ОБ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКЕ УПРОЩЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Никитин Д.А.

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М.Ф. Решетнёва, Красноярск, Россия
E-mail: nikitin.bit@gmail.com

Практически все современные математические пакеты, способные работать с символьными выражениями, предоставляют возможность упрощения таких выражений. Как известно, справляются они с этой задачей не всегда успешно, иногда даже предлагая в качестве результата более сложную функцию, или такую же, но записанную в менее читаемом виде. При этом для разных видов упрощаемых выражений разработаны разные методы, и в разных математических пакетах могут быть реализованы разные сочетания этих методов.

Практически во всех коммерческих системах компьютерной алгебры реализован алгоритм упрощения Рича (Risch's simplification algorithm), основанный на теореме Рича о структурном представлении функции одного переменного как линейных отношений между некоторыми базисными функциями, которыми могут быть логарифмы, экспоненциальные функции и алгебраические функции [1]. Теорема также дает алгоритм нахождения этих базисных функций [2]. Тем не менее, использование теоремы Рича затруднено, так как в ней требуется преобразование тригонометрических функций к комплексным экспонентам, а обратных тригонометрических функций к комплексным логарифмам. То есть даже для исходной действительной функции можно получить чисто комплексный результат, что затрудняет его дальнейшее использование. Это породило попытки разработки действительных аналогов теоремы Рича для различных видов функций (тангенсы, арктангенсы, синусы, косинусы); некоторые из них доказаны, некоторые нет [3]. Таким образом, алгоритм упрощения может варьироваться в зависимости от элементарных функций, присутствующих в исходном, упрощаемом, выражении.

В данной статье предлагается методика, которая при упрощении доставляет выражение с минимальным возможным количеством параметров, а значит, оно будет гарантированно не бóльшим, чем у исходного выражения. Кроме того, данная методика предлагает единый подход к упрощению различных видов выражений. Более того, даст ли положительный результат данная методика или нет, никак не зависит от вида исходного выражения, а зависит от вида выражения, до которого в действительности может быть упрощено исходное.

Методика состоит из следующих основных шагов:

Пусть имеется алгебраическая запись функции от одного переменного $f(x)$. Необходимо найти функцию $g(x)$, тождественную функции $f(x)$, но записанную в более простом виде, то есть содержащую в своей записи меньшее количество элементарных функций, чем исходная.

1) Сначала вычисляется последовательность значений этой функции с некоторым постоянным шагом k: $y_0 = f(0)$, $y_1 = f(k)$, $y_2 = f(2k)$, … О длине последовательности будет сказано ниже.
2) Затем полученная последовательность принимается за импульсную характеристику рекурсивного цифрового фильтра и осуществляется синтез этого фильтра согласно алгоритму, описанному в [4, 5].
3) Анализируя полученные коэффициенты фильтра, сначала определяется вид функции $g(x)$, а затем вычисляются все константы присутствующие в записи функции, вплоть до свободного члена.

Опишем подробнее второй шаг методики. Упомянутый алгоритм успешно выполняет синтез как раз в тех случаях, когда отсчёты импульсной характеристики описываются некоторой функцией. Пока доказана работоспособность алгоритма не для любой функции, а для следующего множества функций Ф:

- Полиномы: $g(x) = p_n(x) = \alpha_0 \cdot x^n + \alpha_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_0 \neq 0$;
- показательные функции: $g(x) = k \cdot a^{bx} + c$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, $k \neq 0$;
- синусоиды и косинусоиды: $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$, $a \neq 0$, $b \neq \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$, $d \neq 0$;
- произвольные периодические функции, при условии, что период функции кратен шагу, с которым брались значения $f(x)$.

Формулировки доказанных теорем можно найти в [6]. Там же говорится о минимальном необходимом для расчёта количестве отсчётов импульсной характеристики. В целом, оно линейно зависит от количества параметров функции, описывающей форму импульсной характеристики фильтра.

Кроме того выдвинута гипотеза (подтверждаемая множеством вычислительных экспериментов) о том, что алгоритм работоспособен для любой функции, являющейся линейной комбинацией любых функций из Ф.

Также найдены функции, не входящие во множество Ф, для которых указанный алгоритм доставляет ЦФ минимального возможного порядка, но строгое математическое доказательство этого не было проведено. А также ещё не найдены формулы для вычисления параметров этих функций по коэффициентам полученного фильтра. Вот эти функции:

- Арктангенсы: $g(x) = k\cdot\mathrm{arctg}(a\cdot x + b) + c$.
- Логарифмические функции: $g(x) = k\cdot\log(a\cdot x + b) + c$.
- Экспоненциально убывающие гармонические суммы:

$$g(x) = k \cdot e^{-ax} \cdot \left[\sum_{k=1}^{M} \sin(\omega_k \cdot x + \varphi_k) + \sum_{j=1}^{N} \cos(\omega_j \cdot x + \varphi_j) \right] + c,\ a > 0,\ \text{все } \omega_i \text{ – разные.}$$

- Экспоненциально-гармонические суммы, сходящиеся к периодическому процессу:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{N} e^{-\alpha_j x} (A_j \cos\beta_j x + B_j \sin\beta_j x) + \sum_{l=1}^{M} (C_l \cos\omega_l x + D_l \sin\omega_l x) + E$$

все $\alpha_j > 0$, все β_i – разные, все ω_i – разные

Алгоритм построен так, что он находит рекурсивный ЦФ минимального возможного порядка, имеющий именно такую импульсную характеристику. При этом такой фильтр – единственный. После того, как найден фильтр, по его коэффициентам можно определить вид функции, а затем вычислить все её параметры, вплоть до свободного члена. В связи с этим количество параметров отыскиваемой функции тесно связано с порядком соответствующего фильтра.

Таким образом, для того чтобы упрощать произвольные функции до указанных функций, методика должна обладать некоторой базой знаний правил для определения вида функции и вычисления её параметров по коэффициентам фильтра. Более подробно процесс определения вида функции и формулы вычисления её параметров по коэффициентам соответствующего цифрового рекурсивного фильтра можно найти в [7, 8]. Вид функции определяется по коэффициентам обратной связи, а параметры функции вычисляются с использованием только остальных коэффициентов фильтра, либо всех коэффициентов фильтра.

Для указанных функций количество параметров равно k или k+1, где k – порядок соответствующего фильтра. Благодаря тому, что синтезируется фильтр минимально возможного порядка, вероятность того, что найденная функция будет сложнее, чем исходная, практически отсутствует, так как методика построена так, что ищет самую простую функцию, проходящую через заданный набор точек (в отличие от распространённых способов отыскания интерполирующих функций). А точнее — функцию с наименьшим количеством параметров.

Например, для последовательности {1, 1, 1, 1, 1, 1, …} при помощи данной методики будет найдена функция y=1, а не синусоида, или многочлен степени, равной длине последовательности минус один. Аналогично, для последовательности {0, –1, 0, 3, 8, …} будет найдена парабола $y=x^2-1$, а не какая-либо функция с бóльшим числом параметров, которых на самом деле бесконечно много.

При этом надо учитывать тот факт, что методика может ошибиться в случае, если исходная функция (а значит и искомая) — периодическая, а шаг, с которым брали её значения — больше половины периода. Это следует из теоремы Котельникова. Если шаг недостаточно мал, или более того, кратен периоду исходной функции, то будет найдена неверная функция. Однако такой ошибки несложно избежать. Надо всего лишь после того, как найдена некоторая функция, протабулировать исходную функцию с меньшим шагом и ещё раз осуществить поиск. Если найдена другая функция, значит, на предыдущем шаге значения функции $f(x)$ были взяты со слишком большим шагом. Более того, если упрощение выполняется в полуавтоматическом режиме, когда пользователь может указывать некоторые параметры для функции упрощения, то ему часто уже заранее может быть известно о наличии периодичности и значении периода анализируемой функции, и он сможет его указать, чтобы ускорить поиск.

Разумеется, такая методика будет успешно упрощать выражения только до известных ей функций. Поэтому можно указать на необходимость расширения множества функций, входящих в базу знаний. Для решения задач упрощения алгебраических выражений и поиска функциональных зависимостей будет весьма полезно внесение в базу знаний не только линейных комбинаций уже известных функций, но и более сложных комбинаций, например произведений таких функций.

Пути развития методики:

1) Исследование возможности применения методики для упрощения до других функций, например рациональных. Возможно, решение для них будет найдено не для $M = N - 1$.
2) Доказательство вышеприведённой гипотезы о работоспособности алгоритма из [4, 5] для любой функции, являющейся линейной комбинацией любых функций из множества Ф.
3) Поиск решения для функций двух переменных.

Список литературы

1. M. Monagan, P. Lisonek, H. Bauck, Simplification of Algebraic Expressions. MITACS Research Report: http://www.cecm.sfu.ca/CAG/products.html, November 2000.

2. Risch R. Algebraic properties of elementary functions in analysis. American J. of Math, 4, pp. 743–759, 1975.

3. Monagan M.B. Algorithms for the Simplification of Algebraic Formulae. [Эл. ресурс]. http://www.cecm.sfu.ca/CAG/Projects/nsercOPG04.pdf.

4. Никитин Д.А., Ханов В.Х. Синтез рекурсивных цифровых фильтров по импульсной характеристике, определяемой элементарной математической функцией / Д.А. Никитин // Цифровая обработка сигналов. — Москва, 2008, №3. — С. 10-14.

5. Никитин Д.А. Расчёт рекурсивного цифрового фильтра по его импульсной характеристике / Д.А. Никитин // Сборник докладов XIII междунар. науч.-технич. конф. «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC-2007) / ООО НПФ «САКВОЕЕ» — Воронеж, 2007. — Т. 1, с. 335–341.

6. Никитин Д.А. Теоремы о существовании и порядках цифровых рекурсивных фильтров с импульсными характеристиками определённой формы // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (13-14 ноября 2009 г.). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2009. – Ч. 2. – С. 144-146.

7. Ханов В.Х. Алгоритм анализа числовых последовательностей / В.Х. Ханов, Д.А. Никитин // Вестник СибГАУ. — Красноярск, 2006. — № 6 (13). — С. 11-15.

8. Никитин Д.А. Сжатие временных рядов с использованием блочной интерполяции / Д.А. Никитин // Информационные технологии моделирования и управления. Науч.-технич. журнал. — Воронеж: Научная книга, 2007. — Вып. 1 (35). — С. 85–89.