x^{2.158} \exp(-8,517x)$ $f_2(x) = 359x^{1,966} \exp(-7,912x)$.

Функция $f(x)$ обращается в нуль при $x = 0$ и $x = \infty$. Соотношение между моментами относительно $x = 0$ можно записать в таком виде:

$$(n + b + 1)M_n = cM_{n+1}, \tag{9}$$

где

$$M_n = \int_0^\infty x^n f(x)dx; M_{n+1} = \int_0^\infty x^{n+1} f(x)dx .$$

Следовательно, задавая значения n= 0 и n=1, получим $b = \dfrac{2M_1^2 - M_0M_2}{M_0M_2 - M_1^2}$ и $c = (b+2)\dfrac{M_1}{M_2}$. Подставив значения моментов числовой последовательности, можно определить. постоянные *b* и *c*, а затем и *a*. В конечном итоге получим: $a_1 = 601,2; b_1 = 2,158; c_1 = 8,517$. Значения подгоночной функции $f_1(x) = a_1x^{b_1} \exp(-c_1x)$ приведены в таблице 4. Но при расчетах не была учтена сходимость несобственных интегралов, через которые выражены моменты.

С целью уточнения расчета перейдем к новой переменной, сделав замену $x = y(d - y)^{-1}$.

В этом случае соотношение между моментами относительно *y=0* примет такой вид:

$$d^2(b + n + 1)M_n - d\left[b + c + 2(n + 2)\right]M_{n+1} + (n + 3)M_{n+2} = 0, \tag{10}$$

где $M_\chi = \int_0^d y^\chi f(y)dy, \chi = n, n+1, n+2.$

Задавая значения *d* и *n*, можно рассчитать моменты и с помощью (10) определить постоянные *b* и *c*, а затем и *a*. Соответствующая подгоночная функция $f_2(x) = a_2 x^{b2} \exp(-c_2 x)$, где $a_2 = 359; b_2 = 1{,}967; c_2 = 7{,}912$ (в справочнике [9] $a = 364; b_2 = 1{,}966; c_2 = 7{,}932$). Численные значения $f_2(x)$, приведенные в таблице 4, в большей мере приближены к значениям $f_0(x)$ по сравнению с $f_1(x)$.

Характерные свойства аппроксимирующей функции $f(x)$ можно получить, воспользовавшись соотношением между моментами

$$(b + n + 1)M_{nm} = (m - b - 2)M_{n+1,m-1} + cdM_{n+1,m-2}, \tag{11}$$

где

$$M_{nm} = \int_0^d M'_{nm} dy; M_{n+1,m-1} = \int_0^d yM'_{nm}(d-y)^{-1} dy; M_{n+1,m-2} = \int_0^d yM'_{nm}(d-y)^{-2} dy$$

$$M'_{nm} = ady^{n+b}(d-y)^{m-b-2} \exp\left[-c\left(\frac{y}{d-y}\right)\right].$$

Таблица 5

Данные расчетов численных значений моментов соотношения (11) при условии:

$a = 364;\ b = 1{,}966;\ c = 7{,}932;$

d	n	m	M_{nm}	$M_{n+1,m-1}$	$M_{n+1,m-2}$	l_n	r_m
1	0	0	15,174	5,676	8,513	44,947	45,013
2	0	0	15,170	5,673	4,256	.44,995	45,001
3	0	0	15,171	5,673	2.837	44,998	44,999
1	1	1	2,720	1,163	1,793	10,786	10,774
2	1	1	10,867	4,653	3,587	43,098	43,095
3	1	1	24,449	10,470	5,380	96,965	96,964
1	0	2	8,551	2,720	3,883	25,363	25,454
2	0	2	34,294	10,897	7,760	101,72	101,74
3	0	2	77,174	24,449	11,649	228,90	228,91
1	2	2	0,525	0,248	0,390	2,609	2,609
2	2	2	8,405	3,964	3,122	41,739	41,739
3	2	2	42,550	20,068	10,538	211,30	211,30

Примечание. $l_n = (b + n + 1)M_{nm}$; $r_m = (m - b - 2)M_{n+1,m-1} + cdM_{n+1,m-2}$.

В таблице 5 при разных значениях *d, n, m* приведены численные значения моментов соотношения (11). Каждый из них можно вычислить для разных значений d (с помощью формулы (6)). Например, при n=m=0 имеем: $M_{nm}(d) = M_{nm}(1)d^0 = 15{,}170 = \text{const}$; при *n*=*1* и *m*=*2*-$M_{nm}(d) = 1{,}9466 \cdot d^3$; при *n*= *m*=*2* $M_{n+1,m-2} = 0{,}3903 \cdot d^3$ и т. д. Эта особенность сохраняется независимо от степени приближения аппроксимирующей функции $f(x)$ к заданной числовой последовательности $f_0(x)$. Согласно подмеченному признаку $f(x)$ является для нее истинно аналитической функцией.

Заключение

Математическая методика подбора формул для установленной на опыте функциональной зависимости обычно сводится к следующему: сначала выбирается вид формулы с последующим определением ее параметров, для которых приближение к экспериментальной зависимости оказывается наилучшим. Это достигается путем сравнения их графиков с последующим применением метода выравнивания.

Полученную на основе определенных физических представлений аппроксимирующую функцию также необходимо подвергнуть визуальному и графическому сравнению с экспериментальной зависимостью, последующему определению параметров и с учетом их - выравниванию. Дополнительным элементом является испытание подгоночной функции на ее сходство и различие с опытной функциональной зависимостью. Для этой цели в настоящей работе и предложен метод частотных моментов.

На примере заданной функции (2) получены три принципиально отличных соотношений моментов. Каждое из них выполняется с достаточно высокой точностью, и они являются содержательными характеристиками функции (2). Наличие подобных признаков у сравниваемой экспериментальной зависимости убедительно свидетельствует об определенной степени сходства между сопоставляемыми функциями.

Применение предлагаемого метода позволяет получать достаточно содержательные результаты. Однако отдельные из них нуждаются в пояснении и даже расшифровке. Например, не вычисляя сложных интегралов, через которые выражены моменты, определение их численных значений можно свести к расчету с помощью степенной функции (6). При этом возникает необходимость во введении понятия размерности моментов.

Обнаруженные и действительно имеющие необычные свойства частотные моменты и их соотношения нуждаются в дополнительном анализе.

Литература

1. Ткаченко И.Ф. О кинетике начальной стадии перлитного превращения в нелегированной стали / И.Ф. Ткаченко, К.И. Ткаченко // Изв. вузов. Черная металлургия. – 2003. – № 4. – С. 43-45.

2. Псарев В.И. Кинетика рекристаллизации деформированных металлов. Компьютерный расчет / В.И. Псарев, Л.А. Пархоменко, А.Ф. Куликов // Збірник наукових праць IX Міжнародної науково-технічної конференції. – Запоріжжя. – ЗНТУ, – 2007. – С. 107-108.

3. Вандермеер Р.А. Влияние возврата на рекристаллизацию алюминия / Р.А. Вандермеер, П. Гордон // Возврат и рекристаллизация металлов. – М. : Металлургия, 1966. – С. 195-219.

4. Клербро Л.М. Изменение внутренней энергии при возврате и рекристаллизации / Л.М. Клербро, М.Е. Харгриве, М.Х. Лоретто // Возврат и рекристаллизация металлов. – М. : Металлургия, 1966. – С. 69-122.

5. Бунин К.П. Графитизация стали / К.П. Бунин, А.А. Баранов, Э.Н. Погребной. – Киев: Изд. АН УССР. Ин-т черной металлургии, 1961. – 83 с.

6. Псарев В.И. Проблема моментов распределений в статистической физике / В.И. Псарев // Изв. вузов. Физика. – 1997. – Т. 40. – № 4. – С. 92-97.

7. Псарев В. И. О статистическом отображении эволюции многоэлементных систем / В.И. Псарев // Складні системи і процеси. – 2007. – № 1. – С. 3 -9.

8. Псарев В.И. О соответствии модели физических представлений множеству выборочных значений / В.И. Псарев // Вісник Запорізького університету. – 2000. – № 2. - С. 165-169. Таблицы 1-4 на стр. 183-184.

9. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев.– М. : Гостехтеориздат, 1956. – 608 с.