такое что для любых $m, n > N$ $d_L(x_m(t), x_n(t)) < 1$.

Любая L сходящаяся последовательность $(x_n(t))$ точек метрического пространста $C[a,b]$ L фундаментальная .

Доказательство Пусть $\lim_{n\to\infty}(L)x_n(t) = x(t)$ поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует число N такое что $d_L(x_n(t), x(t)) < 1-\varepsilon$ для каждого $n \ge N$, отсюда

$d_L(x_m(t), x_n(t)) \le d_L(x_m(t), x(t)) \cdot d_L(x(t), x_n(t)) < (1-\varepsilon)(1-\varepsilon) = 1-2\varepsilon+\varepsilon^2 < 1$.

Для метрического пространства $C[a,b], a > 0, b > 0$, метрику можно определить по формуле $\rho(x(t), y(t)) = \left(\ln L\int_a^b |x(t)-y(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\ln e^{\int_a^b \frac{|x(t)-y(t)|^q}{t}dt}\right)^{\frac{1}{q}} == \left(\int_a^b \left|\frac{x(t)}{t^{\frac{1}{q}}} - \frac{y(t)}{t^{\frac{1}{q}}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$,

это метрика в метрическом пространсте $L_q[a,b], q > 1$ для функций $\frac{x(t)}{t^{\frac{1}{q}}}, \frac{y(t)}{t^{\frac{1}{q}}}$.

Рассмотрим функционал $f_P(x(t)) = P\int_a^b x(t)\,dt = e^{\int_a^b \ln x(t)dt}$, $f_P(x(t)):\ C[a,b]\to R$, тогда $f_P(x\cdot y) = f_P(x)\cdot f_P(y), f_P\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f_P(x)}{f_P(y)}$, $f_P(1) = 1, f_P(c) = c^{(b-a)}$.

Пусть $\max_{t\in[a,b]}|x_0(t)| = R$, тогда $\int_a^b \ln x_0(t)\,dt \le \int_a^b \ln R dt = (b-a)\ln R$, $e^{\int_a^b \ln x_0(t)dt} \le e^{(b-a)\ln R} = R^{(b-a)}$. Пусть $\max_{t\in[a,b]}|x(t)-x_0(t)| \le \delta,$ поэтому

$|f_P(x) - f(x_0)| = \left|e^{\int_a^b \ln x(t)dt} - e^{\int_a^b \ln x_0(t)dt}\right| = e^{\int_a^b \ln x_0(t)dt}\left|e^{\int_a^b(\ln x(t)-\ln x_0(t))dt} - 1\right| \le R^{(b-a)}\left|e^{\int_a^b \ln\frac{x(t)}{x_0(t)}dt} - 1\right|$, является ли этот функционал ограниченным , непрерывным ?

Рассмотрим выражение $\ln\left(P\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt\right)$ в пространстве $C[a,b]$, это выражение не определяет метрику , потому что неравенство треугольника не верно

$$\ln\left(P\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt\right)=\ln\left(e^{\int_a^b |\ln(x(t)-y(t))|\,dt}\right)=\int_a^b |\ln(x(t)-y(t))|\,dt\ .$$

Пусть $y=f(x)$, вариация функционала $\delta y=y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)$ Рассмотрим функционал $\Phi[y(x)]=\int_a^b G(x,y,y')\,dx$, приращение функционала это $\Delta\Phi[y]=\Phi[y+\delta y]-\Phi[y]$. Предположим что $\Delta\Phi[y]$ можно представить в виде $\Delta\Phi[y]=L[y,\delta y]+\gamma(y,\delta y)|\delta y|$, где $L(y,\delta y)$ линейный относительно δy функционал , $\lim_{\delta y\to 0}\gamma(y,\delta y)=0$, тогда выражение $L(y,\delta y)$ называется вариацией функционала $\Phi[y]$, обозначается $\delta\Phi(y)=L(y,\delta y)$.

Для функционала $\Phi[y(x)]=e^{\int_a^b y(x)dx}$, P приращение этого функционала $\Delta_P\Phi[y]=\dfrac{\Phi[y+\delta y]}{\Phi[y]}=\dfrac{e^{\int_a^b (y+\delta y)dx}}{e^{\int_a^b ydx}}=e^{\int_a^b \delta ydx}$, $\Delta_P\Phi[y]-1=\dfrac{\Phi[y+\delta y]}{\Phi[y]}-1=\dfrac{\Phi[y+\delta y]-\Phi[y]}{\Phi[y]}=\dfrac{\Delta\Phi[\delta y]}{\Phi[y]}$

предположим что $\ln\Delta_P\Phi[y]$ можно представить в виде $\ln\Delta_P\Phi[y]=L(y,\delta y)+\gamma(y,\delta y)|\delta y|$, где $L(y,\delta y)$ линейный относительно δy функционал , $\lim_{\delta y\to 0}\gamma(y,\delta y)=0$, тогда выражение $L(y,\delta y)$ назовем P вариацией функционала $\Phi[y(x)]$, обозначим $\delta_P\Phi[y(x)]=L(y,\delta y)$.

Пример $\Phi[y(x)]=e^{\int_a^b y^2dx}$ so $\Delta_P\Phi[y(x)]=\dfrac{e^{\int_a^b (y+\delta y)^2dx}}{e^{\int_a^b y^2dx}}=e^{\int_a^b \left(2y\delta y+(\delta y)^2\right)dx}=e^{\int_a^b 2y\delta ydx}\,e^{\int_a^b (\delta y)^2dx}$, $\ln\Delta_P\Phi[y(x)]=\int_a^b 2y\delta y dx+\int_a^b (\delta y)^2\,dx$, таким образом $\delta_P F(y)=\int_a^b 2y\delta y dx$, то есть вариация $\delta_P F(y)$ равна вариации δy функционала $\int_a^b y^2dx$.

Для функционала $F_P(y)=e^{\int_a^b \ln ydx}$ экстремум равен экстремуму функционала $F(y)=\int_a^b \ln ydx$.

Для функционала $F_L(y)=e^{\int_a^b \frac{y}{x}dx}$ экстремум равен экстремуму функционала $F(y)=\int_a^b \frac{y}{x}dx$,потому что максимум функции $y=f(x)$ совпадает с максимумом функции $y=e^{f(x)}$, поскольку $\left(e^{f(x)}\right)'=f'(x)e^{f(x)}=0, f'(x)=0$.

Пример . $\Phi\left[y(x)\right]=\int_1^2 yp'ydx=\int_1^2 ye^{\frac{y'}{y}}dx$ Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi\left[y(x)\right]=\int_a^b F(x,y,y')dx$, $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$,

$y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}+F_{xy}-F_y=0$, $F_y=e^{\frac{y'}{y}}\left(1-\frac{y'}{y}\right)$, $F_{y'}=e^{\frac{y'}{y}}$, $F_{y'y'}=\frac{1}{y}e^{\frac{y'}{y}}$, $F_{yy'}=-\frac{y'}{y^2}e^{\frac{y'}{y}}$, $F_{xy}=0$, после подстановки найдем уравнение $\frac{y''}{y}-\frac{(y')^2}{y^2}+\frac{y'}{y}-1=0$.

Пусть $y=e^{\phi(x)}$, после упрощения найдем уравнение $\phi''(x)-\phi'(x)-1=0$, отсюда решение уравнения $\phi(x)=c_1e^x-x+c_2$, откуда экстремальная функция для этого интегрального функционала $y=e^{c_1e^x-x+c_2}$. Постоянные интегрирования могут быть найденны для определенных начальных условий $y(1)=\alpha$, $y(2)=\beta$.

Пусть $p=F_{y'}=e^{\frac{y'}{y}}\Rightarrow y'=y\ln p$. Составим функцию Гамильтона для этого функционала $H(y,p)=-F+F_{y'}y'=e^{\frac{y'}{y}}(y'-y)_{y'=y\ln p}=yp(\ln p-1)$, тогда получим систему Гамильтона $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p}\\ \frac{dp}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y\ln p\\ \frac{dp}{dx}=p-p\ln p\end{cases}$. Решение этой системы $p(x)=e^{1-c_1e^{-x}}$, $y(x)=e^{c_1e^{-x}+x+c_2}$, то есть система Гамильтона эквивалентна уравнению Эйлера .

Найдем производную функции Гамильтона $H(y,p)$ вдоль этой системы $\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dx}=p(\ln p-1)\,y\ln p+\left(y\left(\ln p+p\frac{1}{p}\right)-y\right)(p-p\ln p)=0$, то есть функция Гамильтона $H(y,p)$ является первым интегралом данной системы .

Составим уравнение Гамильтона Якоби для данного функционала . Поскольку функция Гамильтона $H(y,p)=yp(\ln p-1)$, получим $\frac{\partial S}{\partial x}+y\frac{\partial S}{\partial y}\left(\ln\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)-1\right)=0$,

это уравнение можно решить численно .

Пример . $\Phi\left[y(x)\right]=\int_1^2 p''y dx=\int_1^2 e^{\frac{y''y-(y')^2}{y^2}}dx$. Пусть $y(x)=e^{\phi(x)}$, значит $y'=e^{\phi}\phi'$, $y''=e^{\phi}\left((\phi')^2+\phi''\right)$, $e^{\frac{y''y-(y')^2}{y^2}}=e^{\phi''}$.Напишем уравнение Эйлера для функционала

$\Phi\left[\phi(x)\right]=\int_a^b F(x,\phi,\phi',\phi'')dx$, $F_{\phi}-\frac{d}{dx}F_{\phi'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{\phi''}=0$. $F_{\phi}=0$, $F_{\phi'}=0$, $F_{\phi''}=e^{\phi''}$ $\frac{d}{dx}F_{\phi''}=F_{\phi''x}\frac{dx}{dx}+F_{\phi''\phi}\frac{d\phi}{dx}+F_{\phi''\phi'}\frac{d\phi'}{dx}+F_{\phi''\phi''}\frac{d\phi''}{dx}=F_{\phi''x}+F_{\phi''\phi}\phi'+F_{\phi''\phi'}\phi''+F_{\phi''\phi''}\phi'''=e^{\phi''}\phi'''$,

$\frac{d^2}{dx^2}F_{\phi''}=\frac{d}{dx}G=G_x+G_{\phi}\phi'+G_{\phi'}\phi''+G_{\phi''}\phi'''+G_{\phi'''}\phi''''=e^{\phi''}\left((\phi''')^2+\phi''''\right)$, где $G=e^{\phi''}\phi'''$, таким образом $e^{\phi''}\left((\phi''')^2+\phi''''\right)=0$.

Решение этого дифференциального уравнения $\phi(x)=0.5\ln(x+c)+c_1x+c_2x^2+c_3$, поэтому экстремаль для этого интегрального функционала $y(x)=e^{c_1x+c_2x^2+c_3}\sqrt{c+x}$.

Постоянные интегрирования могут быть найдены из определенных начальных условий $y(1)=\alpha$, $y(2)=\beta$, $y'(2)=\gamma$, $y'(1)=\rho$.

Пример . $\Phi\left[y(x)\right]=\int_1^2\left(y(L'y)^2\right)dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{y}(y')^2\right)dx$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi\left[y(x)\right]=\int_a^b F(x,y,y')dx$, $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$,

$y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}+F_{xy'}-F_y=0$, $F_x=\frac{2x}{y}(y')^2$, $F_{y'}=\frac{2x^2}{y}y'$, $F_{yy'}=-\frac{2x^2}{y^2}y'$, $F_{xy'}=\frac{4x}{y}y'$, $F_{y'y'}=\frac{2x^2}{y}$, $F_y=-\frac{x^2}{y^2}(y')^2$, после подстановки найдем уравнение $y''+\frac{2y'}{x}-\frac{(y')^2}{2y}=0$.

Пусть $x=e^t$, $t=\ln x$, so $y_x'=y_t'e^{-t}$, $y_{xx}''=\left(y_{tt}''-y_t'\right)e^{-2t}$, после подстановки найдем уравнение $y_{tt}''+y_t'-\frac{\left(y_t'\right)^2}{y}=0$. Решение этого дифференциального уравнения

$y(t)=c_1e^{-ce^{-t}}$, откуда данный интегральный функционал имеет экстремум на кривой $y(x)=c_1e^{-\frac{c}{x}}$. Уравнение $y''+\frac{2y'}{x}-\frac{(y')^2}{2y}=0$ также имеет следующее решение

$y(x)=c_1\left(4c-\frac{1}{x}\right)^2$. Это можно проверить подстановкой . Постоянные интегрирования можно найти из определенных начальных условий $y(1)=\alpha$, $y(2)=\beta$.

Пусть $p = F_{y'} = \frac{2x^2}{y} y' \Rightarrow y' = \frac{y}{2x^2} p$. Составим функцию Гамильтона этого функционала $H(y,p) = -F + F_{y'} y'_{y'=\frac{y}{2x^2}p} = -\frac{x^2}{y}(y')^2 + p\cdot\frac{py}{2x^2} = \frac{p^2 y}{4x^2}$, тогда получим систему

Гамильтона $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2x^2} y \\ \frac{dp}{dx} = -\frac{p^2}{4x^2} \end{cases}$. Решение этой системы $y(x) = c_1\left(4c - \frac{1}{x}\right)^2$, $p(x) = \frac{4x}{4xc-1}$, то есть система Гамильтона эквивалентна уравнению Эйлера .

Найдем производную функции Гамильтона $H(y,p)$ вдоль данной системы $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dx} = \frac{p^2}{4x^2}\frac{py}{2x^2} - \frac{2py}{4x^2}\frac{p^2}{4x^2} = 0$, то есть функция Гамильтона $H(y,p)$ является первым интегралом данной системы .

Составим уравнение Гамильтона Якоби для данного функционала . Поскольку функция Гамильтона $H(y,p) = \frac{p^2 y}{4x^2}$, найдем $\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{y}{4x^2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 0$. Решим это уравнение методом разделения переменных . Пусть $y\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = c$, $4x^2\frac{\partial S}{\partial x} = -c$, $S(x,y) = -\frac{c}{4}\int\frac{dx}{x^2} + \sqrt{c}\int\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{c}{4x} + 2\sqrt{cy} + c_0$.

Пример . $\Phi[y(x)] = \int_1^2 \left(y + (L'y)^2\right)dx = \int_1^2\left(y + \left(\frac{xy'}{y}\right)^2\right)dx$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')\,dx$, $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$,

$y''F_{y'y'} + y'F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0$, $F_x = \frac{2x}{y^2}(y')^2$, $F_{y'} = \frac{2x^2}{y^2}y'$, $F_{y'y} = -\frac{4x^2}{y^3}y'$, $F_{xy'} = \frac{4x}{y^2}y'$, $F_{y'y'} = \frac{2x^2}{y^2}$, $F_y = 1 - \frac{2x^2}{y^3}(y')^2$, после подстановки найдем уравнение

$\frac{2y'}{x} - \frac{(y')^2}{y} - \frac{y^2}{2x^2} + y'' = 0$. Пусть $x = e^t$, $t = \ln x$, so $y_x' = y_t' e^{-t}$, $y_{xx}'' = \left(y_{tt}'' - y_t'\right)e^{-2t}$, после подстановки найдем уравнение $y_{tt}'' + y_t' - \frac{\left(y_t'\right)^2}{y} + \frac{y^2}{2} = 0$.

Пусть $x = e^t$, $t = \ln x$, so $y_x' = y_t' e^{-t}$, $y_{xx}'' = \left(y_{tt}'' - y_t'\right)e^{-2t}$, после подстановки найдем уравнение $y_{tt}'' + y_t' - \frac{\left(y_t'\right)^2}{y} + \frac{y^2}{2} = 0$. Пусть $\frac{dy}{dt} = g(y) \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = g\frac{dg}{dy}$, получим уравнение $\frac{dg}{dy}+\frac{y^2}{2}-\frac{g^2}{y}+1=0$. Это уравнение можно решить численно .

Пусть $p=F_{y'}=\frac{2x^2}{y^2}y'\Rightarrow y'=\frac{y^2}{2x^2}p$. Составим функцию Гамильтона этого функционала $H(y,p)=-F+F_{y'}y'\Big|_{y'=\frac{y^2}{2x^2}p}=-y-\frac{x^2}{y^2}(y')^2+p\cdot p\frac{y^2}{2x^2}\Big|_{y'=\frac{y^2}{2x^2}p}=\frac{p^2}{x^2}\frac{y^2}{2}-y$, получим

систему Гамильтона $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p}\\ \frac{dp}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}p\\ \frac{dp}{dx}=1-\frac{y}{x^2}p^2\end{cases}$. Эту систему можно решить численно , то есть система Гамильтона эквивалентна уравнению Эйлера .

Найдем производную функции Гамильтона $H(y,p)$ along of this system $\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dx}=\left(-1+\frac{y}{x^2}p^2\right)\frac{y^2}{x^2}p+p\frac{y^2}{x^2}\left(1-\frac{y}{x^2}p^2\right)=0$, то есть функция Гамильтона $H(y,p)$ является первым интегралом данной системы .

Составим уравнение Гамильтона Якоби для данного функционала . Поскольку функция Гамильтона $H(y,p)=\frac{p^2}{x^2}\frac{y^2}{2}-y$, найдем $\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{y^2}{2x^2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2=0$. Решение этого уравнения $S(x,y)=\frac{\left(2y^3+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^3}{3y^2}+F(y)$, где $F(y)$ произвольная дифференцируемая функция переменной y .

Пример . $\Phi\left[y(x)\right]=\int_1^2(L''y)\,dx=\int_1^2\left(1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}\right)dx$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi\left[y(x)\right]=\int_a^b F(x,y,y',y'')\,dx$, $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0$,

$F_y=-xy'\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{xy'}{y^2}$, $F_{y'}=xy''\left(-\frac{1}{(y')^2}\right)-\frac{x}{y}=-x\left(\frac{y''}{(y')^2}+\frac{1}{y}\right)$, $F_{y''}=\frac{x}{y'}$, $\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{d}{dx}\left(-x\left(\frac{y''}{(y')^2}+\frac{1}{y}\right)\right)=-\left(\left(\frac{y''}{(y')^2}+\frac{1}{y}\right)+x\left(\frac{y'''(y')^2-2y'y''y''}{(y')^4}+\left(-\frac{1}{y^2}y'\right)\right)\right)=$

$=-\frac{y''}{(y')^2}-\frac{1}{y}-x\left(\frac{y'''y'-2(y'')^2}{(y')^3}-\frac{y'}{y^2}\right)$, можно так $\frac{d}{dx}F_{y'}=F_{y'x}\frac{dx}{dx}+F_{y'y}\frac{dy}{dx}+F_{y'y'}\frac{dy'}{dx}+F_{y'y''}\frac{dy''}{dx}=F_{y'x}+F_{y'y}y'+F_{y'y'}y''+F_{y'y''}y'''=$

$= -\left(\frac{y''}{(y')^2}+\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y^2}y' - xy''\left(-2\frac{1}{(y')^3}\right)y'' - \frac{x}{(y')^2}y''' = -\frac{y''}{(y')^2}-\frac{1}{y}-x\left(\frac{y'''y'-2(y'')^2}{(y')^3}-\frac{y'}{y^2}\right)$, $\frac{d}{dx}F_{y''} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y'}\right)=\frac{y'-xy''}{(y')^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'-xy''}{(y')^2}\right)=$

$=\frac{\left(y''-(y''+xy''')\right)(y')^2-2y'y''(y'-xy'')}{(y')^4}=\frac{-xy'''y'-2y''y'+2x(y'')^2}{(y')^3}$, можно так $\frac{d}{dx}F_{y''}=F_{y''x}\frac{dx}{dx}+F_{y''y}\frac{dy}{dx}+F_{y''y'}\frac{dy'}{dx}+F_{y''y''}\frac{dy''}{dx}=F_{y''x}+F_{y''y}y'+F_{y''y'}y''+F_{y''y''}y'''=$

$=\frac{1}{y}+0y'+x\left(-\frac{1}{(y')^2}\right)y''+0y'''=\frac{y'-xy''}{(y')^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=\frac{d}{dx}G=G_x+G_yy'+G_{y'}y''+G_{y''}y'''+G_{y'''}y''''=-\frac{y''}{(y')^2}+0y'+\frac{1(y')^2-(y'-xy'')2y'}{(y')^4}y''-\frac{x}{(y')^2}y'''+0y''''=$

$=\frac{-xy'''y'-2y''y'+2x(y'')^2}{(y')^3}$, where $G=\frac{y'-xy''}{(y')^2}$. Подставим эти выражения в уравнение Эйлера $\frac{xy'}{y^2}+\frac{y''}{(y')^2}+\frac{1}{y}+\frac{xy'''y'-2x(y'')^2}{(y')^3}-\frac{xy'}{y^2}+\frac{-xy'''y'-2y''y'+2x(y'')^2}{(y')^3}=0$,

$\frac{1}{y}-\frac{y''}{(y')^2}=0$. Пусть $y'(x)=p(y)$, значит $y''(x)=p\frac{dp}{dy}$, таким образом $\frac{1}{y}-\frac{p\frac{dp}{dy}}{p^2}=0$, $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$, $p(y)=yc$, поэтому $\frac{dy}{dx}=yc$, $y=c_1e^{cx}$.

Другое решение . Пусть $y(x)=f(x)$, $x=g(t)$, отсюда $y(t)=f(g(t))$, $y_t'=f_g'g_t'$, откуда $f_x'=f_g'=\frac{y_t'}{g_t'}$, значит $y_{tt}''=f_{gg}''\left(g_t'\right)^2+g_{tt}''f_g'$, таким образом

$f_{gg}''=f_{xx}''=\frac{y_{tt}''-g_{tt}''f_g'}{\left(g_t'\right)^2}$. Пусть $x=e^t$, поэтому $f_g'=f_x'=\frac{y_t'}{e^t}$, $f_{gg}''=f_{xx}''=\frac{y_{tt}''-\frac{y_t'}{e^t}e^t}{\left(e^t\right)^2}=\frac{y_{tt}''-y_t'}{e^{2t}}$, $dx=e^t\,dt$, $x=1$, $t=0$, $t=\ln 2$, $x=2$,

$\int\limits_1^2\left(1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}\right)dx=\int\limits_0^{\ln 2}\left(1+\frac{e^t\,\frac{y_{tt}''-y_t'}{e^{2t}}}{\frac{y'}{e^t}}-\frac{e^t\,\frac{y'}{e^t}}{y}\right)e^t\,dt=\int\limits_0^{\ln 2}\left(\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}\right)e^t\,dt$. Напишем уравнение Эйлера для этого функционала где $F=\left(\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}\right)e^t$, отсюда

$F_y=\frac{y'}{y^2}e^t$, $F_{y'}=\left(\frac{y''}{(y')^2}+\frac{1}{y}\right)e^t$, $F_{y''}=\frac{1}{y'}e^t$, $\frac{d}{dt}F_{y'}=-\left(\frac{y''}{(y')^2}+\frac{y-y'}{y^2}+\frac{y'''y'-2(y'')^2}{(y')^3}\right)e^t$, $\frac{d}{dt}F_{y''}=\frac{y'-y''}{(y')^2}e^t$, $\frac{d^2}{dt^2}F_{y''}=\left(\frac{(y')^2-2y'y''+2(y'')^2}{(y')^3}-\frac{y'''}{(y')^2}\right)$.

Подставим эти выражения в уравнение Эйлера $\frac{-2(y'')^2-y'y''+2y'(y'')^2+(y')^2}{(y')^3}+\frac{2}{y}=0$. Пусть $y_t'=p(y)$, откуда $\frac{dp}{dy}-\frac{2p}{y}-1=0$, решение этого уравнения

$p(y)=y\ln y+yc$, значит $y'=y\ln y+yc$, решение этого уравнения $y=c_1e^{e^tc}$, таким образом $y(x)=c_1e^{e^{\ln xc}}=c_1e^{cx}$.

Пусть $y(1)=1$, $y(2)=2$, поэтому $y(x)=2^{x-1}$, отсюда экстремаль данного интегрального функционала $y(x)=2^{x-1}$.

Пример . $\Phi\left[y(x)\right]=\int\limits_1^2\left(y+L'y+L''y+x\right)dx=\int\limits_1^2\left(y+\frac{xy'}{y}+1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}+x\right)dx=\int\limits_1^2\left(y+\frac{xy''}{y'}+x+1\right)dx$. Напишем уравнение Эйлера для функционала

$\Phi\left[y(x)\right]=\int\limits_a^b F\left(x,y,y',y''\right)dx$, $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d}{dx^2}F_{y''}=0$, $F_y=1$, $F_{y'}=-\frac{xy''}{(y')^2}$, $F_{y''}=\frac{x}{y'}$, $\frac{d}{dx}F_{y'}=F_{y'x}x'+F_{y'y}y'+F_{y'y'}y''+F_{y'y''}y'''=-\frac{y''}{(y')^2}-\frac{xy'''}{(y')^2}+2\frac{(y'')^2x}{(y')^3}$,

$\frac{d}{dx}F_{y''}=F_{y''x}x'+F_{y''y}y'+F_{y''y'}y''+F_{y''y''}y'''=\frac{1}{y'}-\frac{xy''}{(y')^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=\frac{d}{dx}G=G_xx'+G_yy'+G_{y'}y''+G_{y''}y'''$, где $G\left(x,y,y',y''\right)=\frac{1}{y'}-\frac{xy''}{(y')^2}$, поэтому $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=-\frac{2y''}{(y')^2}-\frac{xy'''}{(y')^2}+\frac{2x(y'')^2}{(y')^3}$, Пример . $\Phi\left[y(x)\right]=\int_1^2 \left(y+L'y+L''y+x\right)dx=\int_1^2\left(y+\frac{xy'}{y}+1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}+x\right)dx=\int_1^2\left(y+\frac{xy''}{y'}+x+1\right)dx$. Напишем уравнение Эйлера для функционала

$\Phi\left[y(x)\right]=\int_a^b F\left(x,y,y',y''\right)dx$, $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d}{dx^2}F_{y''}=0$, $F_y=1$, $F_{y'}=-\frac{xy''}{(y')^2}$, $F_{y''}=\frac{x}{y'}$, $\frac{d}{dx}F_{y'}=F_{y'x}x'+F_{y'y}y'+F_{y'y'}y''+F_{y'y''}y'''=-\frac{y''}{(y')^2}-\frac{xy'''}{(y')^2}+2\frac{(y'')^2x}{(y')^3}$,

$\frac{d}{dx}F_{y''}=F_{y''x}x'+F_{y''y}y'+F_{y''y'}y''+F_{y''y''}y'''=\frac{1}{y'}-\frac{xy''}{(y')^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=\frac{d}{dx}G=G_xx'+G_yy'+G_{y'}y''+G_{y''}y'''$, где $G\left(x,y,y',y''\right)=\frac{1}{y'}-\frac{xy''}{(y')^2}$, поэтому $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=-\frac{2y''}{(y')^2}-\frac{xy'''}{(y')^2}+\frac{2x(y'')^2}{(y')^3}$,

тогда найдем уравнение $1-\frac{y''}{(y')^2}=0$.Пусть $y'(x)=p(x)$, тогда $p'(x)=y''(x)$, отсюда получаем уравнение $\frac{p'}{p}=1$, so $p=e^xc$, откуда $y'=ce^x$, значит $y(x)=c_1+ce^x$.

Пусть $y(1)=1$, $y(2)=2$, таким образом экстремальная функция данного интегрального функционала $y(x)=\frac{-2+e+e^{x-1}}{e-1}$.

Пример . $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint_D\left(\left(L_x'u\right)^2-\left(L_y'u\right)^2\right)dxdy=\iint_D\frac{x^2\left(u_x'\right)^2-y^2\left(u_y'\right)^2}{u^2}dxdy$. Напишем уравнение Эйлера для функционала

$\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint_D F\left(x,y,u,p,q\right)dxdy$, где $p(x,y)=u_x'(x,y),q(x,y)=u_y'(x,y)$, $F_u-\frac{\partial}{\partial x}\left(F_p\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(F_q\right)=0$, $F\left(x,y,u,p,q\right)=\frac{x^2p^2-y^2q^2}{u^2}$, $F_u=-\frac{2}{u^3}\left(x^2p^2-y^2q^2\right)=$

$=-\frac{2}{u^3}\left(x^2\left(u_x'\right)^2-y^2\left(u_y'\right)^2\right)$, $F_p=\frac{2x^2}{u^2}p$, $F_q=-\frac{2y^2}{u^2}q$, $\frac{\partial}{\partial x}F_p=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^2}{u^2}p\right)=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{u^2}u_x'\right)=2\frac{2xuu_x'+x^2uu_{xx}''-2x^2\left(u_x'\right)^2}{u^3}$, $\frac{\partial}{\partial y}F_q=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y^2}{u^2}q\right)=-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{u^2}u_y'\right)=$

$=-2\frac{2yuu_y'+y^2uu_{yy}''-2y^2\left(u_y'\right)}{u^3}$, получаем уравнение Эйлера $x^2\left(u_x'\right)^2-y^2\left(u_y'\right)^2-xu\left(2u_x'+xu_{xx}''\right)+yu\left(2u_y'+yu_{yy}''\right)=0$. Решение этого уравнения найдем в виде

$u(x,y)=e^{\phi(x,y)}$, поэтому $u_x'=e^\phi\phi_x'$, $u_y'=e^\phi\phi_y'$, $u_{yy}''=e^\phi\left(\phi_y'\right)^2+e^\phi\phi_{yy}''$, $u_{xx}''=e^\phi\left(\phi_x'\right)^2+e^\phi\phi_{xx}''$, после подстановки найдем уравнение $y\left(2\phi_y'+y\phi_{yy}''\right)-x\left(2\phi_x'+x\phi_{xx}''\right)=0$,

можно проверить что решением этого уравнения является функция $\phi(x,y)=c\ln(xy)+c_1$, отсюда $u(x,y)=c_1(xy)^c$.

Пример . $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint_D L_{xy}''dxdy=\iint_D\frac{y\left(u_{xy}''u-u_x'u_y'\right)}{uu_x'}dxdy$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint_D F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=$

$=\iint_D F\left(x,y,u,p,q,r,s,t\right)dxdy$, $F=\frac{y(su-pq)}{up}$, $F_u=\frac{y}{p}\frac{su-(su-pq)}{u^2}=\frac{yq}{u^2}$, $F_p=\frac{y}{u}\frac{-qp-(su-pq)}{p^2}=-\frac{ys}{p^2}$, $F_q=\frac{y}{up}(-p)=-\frac{y}{u}$, $F_r=0$, $F_s=\frac{y}{up}u=\frac{y}{p}$, $F_t=0$, Пример . $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint\limits_D L_{yx}u\,dxdy=\iint\limits_D \frac{x\left(u_{xy}''u-u_x'u_y'\right)}{uu_y'}dxdy$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint\limits_D F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

решением этого уравнения является функция $u(x,y)=e^{c(x)(y+c_1)}$, где $c(x)$ произвольная непрерывная функция переменной x .

$\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint\limits_D \left(L_{yx}''u+L_{xy}''u\right)dxdy=\iint\limits_D\left(\left(\frac{xu_{xy}}{u_y}-\frac{xu_x}{u}\right)+\left(\frac{yu_{yx}}{u_x}-\frac{yu_y}{u}\right)\right)dxdy$. Напишем уравнение Эйлера для данного функционала $F_u=\frac{xu_x}{u^2}+\frac{yu_y}{u^2}$, $F_{u_x}=-\frac{x}{u}-\frac{yu_{yx}}{u_x^2}$, $F_{u_y}=-\frac{y}{u}-\frac{xu_{xy}}{u_y^2}$, $F_{u_{yy}}=0$, $F_{u_{xx}}=0$, $F_{u_{xy}}=\frac{x}{u_y}+\frac{y}{u_x}$,

$\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}=\frac{2yu_{xx}u_{yx}-yu_{xxy}u_x}{u_x^3}-\frac{u-xu_x}{u^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=\frac{2xu_{yy}u_{xy}-xu_{yyx}u_y}{u_y^3}-\frac{u-yu_y}{u^2}$,

$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}F_{u_{xy}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_{xy}}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{u_y}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{u_x}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y-xu_{xy}}{u_y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{yu_{xx}}{u_x^2}\right)=\frac{\left(u_{yy}-xu_{xyy}\right)u_y^2-2u_yu_{yy}\left(u_y-xu_{xy}\right)}{u_y^4}+\left(-\frac{\left(u_{xx}+yu_{xxy}\right)u_x^2-2yu_xu_{xx}u_{xy}}{u_x^4}\right)=\frac{-u_{yy}u_y-xu_{xyy}u_y+2xu_{yy}u_{xy}}{u_y^3}+\frac{2yu_{xx}u_{yx}-u_{xx}u_x-yu_{xxy}u_x}{u_x^3}$

$\frac{xu_x}{u^2}+\frac{u_yy}{u^2}++\frac{u-yu_y}{u^2}+\frac{u-xu_x}{u^2}+\frac{xu_{yyx}u_y-2xu_{yy}u_{xy}}{u_y^3}+\frac{yu_{xxy}u_y-2yu_{xx}u_{yx}}{u_x^3}+\frac{-u_{yy}u_y-xu_{xyy}u_y+2xu_{yy}u_{xy}}{u_y^3}+\frac{-u_{xx}u_x-yu_{xxy}u_x+2yu_{xx}u_{yx}}{u_x^3}=0$, $\frac{u_{xx}}{u_x^2}+\frac{u_{yy}}{u_y^2}-\frac{2}{u}=0$. Пусть $u(x,y)=Y(y)X(x)$, $\frac{X''Y}{(X'Y)^2}+\frac{Y''X}{(Y'X)^2}-\frac{2}{YX}=0$,

$X''=\frac{(X')^2}{rX}$, $Y''=\frac{(Y')^2}{Y}\left(2-\frac{1}{r}\right)$, $r=1$, $X(x)=\rho e^{\delta x}$, $Y(y)=\gamma e^{\sigma y}$, $r\neq 1$, $Y(y)=\left((\sigma y+\gamma)\left(\frac{1}{r}-1\right)\right)^{\frac{r}{1-r}}$, $X(x)=\left((\delta x+\rho)\left(1-\frac{1}{r}\right)\right)^{\frac{r}{r-1}}$,

Пример . $\frac{u_x}{u^2}+\frac{u_t}{u^2}+\frac{-u_tu_{tt}-u_{ttx}u_t+u_t^2-u_{tx}u_t+2u_{tt}u_{xt}}{u_t^3}+\frac{-u_xu_{xx}-u_{xxt}u_x+u_x^2-u_{tx}u_x+2u_{xx}u_{tx}}{u_x^3}=0$. Найдем волновое решение данного уравнения

$u(x,t)=f(\gamma)$, $\gamma=x-vt$, $u_x=f'$, $u_t=-vf'$, $u_{tt}=v^2f''$, $u_{xx}=f''$, $u_{xt}=-vf''$, $u_{xxt}=-vf'''$, $u_{ttx}=v^2f'''$. Получим дифференциальное уравнение $\frac{(f')^4\left(v-v^2\right)}{f^2}+\left(v^2-v\right)ff''+2\left(f''\right)^2\left(-v^2+v\right)+f'''f'\left(-v+v^2\right)+\left(f'\right)^2(v-1)=0$,

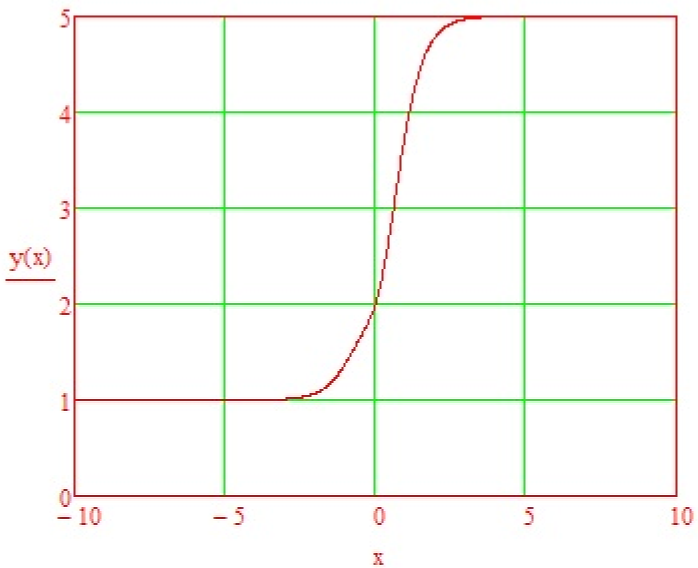
это уравнение можно решить численно , если $v=1$, то найдем тождество , поэтому любая дифференцируемая функция вида $f(x-t)$ является решением данного уравнения .

Решение данного уравнения $u(x,t)=\sigma+\rho\tanh\left(\varepsilon(x-t)+\omega\right)+\phi\tanh\left(\varepsilon(x-t)+\omega\right)^2+\lambda\tanh\left(\varepsilon(x-t)+\omega\right)^3$, где σ , ρ , ε , ω , λ постоянные . График этой функции имеет вид не монотоного кинк .

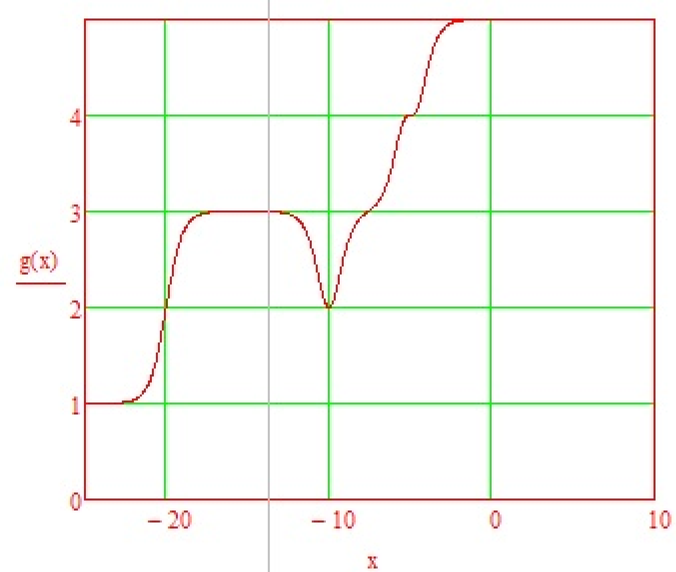
Пример. $\frac{u_x}{u^2}+\frac{u_t}{u^2}+\frac{u_tu_{tt}+u_{ttx}u_t-u_t^2-2u_{tt}u_{xt}+u_{tx}u_t}{u_t^3}+\frac{-u_xu_{xx}-u_{xxt}u_x+u_x^2-u_{tx}u_x+2u_{xx}u_{tx}}{u_x^3}=0$, $\frac{(f')^4\left(v-v^2\right)}{f^2}+\left(v-v^2\right)ff''-2\left(f''\right)^2\left(v^2+v\right)+f'''f'\left(v+v^2\right)+\left(f'\right)^2(v+1)=0$, это уравнение можно решить численно , если $v=1$, то

$-2\left(f''\right)^2+f'''f'+\left(f'\right)^2=0$. Решение данного уравнения $f(\gamma)=\ln\left(\pm\frac{\tanh\frac{\gamma+\lambda}{2}}{\rho}\right)\eta$, $u(x,t)=\ln\left(\pm\frac{\tanh\frac{x-t+\lambda}{2}}{\rho}\right)\eta$.

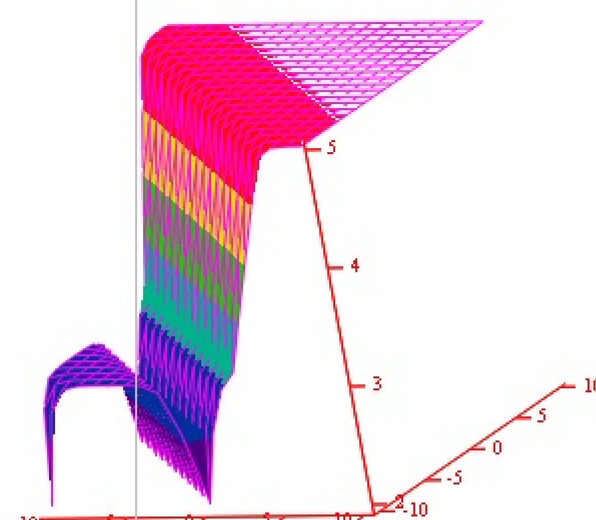
$y(x) := \tanh(x) + \tanh(x)^2 + \tanh(x)^3 + 2$



$g(x) := \tanh(x + 20) + \tanh(x + 10)^2 + \tanh(x + 5)^3 + 2$



$f(x, y) := \tanh(x - y + 20) + \tanh(x - y + 10)^2 + \tanh(x - y + 5)^3 + 2$



f

Пример . $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint\limits_D p_x' u p_y' u dxdy=\iint\limits_D e^{\frac{u_x}{u}} e^{\frac{u_y}{u}} dxdy=\iint\limits_D e^{\frac{u_x+u_y}{u}} dxdy=\iint\limits_D e^{\frac{p+q}{u}} dxdy$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint\limits_D F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D F(x,y,u,p,q)\,dxdy$, $F=e^{\frac{p+q}{u}}$,

$F_u=e^{\frac{p+q}{u}}\left(-\frac{p+q}{u^2}\right)$, $F_p=e^{\frac{p+q}{u}}\frac{1}{u}$, $F_q=e^{\frac{p+q}{u}}\frac{1}{u}$, $\frac{\partial}{\partial x}F_p=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{u_x+u_y}{u}}\frac{1}{u}\right)=e^{\frac{u_x+u_y}{u}}\frac{u_{xx}u+u_{xy}u-(u_x)^2-u_xu_y-u_xu}{u^3}$, $\frac{\partial}{\partial y}F_q=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{u_x+u_y}{u}}\frac{1}{u}\right)=e^{\frac{u_x+u_y}{u}}\frac{u_{yy}u+u_{xy}u-(u_y)^2-u_xu_y-u_yu}{u^3}$, $F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q=0$, тогда $u_{xx}u+u_{yy}u+2u_{xy}u-2u_xu_y-(u_x)^2-(u_y)^2=0$.

Пусть $u(x,y)=e^{z(x,y)}$, тогда $u_x=e^z z_x$, $u_y=e^z z_y$, $u_{xx}=e^z\left((z_x)^2+z_{xx}\right)$, $u_{yy}=e^z\left((z_y)^2+z_{yy}\right)$, $u_{xy}=e^z\left(z_xz_y+z_{xy}\right)$, $2z_{xy}+z_{xx}+z_{yy}=0$.

Пример . $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint\limits_D \frac{p_x' u}{p_y' u}dxdy=\iint\limits_D \frac{e^{\frac{u_x}{u}}}{e^{\frac{u_y}{u}}}dxdy=\iint\limits_D e^{\frac{u_x-u_y}{u}}dxdy=\iint\limits_D e^{\frac{p-q}{u}}dxdy$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $u_{xx}u+u_{yy}u-2u_{xy}u+2u_xu_y-(u_x)^2-(u_y)^2=0$. Пусть $u(x,y)=e^{z(x,y)}$, значит $2z_{xy}-z_{xx}-z_{yy}=0$.

Windows את הפעל

Пример . $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint\limits_D \frac{p_x'u}{p_y'u}\,dxdy=\iint\limits_D \frac{e^{\frac{u_x}{u}}}{e^{\frac{u_y}{u}}}\,dxdy=\iint\limits_D e^{\frac{u_x-u_y}{u}}\,dxdy=\iint\limits_D e^{\frac{p-q}{u}}\,dxdy$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $u_{xx}u+u_{yy}u-2u_{xy}u+2u_xu_y-\left(u_x\right)^2-\left(u_y\right)^2=0$.

Пусть $u(x,y)=e^{z(x,y)}$, значит $2z_{xy}-z_{xx}-z_{yy}=0$.

Пример . $\Phi\left[y(x)\right]=\int\limits_a^b yp'yp''ydx=\int\limits_a^b ye^{\frac{y'}{y}}e^{\frac{y''y-(y')^2}{y^2}}dx=\int\limits_a^b ye^{\frac{yy'+y''y-(y')^2}{y^2}}dx$. Напишем уравнение Эйлера для функционала $\Phi\left[y(x)\right]=\int\limits_a^b F\left(x,y,y',y''\right)dx$,

$F_y=e^{\frac{yy'+y''y-(y')^2}{y^2}}+ye^{\frac{yy'+y''y-(y')^2}{y^2}}\frac{\left(y'+y''\right)y^2-2y\left(y'y+yy''-(y')^2\right)}{y^4}=e^{\frac{y(y'+y'')-(y')^2}{y^2}}\left(1+\frac{2(y')^2-y(y'+y'')}{y^2}\right)$, $F_{y'}=ye^{\frac{yy'+y''y-(y')^2}{y^2}}\frac{y-2y'}{y^2}=e^{\frac{yy'+y''y-(y')^2}{y^2}}\frac{y-2y'}{y}$, $F_{y''}=ye^{\frac{yy'+y''y-(y')^2}{y^2}}\frac{y}{y^2}=e^{\frac{yy'+y''y-(y')^2}{y^2}}$.

Пример . $\left(u_x'(x,y)\right)^2+u_{xx}''(x,y)u(x,y)=a\left(\left(u_y'(x,y)\right)^2+u_{yy}''(x,y)u(x,y)\right)$. Пусть $u(x,y)=X(x)Y(y)$, таким образом $u_x'=X'(x)Y(y)$,

$u_y'=X(x)Y'(y),u_{yy}''=X(x)Y''(y),u_{xx}''=X''(x)Y(y)$, тогда $\left(X'(x)\right)^2Y(y)^2+X''(x)Y(y)Y(y)X(x)=a\left(X(x)^2\left(Y'(y)\right)^2+X(x)Y''(y)Y(y)X(x)\right)$,

тогда $Y(y)^2\left(\left(X'(x)\right)^2+X''(x)X(x)\right)=aX(x)^2\left(\left(Y'(y)\right)^2+Y''(y)Y(y)\right)$, найдем $\frac{\left(X'(x)\right)^2+X''(x)X(x)}{X(x)^2}=a\frac{\left(Y'(y)\right)^2+Y''(y)Y(y)}{Y(y)^2}=\lambda$.

Рассмотрим абстрактную функцию $f(t):\ R\to Y,$ где Y банахово пространство . Производная абстрактной функции это элемент пространства Y , касательный вектор

к кривой $f(t)$ определяется формулой $f'(t)=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left(f(t)-f(t_0)\right)$. Пусть $p'f(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\frac{f(t+\Delta t)}{f(t)}\right)^{\frac{1}{\Delta t}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(f(t+\Delta t)f^{-1}(t)\right)^{\frac{1}{\Delta t}}$, для элемента $f(t)\in X$ не определена

степень с дробным показателем , поэтому это определение не коректно .

В физике существует много процессов которые зависят от времени по экспоненциальному закону . Пример . Согласно теории инфляции расширения Вселенной

для плоского случая $R(t)=R_0e^{Ht}$, где $R(t)$ масштабный фактор , $H=\sqrt{\frac{8\pi\rho}{3M^4}}$ постоянная Хабла , $10^{-42}<t<10^{-36}$ секунд . В общем случае постоянная Хабла зависит от

времени $H(t)$, но во время раздувания медленно , то есть $\frac{dH(t)}{dt}\ll H^2(t)$, поэтому можно взять $H=$ constanta , тогда $R(t)=R_0e^{\int\limits_0^t H(t)dt}=R_0e^{Ht}$.

Найдем L производную $L_t'R(t)=\dfrac{t\left(R_0e^{Ht}\right)_t'}{R_0e^{Ht}}=tH$. Поскольку $L'y(t)=\dfrac{ty'(t)}{y(t)}=\dfrac{\dfrac{dy}{y(t)}}{\dfrac{dt}{t}}\approx\dfrac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta t}{t}}$, то L производная равна отношению относительного приращения функции $\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)$,

к относительному приращению аргумента $\left(\dfrac{\Delta t}{t}\right)$, отсюда L производная показывает степень количественного преобразования одного фактора $y(t)$ при преобразовании другого t на 1% . При условии что $0<L_t'y(t)<1$, то темпы преобразования фактора $y(t)$ меньше темпа преобразования фактора t .

Выражение $L_t'R(t)=tH$ не имеет размерности . В период раздувания Вселенной $Ht\approx 1$, откуда получаем что $R(t)$, t имеют равные темпы увеличения . $L_{tt}''R(t)=1$.

Пример . Закон радиоактивного распада $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, где $N(t)$ число не распавшихся атомов в образце , $N_0=N(t=0)$, λ постоянная радиоактивного распада , которая

определяет вероятность радиоативного распада за единицу времени $[\lambda]=c^{-1}$. Найдем L производную $L_t'N(t)=L_t'N_0e^{-\lambda t}=\dfrac{t\left(N_0e^{-\lambda t}\right)}{N_0e^{-\lambda t}}=-\lambda t$, $\left|L_t'N(t)\right|=\lambda t$, за время равное периоду полураспада $T_{1/2}$, получим $\left|L_t'N\left(t=T_{1/2}\right)\right|=\lambda T_{1/2}=\lambda\dfrac{\ln 2}{\lambda}=\ln 2<1$. $L_{tt}''N(t)=1$.

Коммутатор двух операторов L , G это $[L,G](f)=L(G(f))-G(L(f))$, if $[L,G](f)=0$, то операторы коммутируют .

Пример . Пусть $D=y'$, $P=(\ln y)'=\frac{y'}{y}$, $P(D)=P(y')=\frac{y''}{y'}$, $D(P)=\left(\frac{y'}{y}\right)'=\frac{y''y-(y')^2}{y^2}$, $[D,P]=DP-PD$, $\frac{y''y-(y')^2}{y^2}-\frac{y''}{y'}=0$, начальные условия $y(1)=1$, $y'(1)=e$. Решение этого уравнения $y(x)=LambertW\left(-ce^{-x}\right)\cdot e^{LambertW\left(-ce^{-x}\right)}\cdot c_1$.

Можно так $y'(x)=\frac{dy}{dx}=q(y)$, $y''(x)=\frac{dy'}{dx}=\frac{dq}{dx}=\frac{dq}{dy}\frac{dy}{dx}=q'(y)q(y)$, $q'y(-1+q)+q^2=0$. Решение этого уравнения $q(y)=e^{-LambertW\left(\frac{-1}{e^c x}\right)+c}$, $y'(x)=e^{-LambertW\left(\frac{-1}{e^c x}\right)+c}$.

Другое решение . Пусть $y(x)=e^{\phi(x)}$, поэтому $y'=e^{\phi}\phi'$, $y''=e^{\phi}\left((\phi')^2+\phi''\right)$, найдем уравнение $\phi''(x)(\phi'(x)-1)-(\phi'(x))^2$, начальные условия $\phi(1)=0$, $\phi'(1)=e$.

Решение этого уравнения $\phi(x)=-x-LambertW\left(-e^{-x}c\right)-\frac{1}{LambertW\left(-e^{-x}c\right)}+c_1$.

Можно так $\phi'(x)=\frac{d\phi}{dx}=p(\phi)$, $\phi''(x)=\frac{d\phi'}{dx}=\frac{dp}{d\phi}\frac{d\phi}{dx}=p'(\phi)p$, $p'p(p-1)-p^2=0$, $p(\phi)=0$, $\frac{d\phi}{dx}=0$, $\phi(x)=\delta$, $y(x)=e^{\delta}$, $y'\neq 0$, $p'(p-1)-p=0$. Решение этого уравнения $p(\phi)-\ln p(\phi)=\phi+c$, $p(\phi)=e^{-LambertW\left(-e^{-\phi-c}\right)-c-\phi}$,

$\phi'(x)=e^{-LambertW\left(-e^{-\phi-c}\right)-c-\phi}$, $\phi(x)=\frac{1}{2}LambertW\left(\frac{-1}{e^{x+c}}\right)^2+LambertW\left(\frac{-1}{e^{x+c}}\right)+c_1$, $y(x)=e^{\phi(x)}$.

Пример . Пусть $P=(\ln y)'=\frac{y'}{y}$, $L=x(\ln y)'=x\frac{y'}{y}$, $L(P)=\frac{x\left(\frac{y'}{y}\right)'}{\frac{y'}{y}}=x\left(\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}\right)$, $P(L)=\frac{\left(\frac{xy'}{y}\right)'}{\frac{xy'}{y}}=\frac{1}{x}+\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}$, $[P,L]=PL-LP$, $\frac{1}{x}+\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}-x\left(\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}\right)=\frac{1}{x}+(1-x)\left(\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}\right)=0$, $(\ln y')'-(\ln y)'=\frac{1}{x(x-1)}$, $(\ln y'-\ln y)'=\frac{1}{x(x-1)}$,

$\left(\ln\left(\frac{y'}{y}\right)\right)'=\frac{1}{x(x-1)}$, $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{y'}{y}\right)\right)=\frac{1}{x(x-1)}$, $\ln\left(\frac{y'}{y}\right)=\int\frac{dx}{x(x-1)}$, $\ln\left(\frac{y'}{y}\right)=\ln(x-1)-\ln x+\ln c$, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\left(1-\frac{1}{x}\right)c$. Решение этого уравнения $y=\frac{e^{cx}}{x^c}\gamma$.

Пример . Пусть $P=(\ln y)'=\frac{y'}{y}$, $L=1+x(\ln y')'-x(\ln y)'=1+x\frac{y''}{y'}-x\frac{y'}{y}$, $L(P)=1+x\frac{\left(\frac{y'}{y}\right)''}{\left(\frac{y'}{y}\right)'}-x\frac{\left(\frac{y'}{y}\right)'}{\frac{y'}{y}}$, $P(L)=\frac{\left(1+x\frac{y''}{y'}-x\frac{y'}{y}\right)'}{1+x\frac{y''}{y'}-x\frac{y'}{y}}$, $[P,L]=PL-LP=\frac{\left(1+x\frac{y''}{y'}-x\frac{y'}{y}\right)'}{1+x\frac{y''}{y'}-x\frac{y'}{y}}-\left(1+x\frac{\left(\frac{y'}{y}\right)''}{\left(\frac{y'}{y}\right)'}-x\frac{\left(\frac{y'}{y}\right)'}{\frac{y'}{y}}\right)=$

$=\frac{\frac{(y''+xy''')y'-x(y'')^2}{(y')^2}-\frac{(y'+xy'')y-x(y')^2}{y^2}}{1+x\frac{y''}{y'}-x\frac{y'}{y}}-x\frac{\frac{y'''y^2-3y''y'y+2(y')^2y'}{y^3}}{\frac{y''y-(y')^2}{y^2}}-1+x\frac{\frac{y''y-(y')^2}{y^2}}{\frac{y'}{y}}=0$. Пусть $\frac{y'}{y}=u$, тогда $u'=\frac{y''y-(y')^2}{y^2}=\frac{\frac{y''}{y'}y-\frac{(y')^2}{y'}}{\frac{y^2}{y'}}=\frac{\frac{y''}{y'}y-y'}{\frac{y^2}{y'}}=\frac{\frac{y''}{y'}y-yu}{\frac{y^2}{yu}}=\frac{y\left(\frac{y''}{y'}-u\right)}{\frac{y}{u}}=\left(\frac{y''}{y'}-u\right)u$, $\frac{y''}{y'}=\frac{u'}{u}+u$, можно так $y'=yu$, это дает

$y''=y'u+u'y$, $\frac{y''}{y'}=u+u'\frac{y}{y'}=u+\frac{u'}{u}$. Подставим эти выражения в уравнение $1+x\frac{u''}{u'}-x\frac{u'}{u}-\frac{\left(\left(\frac{u'}{u}+u\right)x\right)'-(xu)'}{1+x\left(u+\frac{u'}{u}\right)-ux}=1+x\frac{u''}{u'}-x\frac{u'}{u}-\frac{uu'+\left(u''u-(u')^2\right)x}{u(u+xu')}=0$, $\left(1+x\left(\frac{u''}{u'}-\frac{u'}{u}\right)\right)\left(x+\frac{u}{u'}-1\right)=0$, $u'(x-1)+u=0$, $1+x(\ln u'-\ln u)'=0$.

Решение этого уравнения $u(x)=\frac{c}{x-1}$, $u(x)=x^c c_1$, отсюда $\frac{y'}{y}=x^c c_1$, $y(x)=\frac{x^{c+1}}{c+1}+c_2$, $\frac{y'}{y}=\frac{c}{x-1}$, $y(x)=(x-1)^c+c_1$.

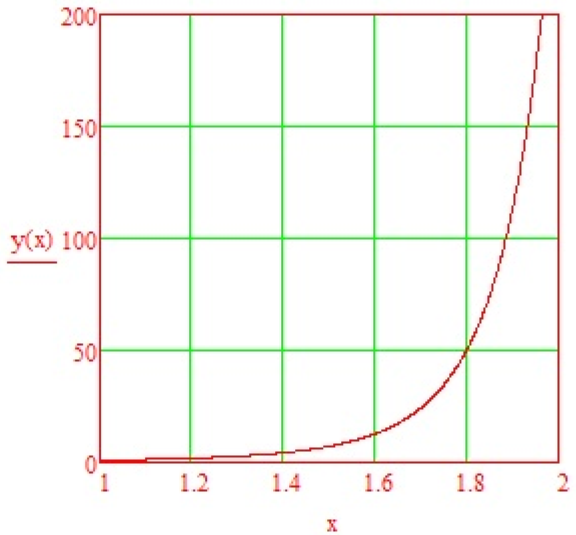
Это уравнение однородное , поэтому его можно решить с помощью подстановки $y(x)=e^{\int g(x)dx}$, отсюда $y'(x)=e^{\int g(x)dx}g(x)$, $y''(x)=e^{\int g(x)dx}\left((g(x))^2+g'(x)\right)$, откуда $\frac{y'}{y}=g(x)$, $\frac{y''}{y'}=\frac{(g(x))^2+g'(x)}{g(x)}$.

Подставим эти выражения в уравнение $\frac{\left(1+\frac{g'}{g}\right)'}{1+\frac{g'}{g}}-\left(1+x\left(\frac{g''}{g'}-\frac{g'}{g}\right)\right)=0$. Пусть $\frac{g'}{g}=r$, значит $\frac{g''}{g'}=r+\frac{r'}{r}$, $r'\left(r(1-x)-x\right)-r-r^2=0$.

$$\frac{y''(x)\,y'(x)-(y'(x))^2}{(y(x))^2}-\frac{y''(x)}{y'(x)}:=0 \;\rightarrow$$

Given $\quad (y''(x))\cdot\left(y'(x)\cdot y(x)-y(x)^2\right)-(y'(x))^2\cdot y'(x)=0$

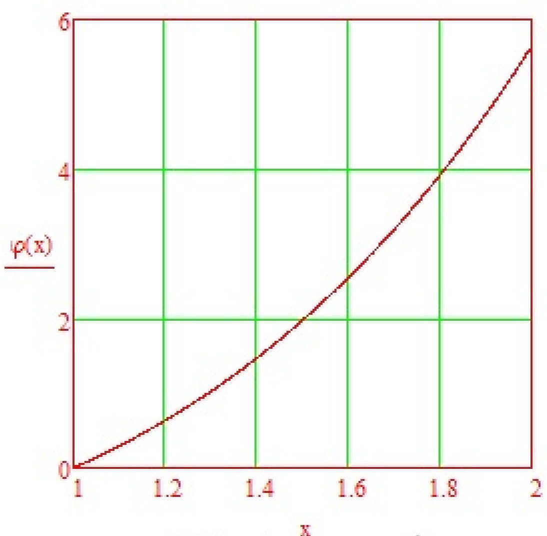
$y(1)=1 \qquad y'(1)=e \qquad y:=\mathrm{Odesolve}(x,2) \qquad y(1.4)=4.34847$



$y(x):=e^{\varphi(x)} \qquad \varphi(x):=\ln(y(x)) \qquad \varphi''(x)\cdot(\varphi'(x)-1)-\varphi'(x)^2:=0$

Given $\quad \varphi''(x)\cdot(\varphi'(x)-1)-\varphi'(x)^2=0 \quad \varphi(1)=0 \quad \varphi'(1)=e \quad \varphi:=\mathrm{Odesolve}(x,2)$

$\varphi(1.4)=1.46983 \qquad \ln(4.34847)=1.46982$



Windows הפעל את

$ode := diff(y(x), x, x) \cdot (diff(y(x), x) \cdot y(x) - (y(x))^2) - diff(y(x), x)^2 \cdot diff(y(x), x) = 0$

$$ode := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right)\left(\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) y(x) - y(x)^2\right) - \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^3 = 0$$

$dsolve(ode)$

$$y(x) = \frac{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1}{\_C1\, e^x}\right) \_C2}{e^{\frac{1}{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1}{\_C1\, e^x}\right)}}}$$

$ode := diff(y(x), x, x) \cdot (diff(y(x), x) \cdot y(x) - (y(x))^2) - diff(y(x), x)^2 \cdot diff(y(x), x) = 0$

$$ode := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right)\left(\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) y(x) - y(x)^2\right) - \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^3 = 0$$

$dsolve(\{ode, y(1) = 1, D(y)(1) = 2.718281\}, y(x));$

$$y(x) = -\frac{2718281}{1000000} \frac{e^{-\frac{2718281}{1000000}} \mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281} e^{\frac{1718281}{2718281} - x}\right)}{e^{\frac{1}{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281} e^{\frac{1718281}{2718281} - x}\right)}}}$$

$ode := diff(y(x), x, x) \cdot (diff(y(x), x) - 1) - diff(y(x), x)^2 = 0$

$$ode := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right)\left(\frac{d}{dx} y(x) - 1\right) - \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 = 0$$

$dsolve(ode);$

$$y(x) = -x - \mathrm{LambertW}\left(-\frac{e^{-x}}{\_C1}\right) - \frac{1}{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{e^{-x}}{\_C1}\right)} + \_C2$$

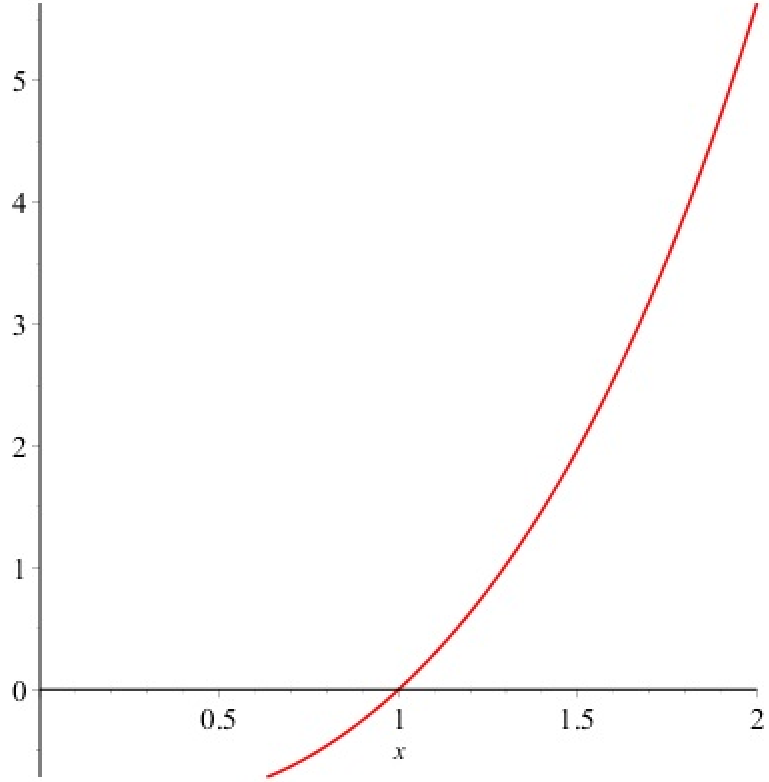
$ode := diff(y(x), x, x) \cdot (diff(y(x), x) - 1) - diff(y(x), x)^2 = 0$

$$ode := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right)\left(\frac{d}{dx} y(x) - 1\right) - \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 = 0$$

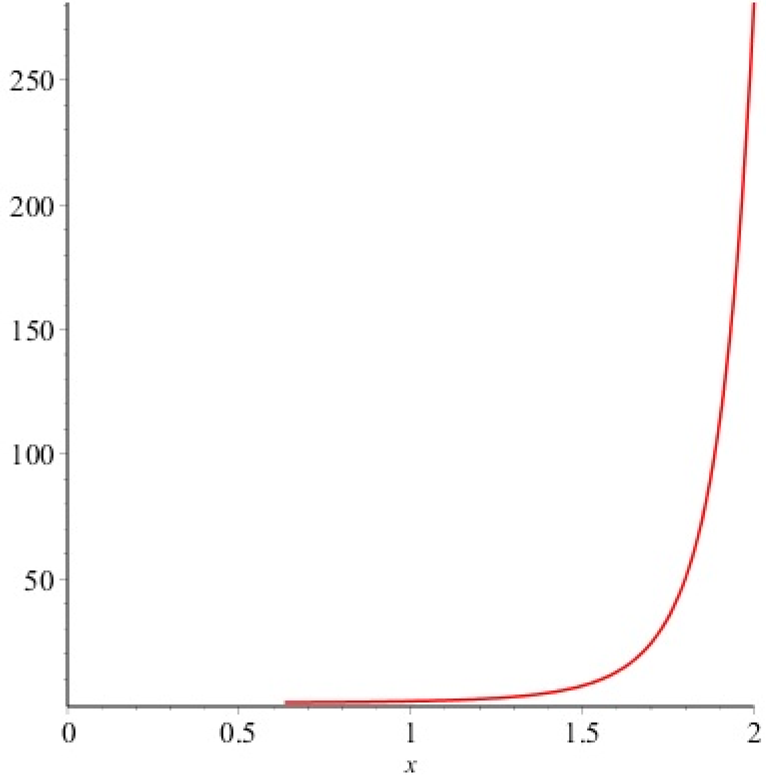
$dsolve(\{ode, y(1) = 0, D(y)(1) = 2.718281\}, y(x));$

$$y(x) = -x - \mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281}\frac{e^{-x}}{e^{-\frac{1718281}{2718281}}}\right) - \frac{1}{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281}\frac{e^{-x}}{e^{-\frac{1718281}{2718281}}}\right)} - \frac{5670770594961}{2718281000000}$$

$$plot\left(\left[-x - \mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281}\frac{e^{-x}}{e^{-\frac{1718281}{2718281}}}\right) - \frac{1}{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281}\frac{e^{-x}}{e^{-\frac{1718281}{2718281}}}\right)} - \frac{5670770594961}{2718281000000}\right], x = 0..2, color = red\right);$$



$$plot\left(\left[-\frac{2718281}{1000000}\ \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2718281}{1000000}\ \mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281}\ \mathrm{e}^{\frac{1718281}{2718281}-x}\right)}}{\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{LambertW}\left(-\frac{1000000}{2718281}\ \mathrm{e}^{\frac{1718281}{2718281}-x}\right)}}}\right], x=0\,..2, color=red\right);$$



indows הפעל את

INFINITE PRODUCT

Consider Taylor series of a function y = ln(f(x)) for $a > 0 \quad |x-a| < \frac{a}{2}$

$$\ln(f(x)) = \frac{\ln(f(a))}{0!}\cdot(x-a)^0 + \frac{\ln'(f(a))}{1!}\cdot(x-a)^1 + \frac{\ln''(f(a))}{2!}\cdot(x-a)^2 + \dots\dots + \frac{(\ln(f(a)))^{(i)}}{i!}\cdot(x-a)^i + R_n(x)$$

whense obtain $f(x) = e^{\left[\frac{\ln(f(a))}{0!}\cdot(x-a)^0 + \frac{\ln'(f(a))}{1!}\cdot(x-a)^1 + \frac{\ln''(f(a))}{2!}\cdot(x-a)^2 + \dots\dots + \frac{(\ln(f(a)))^{(i)}}{i!}\cdot(x-a)^i + R_n(x)\right]} = e^{\ln(f(a))}\cdot e^{\left[\frac{\ln'(f(a))}{1!}\cdot(x-a)^1\right]}\cdot e^{\left[\frac{\ln''(f(a))}{2!}\cdot(x-a)^2\right]}\dots\dots e^{\left[\frac{(\ln(f(a)))^{(i)}}{i!}\cdot(x-a)^i\right]}\cdot e^{R_n(x)}$

$$\ln'(f(a)) = (\ln(f(a)))'_{x=a} = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)_{x=a} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$ than $$e^{\ln' f(a)} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}} = p'f(a)$$

$$\ln''(f(a)) = (\ln'(f(a)))'_{x=a} = \left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'\right]_{x=a} = \left[\frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}\right]_{x=a} = \frac{f''(a)f(a) - (f'(a))^2}{f^2(a)}$$

than $$e^{\ln'' f(a)} = e^{\frac{f''(a)f(a)-(f(a))^2}{f^2(a)}} = p''f(a)$$ therefore $$e^{(\ln(f(a)))^{(i)}} = p^{(i)}f(a)$$

$$f(x) = f(a)(p'f(a))^{\frac{x-a}{1}}(p''f(a))^{\frac{(x-a)^2}{2}} + \dots\dots + \left[p^{(i)}f(a)\right]^{\frac{(x-a)^i}{i}} e^{R_n}$$

so finally $$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty}\left[p^{(i)}f(a)\right]^{\frac{(x-a)^i}{i!}}$$ where $$R_n = \frac{\ln^{(i+1)}(f(\zeta))}{(i+1)!}\cdot(x-a)^{i+1} \qquad \zeta = a + \nu(x-a) \qquad 0 < \nu < 1$$

$$e^{R_n} = \left[e^{\ln^{(i+1)} f(\zeta)}\right]^{\left[\frac{(x-a)^{i+1}}{(i+1)!}\right]} \qquad e^{R_n} = \left[p^{(i+1)}f(\zeta)\right]^{\left[\frac{(x-a)^{i+1}}{(i+1)!}\right]}$$

Or $R_n = \int_a^x \left[\ln^{(i+1)}(f(\zeta))\right] \cdot \frac{(x-\zeta)^i}{i!} d\zeta$ $\quad e^{R_n} = e^{\int_a^x \left[\ln^{(i+1)} f(\zeta)\right]\left[\frac{(x-\zeta)^i}{i!}\right] d\zeta} = e^{\int_a^x \left[\ln\left[p^{(i+1)} f(\zeta)\right]\right]\left[\frac{(x-\zeta)^i}{i!}\right] d\zeta} = e^{\int_a^x \left[\ln\left[p^{(i+1)} f(\zeta)\right]^{\left[\frac{(x-\zeta)^i}{i!}\right]}\right] d\zeta} = P\left[\int_a^x \left[p^{(i+1)} f(\zeta)\right]^{\left[\frac{(x-\zeta)^i}{i!}\right]} d\zeta\right]$

$$e^{R_n} = P \cdot \int_a^x \left[p^{(i+1)}(f(\zeta))^{\frac{(x-\zeta)^i}{i!}}\right] d\zeta$$

For this infinite product can find p-derivative i.e $p'f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \left[p^{(i)} f(a)\right]^{\frac{(x-a)^{i-1}}{(i-1)!}}$ Proof Let $b_i = p^{(i)} f(a)$ hence obtain

$$p'\left[\left[p^{(i)}\right]^{\frac{(x-a)^i}{i!}}\right] = p'\left[\left(b_i\right)^{\frac{(x-a)^i}{i!}}\right] = e^{\frac{\left(b_i\right)^{\frac{(x-a)^i}{i!}} \cdot \frac{i(x-a)^{i-1} \cdot \ln(b_i)}{i!}}{\left(b_i\right)^{\frac{(x-a)^i}{i!}}}} = e^{\frac{(x-a)^{i-1} \cdot \ln(b_i)}{(i-1)!}} = \left(b_i\right)^{\frac{(x-a)^{i-1}}{(i-1)!}} = \left[p^{(i)} f(a)\right]^{\frac{(x-a)^{i-1}}{(i-1)!}}$$

Example $f(x) = x^n \quad f(a) = a^n \quad p'(x^n) = e^{\frac{n}{x}} \quad p'(f(a)) = e^{\frac{n}{a}} \quad p''(x^n) = p'\left(e^{\frac{n}{x}}\right) = e^{\frac{-n}{x^2}} \quad p''(f(a)) = e^{\frac{-n}{a^2}} \quad p'''(x^n) = p'\left(e^{\frac{-n}{x^2}}\right) = e^{\frac{2n}{x^3}} \quad p'''(f(a)) = e^{\frac{2n}{a^3}}$

$p^{(4)}(x^n) = e^{\frac{-6n}{x^4}} \quad p^{(4)}(f(a)) = e^{\frac{-6n}{a^4}} \quad p^{(5)}(x^n) = e^{\frac{24n}{x^5}} \quad p^{(5)}(f(a)) = e^{\frac{24n}{a^5}} \qquad x^n = a^n \cdot \prod_{i=1}^{\infty} e^{(-1)^{i-1} \cdot \frac{n(x-a)^i}{a^i \cdot i}}$

Example $f(x) = e^x \quad p'e^x = e \quad p''e^x = p'e = 1 \quad p^{(n)}e^x = 1$ hence obtain $e^x = e^a \cdot e^{x-a} \cdot 1^{\frac{x-1}{2}} \cdot \ldots\ldots = e^x$

Example $f(x) = \sin(x) \quad p'\sin(x) = e^{ctg(x)} \quad p'\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{ctg\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e \quad p''\sin(x) = p'\left(e^{ctg(x)}\right) = e^{ctg'(x)} = e^{\frac{-1}{\sin^2(x)}} \quad p''\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$p'''\cdot\sin(x) = p'\cdot\left[e^{\frac{-1}{\sin^2(x)}}\right] = e^{\left[\frac{-1}{\sin^2(x)}\right]'} = e^{\frac{2\cos(x)}{\sin^3(x)}} \quad p'''\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = e^4 \quad p^{(4)}\cdot\sin(x) = p'\cdot\left[e^{\frac{2\cos(x)}{\sin^3(x)}}\right] = e^{\left[\frac{2\cos(x)}{\sin^3(x)}\right]'} = e^{\frac{-\left[2+4\cos^2(x)\right]}{\sin^4(x)}} \quad p^{(4)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{-\left[2+4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = e^{-16}$

$$p^{(5)}\sin(x) = p'\left[e^{\frac{-\left[2+4\cos^2(x)\right]}{\sin^4(x)}}\right] = e^{\left[\frac{-\left[2+4\cos^2(x)\right]}{\sin^4(x)}\right]'} = e^{\frac{8\cos^3(x)+16\cos(x)}{\sin^5(x)}}$$

$$p^{(5)}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{8\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)+16\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^5\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = e^{80}$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.5}-\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.5}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.5}-\frac{32}{45}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6+\frac{244}{315}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^7+\dots\dots}$$

$$\left|x-\frac{\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{8}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^3}{1.5}-\frac{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^4}{1.5}+\frac{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^5}{1.5}-\frac{32}{45}\cdot\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^6+\frac{244}{315}\cdot\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^7-\frac{272}{315}\cdot\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^8+\frac{554}{567}\cdot\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^9-\frac{15872}{14175}\cdot\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)^{10}} = 0.43388957529685$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0.43388373911756$$

Example

$$p'y = y \quad y(0) = e$$

$$e^{\frac{y'}{y}} = y \Rightarrow \frac{dy}{y\cdot\ln(y)} = dx \quad y = e^{e^{x+C}} \quad \text{for } y(0) = e \quad y = e^{e^{x}}$$

Find solution of this equation useing the infinite product

$$p'y(0) = y(0) = e \quad p''y = p'(p'y) = p'(y) = y \quad p''y(0) = e \ \ldots\ldots \quad p^{(n)}y(0) = e \quad \text{then obtain} \quad y = e\cdot e^{x}\cdot e^{\frac{x^2}{2!}}\cdot e^{\frac{x^3}{3!}}\cdot\ldots\ldots = e^{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots} = e^{e^{x}}$$

Example

$$p'y = y^{x} \quad y(0) = e$$

$$e^{\frac{y'}{y}} = y^{x} \Rightarrow \frac{dy}{y\cdot\ln(y)} = x\cdot dx \quad y = e^{e^{\frac{x^2}{2}+C}} \quad \text{for } y(0) = e \quad y = e^{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Find solution of this equation useing the infinite product

$$p'y(0) = y(0)^{0} = e^{0} = 1 \quad p''y = p'(p'y) = p'\left(y^{x}\right) = y\cdot(p'y)^{x} \quad p''y(0) = y(0)\cdot(p'y(0))^{0} = e$$

$$p'''y = p'(p''y) = p'\left[y\cdot(p'y)^{x}\right] = p'y\cdot p'y\cdot(p''y)^{x} = (p'y)^{2}\cdot(p''y)^{x} \quad p'''y(0) = (p'y(0))^{2}\cdot(p''y(0))^{0} = 1$$

$$p^{(4)}y = p'(p'''y) = p'\left[(p'y)^2\cdot(p''y)^x\right] = p'\left[(p'y)^2\right]\cdot p'\left[(p''y)^x\right] = p'y\cdot(p''y)^2\cdot p''y\cdot(p'''y)^x$$

$$p^{(4)}\cdot y(0) = \left[p'y(0)\cdot(p''y(0))^2\cdot p''y(0)\cdot(p'''y(0))^0\right] = e^3$$

Whence it follows that $y = y(0)\cdot p'y(0)^x\cdot p''y(0)^{\frac{x^2}{2!}}\cdot p'''y(0)^{\frac{x^3}{3!}}\cdot\left[p^{(4)}\cdot y(0)\right]^{\frac{x^4}{4!}}\cdot .... = e^{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+.......} = e^{e^{\frac{x^2}{2}}}$

Example $p'y = y\cdot x \qquad y(1) = 2 \qquad (y' = y\cdot \ln(y\cdot x))$

Given $\quad \frac{d}{dx}y(x) = y(x)\cdot\ln(y(x)\cdot x) \qquad y(1) = 2 \qquad y := \mathrm{Odesolve}(x, 2.5) \qquad y(1.1) = 2.16204708559437$

Find solution of this equation useing the infinite product for $\quad |x-1| < 0.5$

$$y = y(1)\cdot p'y(1)^{x-1}\cdot p''y(1)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot p'''y(1)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot p''''y(1)^{\frac{(x-1)^4}{4!}} .... \Rightarrow$$

$$y = 2\cdot 2^{x-1}\cdot(2\cdot e)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot\left(2\cdot e^0\right)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot\left(2\cdot e^2\right)^{\frac{(x-1)^4}{4!}}\cdot\left(2\cdot e^{-2}\right)^{\frac{(x-1)^5}{5!}}\cdot\left(2\cdot e^{22}\right)^{\frac{(x-1)^6}{6!}}\cdot\left(2\cdot e^{-98}\right)^{\frac{(x-1)^7}{7!}}\cdot\left(2\cdot e^{622}\right)^{\frac{(x-1)^8}{8!}}\cdot.......$$

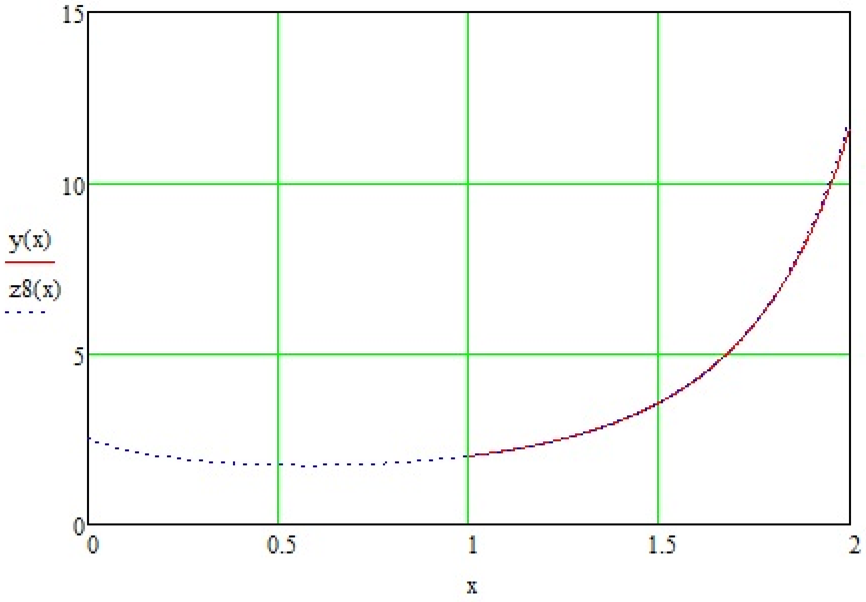
$$z4(x) := 2\cdot 2^{x-1}\cdot(2\cdot e)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot\left(2e^{0}\right)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot\left(2\cdot e^{2}\right)^{\frac{(x-1)^4}{4!}} \quad z4(1.1) = 2.16204467014537$$

$$z5(x) := 2\cdot 2^{x-1}\cdot(2\cdot e)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot\left(2e^{0}\right)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot\left(2\cdot e^{2}\right)^{\frac{(x-1)^4}{4!}}\cdot\left(2\cdot e^{-2}\right)^{\frac{(x-1)^5}{5!}} \quad z5(1.1) = 2.16204443468921$$

$$z6(x) := 2\cdot 2^{x-1}\cdot(2\cdot e)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot\left(2e^{0}\right)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot\left(2\cdot e^{2}\right)^{\frac{(x-1)^4}{4!}}\cdot\left(2\cdot e^{-2}\right)^{\frac{(x-1)^5}{5!}}\cdot\left(2e^{22}\right)^{\frac{(x-1)^6}{6!}} \quad z6(1.1) = 2.16204450283309$$

$$z7(x) := 2\cdot 2^{x-1}\cdot(2\cdot e)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot\left(2\cdot e^{0}\right)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot\left(2\cdot e^{2}\right)^{\frac{(x-1)^4}{4!}}\cdot\left(2\cdot e^{-2}\right)^{\frac{(x-1)^5}{5!}}\cdot\left(2\cdot e^{22}\right)^{\frac{(x-1)^6}{6!}}\cdot\left(2\cdot e^{-98}\right)^{\frac{(x-1)^7}{7!}}$$

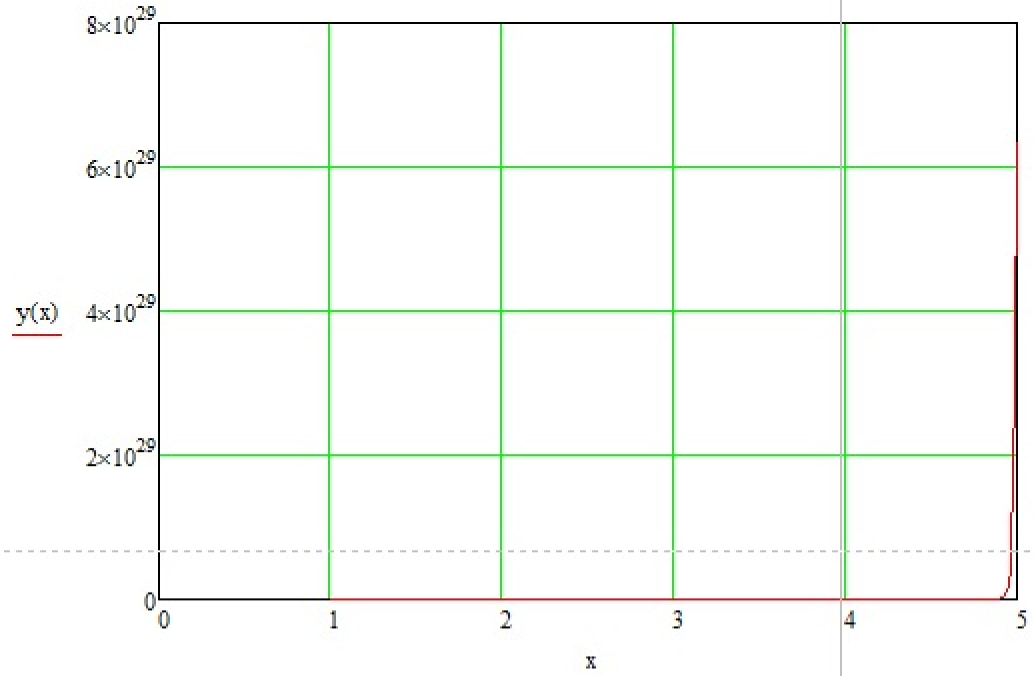
$$z8(x) := 2\cdot 2^{x-1}\cdot(2\cdot e)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot\left(2\cdot e^{0}\right)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot\left(2\cdot e^{2}\right)^{\frac{(x-1)^4}{4!}}\cdot\left(2\cdot e^{-2}\right)^{\frac{(x-1)^5}{5!}}\cdot\left(2\cdot e^{22}\right)^{\frac{(x-1)^6}{6!}}\cdot\left(2\cdot e^{-98}\right)^{\frac{(x-1)^7}{7!}}\cdot\left(2\cdot e^{622}\right)^{\frac{(x-1)^8}{8!}}$$



Queastion How find a precesion of a computation of this solution

Consider of this differential equation on the interval (1,5) $x := 1, 1.01 .. 5$

Given $\frac{d}{dx}y(x) = y(x) \cdot \ln(y(x) \cdot x)$ $y(1) = 2$ $y := \mathrm{Odesolve}(x, 5)$



Example $\quad p''y = x\cdot y \quad y(1) = 1 \quad p'y(1) = 1 \quad \left(y'' = \frac{y'^2}{y} + y\cdot \ln(x\cdot y)\right)$

Given $\quad \frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}{y(x)} - y(x)\cdot \ln(y(x)\cdot x) = 0 \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 0 \quad y := \mathrm{Odesolve}(x,2) \quad y(1.15) = 1.00054100217316$

Find solution of this equation useing the infinite product for $|x-1| < 0.5 \quad x := 0.1, 0.11 .. 2$

$$y = y(1)\cdot p'y(1)^{x-1}\cdot p''y(1)^{\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot p'''y(1)^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot p''''y(1)^{\frac{(x-1)^4}{4!}}\ \ldots\ldots \Rightarrow$$

$$y = 1\cdot 1^{x-1}\cdot 1^{\frac{(x-1)^2}{2!}}\cdot e^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^4}{4!}}\cdot e^{\frac{3(x-1)^5}{5!}}\cdot e^{\frac{-7\cdot(x-1)^6}{6!}}\cdot e^{\frac{27\cdot(x-1)^7}{7!}}\cdot e^{\frac{-127\cdot(x-1)^8}{8!}}\cdot\ldots\ldots$$

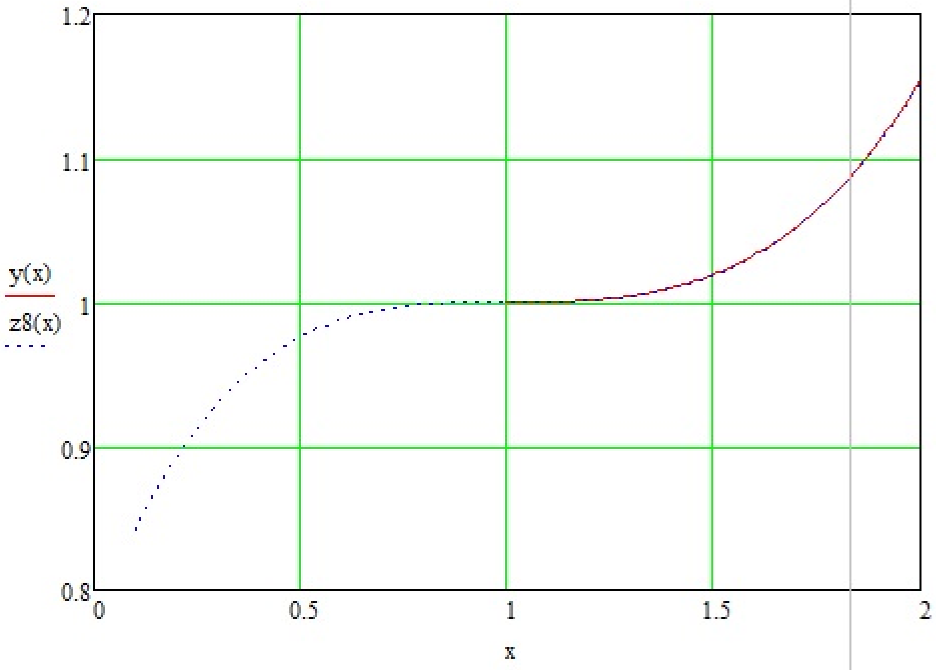
$$z4(x) := e^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^4}{4!}} \qquad z4(1.15) = 1.00054155283682$$

$$z5(x) := e^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^4}{4!}}\cdot e^{\frac{3(x-1)^5}{5!}} \qquad z5(1.15) = 1.00054345230422$$

$$z6(x) := e^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^4}{4!}}\cdot e^{\frac{3(x-1)^5}{5!}}\cdot e^{\frac{-7(x-1)^6}{6!}} \qquad z6(1.15) = 1.00054334150186$$

$$z7(x) := e^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^4}{4!}}\cdot e^{\frac{3(x-1)^5}{5!}}\cdot e^{\frac{-7(x-1)^6}{6!}}\cdot e^{\frac{27(x-1)^7}{7!}} \qquad z7(1.15) = 1.00054335066001$$

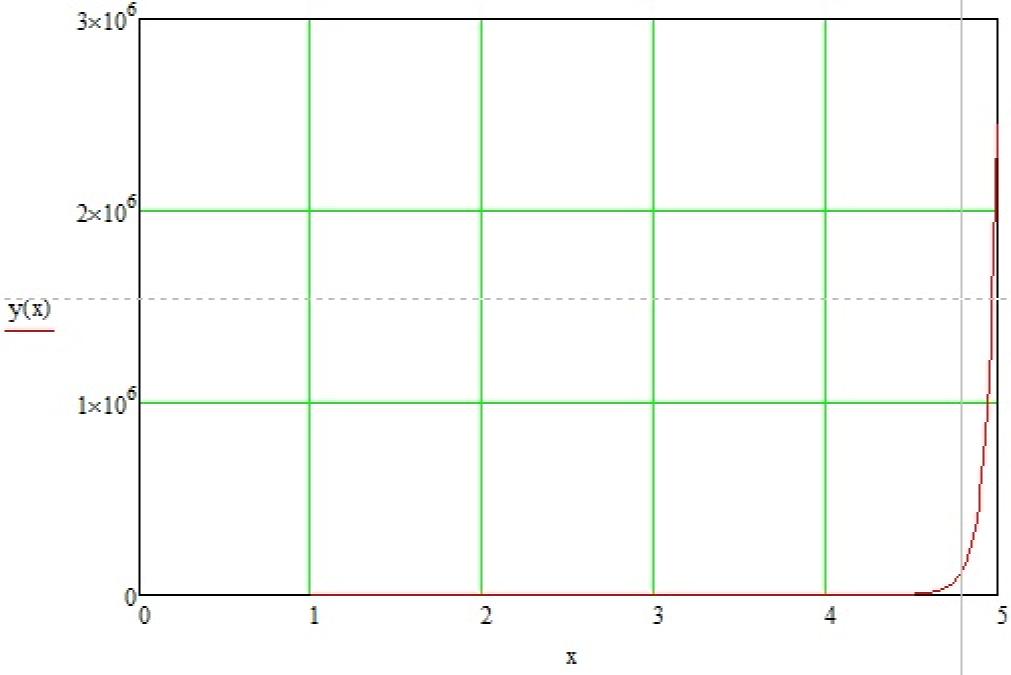
$$z8(x) := e^{\frac{(x-1)^3}{3!}}\cdot e^{\frac{-(x-1)^4}{4!}}\cdot e^{\frac{3(x-1)^5}{5!}}\cdot e^{\frac{-7(x-1)^6}{6!}}\cdot e^{\frac{27(x-1)^7}{7!}}\cdot e^{\frac{-127(x-1)^8}{8!}} \qquad z8(1.15) = 1.00054334985232$$



Queastion How find a precesion of a computation of this solution

Consider of this differential equation on the interval (1,5) $x := 1, 1.01 .. 5$

Given $\frac{d^2}{dx^2}y(x) - \frac{\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2}{y(x)} - y(x)\cdot\ln(y(x)\cdot x) = 0$ $y(1) = 1$ $y'(1) = 0$ $y := \text{Odesolve}(x, 5)$



Example Airy equation $y'' = y \cdot x \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 0 \quad |x - 1| < 0.5$

Given $\frac{d^2}{dx^2}y(x) = y(x) \cdot x \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 0 \quad y := \mathrm{Odesolve}(x, 2) \qquad y(1.15) = 1.01183641803891$

Usually solved of this equation with useing Taylor series $y5(x) := 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} \qquad y5(1.15) = 1.011836125$

Find a solution of this equation useing the infinite product

$$p'y(1)=e^{\frac{y'(1)}{y(1)}}=e^{0}=1 \quad y''=x\cdot y \quad y''(1)=1\cdot 1=1 \quad p''y=e^{\frac{y''\cdot y-y'^{2}}{y^{2}}} \quad p''y(1)=e^{\frac{1\cdot 1-0}{1}}=e$$

$$p'''y=p'(p''y)=p'\left(e^{\frac{y''\cdot y-y'^{2}}{y^{2}}}\right)=p'\left(e^{\frac{y^{2}\cdot x-y'^{2}}{y^{2}}}\right)=e^{\left(\frac{y^{2}\cdot x-y'^{2}}{y^{2}}\right)'}=e^{\frac{y^{3}-2\cdot y\cdot y'\cdot y''+2\cdot y'^{3}}{y^{3}}} \quad p'''y(1)=e^{\frac{1-0+0}{1}}=e$$

$$y'''=y'(y'')=y'(x\cdot y)=y+x\cdot y' \quad y'''(1)=1 \quad p'''y=p'(p''y)=p'\left(e^{\frac{y''\cdot y-y'^{2}}{y^{2}}}\right)=e^{\frac{y'''\cdot y^{2}-3\cdot y''\cdot y'\cdot y+y'^{3}}{y^{3}}} \quad p'''y(1)=e$$

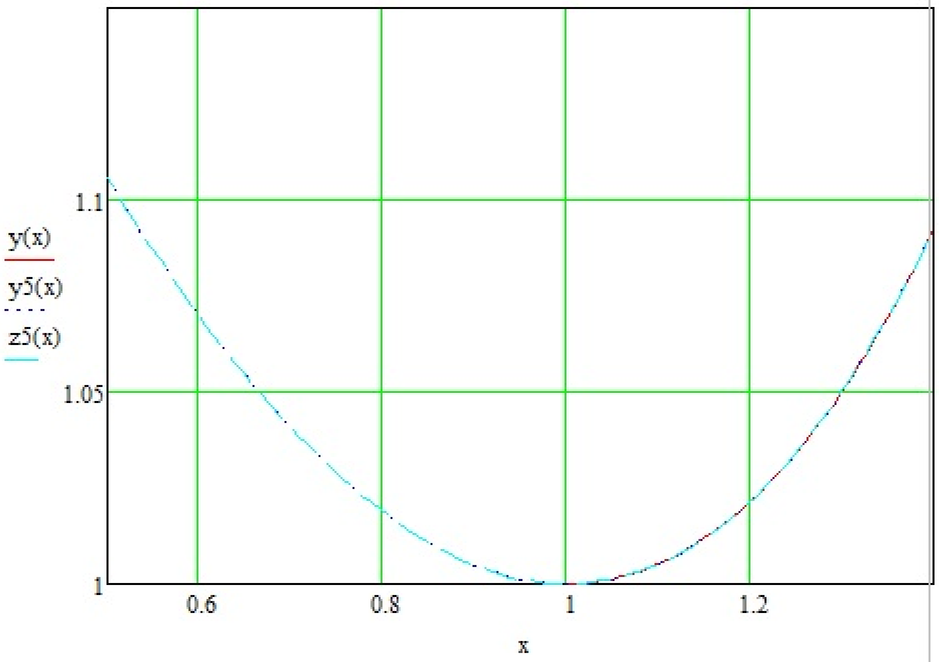
$$p^{(4)}y=p'(p''')=p'\left(e^{\frac{y^{3}-2\cdot y\cdot y'\cdot y''+2\cdot y'^{3}}{y^{3}}}\right)=e^{\left(\frac{y^{3}-2\cdot y\cdot y'\cdot y''+2\cdot y'^{3}}{y^{3}}\right)'}=e^{\frac{-6\cdot y'^{4}-2y^{2}\cdot y''+10y\cdot y'^{2}-2\cdot y^{2}\cdot y'\cdot y'''}{y^{4}}}$$

$$p^{(4)}y(1)=e^{\frac{0-2+0-0}{1}}=e^{-2} \quad \text{or} \quad y^{(4)}=y'(y''')=y'(y+x\cdot y')=2y'+x\cdot y'' \quad y^{(4)}(1)=1$$

$$p^{(4)} \cdot y = p'(p'''y) = p'\left(e^{\frac{y''' \cdot y^2 - 3 \cdot y'' \cdot y + y^3}{y^3}}\right) = e^{\frac{y^{(4)} \cdot y^3 - 4 \cdot y''' \cdot y' \cdot y^2 - 3 \cdot y''' \cdot y'' \cdot y^2 - 3 \cdot y''' \cdot y'^2 \cdot y + 15 \cdot y'' \cdot y'^2 \cdot y - 6y^4}{y^4}} \qquad p^{(4)}y(1) = e^{-2} \qquad y^{(5)}(1) = 4 \qquad p^{(5)}y(1) = -6$$

Then obtain $z5(x) = 1 \cdot 1^{\frac{x-1}{1}} \cdot e^{\frac{(x-1)^2}{2!}} \cdot e^{\frac{(x-1)^3}{3!}} \cdot e^{\frac{-2 \cdot (x-1)^4}{4!}} \cdot e^{\frac{-6(x-1)^5}{5!}} \cdot .....$ $\qquad z5(x) := e^{\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{2 \cdot (x-1)^4}{4!} - \frac{6 \cdot (x-1)^5}{5!}}$

$z5(1.15) = 1.01183601338465 \qquad x := 0.1, 0.11 .. 1.4$



Example Bessel equation $x^2 \frac{d^2}{dx^2}y(x) + x \cdot \frac{d}{dx}y(x) + \left(x^2 - n^2\right)y(x) = 0$

This equation have the general solution $y(x) = C_1 \cdot J_n(x) + C_2 \cdot J_{-n}(x)$

Given $x^2 \frac{d^2}{dx^2}y(x) + x \cdot \frac{d}{dx}y(x) + \left(x^2 - 1\right)y(x) = 0$ $\quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 1$ $\quad y := \text{Odesolve}(x, 2)$

$y(1.245) = 1.21477080767641$

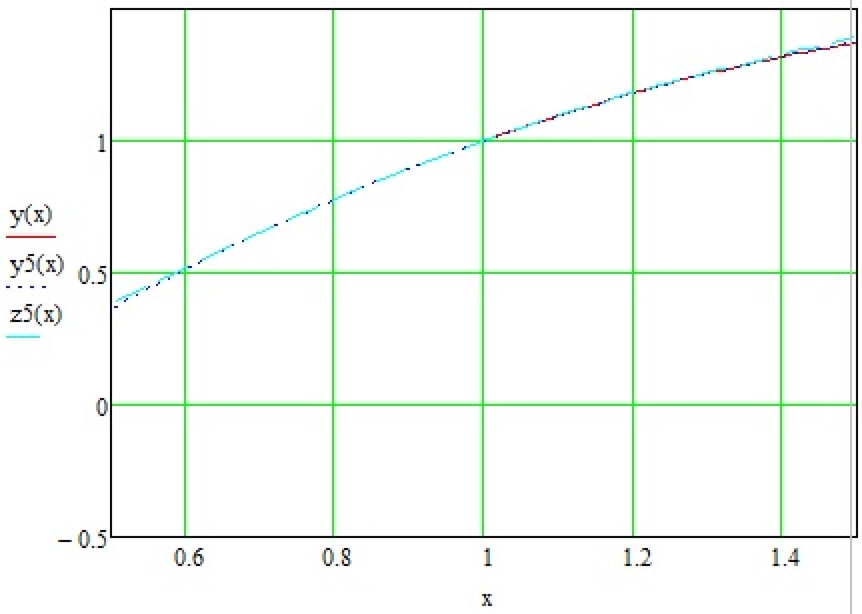
Usually solved of this equation with useing Taylor series

$x := 0.1, 0.11 .. 1.5$

$$y5(x) := 1 + x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{7\cdot(x-1)^5}{60} \qquad y5(1.245) = 1.21479023571578$$

Find by analogy solution of this equation useing the infinite product

$$z5(x) := e^{x-1-(x-1)^2+\frac{5(x-1)^3}{3!}-\frac{23(x-1)^4}{4!}+\frac{147(x-1)^5}{5!}} \qquad z5(1.245) = 1.2151391283055$$



Example Kummer equation $x \cdot y'' + (1-x) \cdot y' - 2y = 0$ $y(1) = 1$ $y'(1) = 1$ $|x-1| < 0.5$

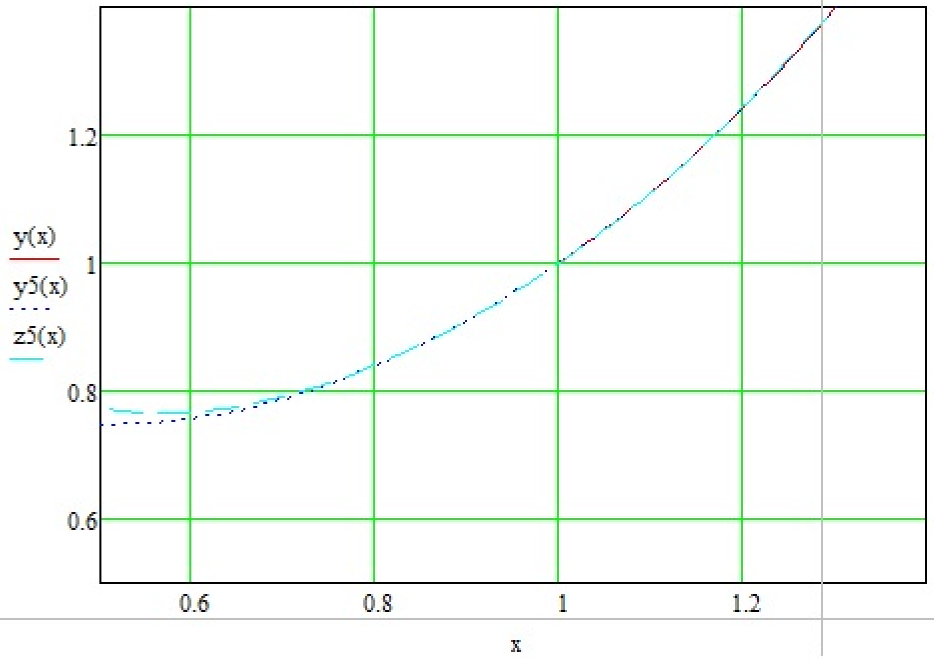
Given $x \cdot \frac{d^2}{dx^2} y(x) + (1-x) \cdot \frac{d}{dx} y(x) - 2\,y(x) = 0$ $y(1) = 1$ $y'(1) = 1$ $y := \mathrm{Odesolve}(x, 2)$ $y(1.15) = 1.17318332623777$

Usually solved of this equation with useing Taylor series $y5(x) := 1 + x - 1 + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{4} - \frac{14\cdot(x-1)^5}{120}$ $y5(1.15) = 1.173180203125$

Find a solution of this equation useing the infinite product

Then obtain $z5(x) := e^{x-1+\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{3\cdot(x-1)^3}{3!}+\frac{17(x-1)^4}{4!}-\frac{46(x-1)^5}{5!}}$ $z5(1.15) = 1.17338412032729$

$x := 0.1, 0.11 .. 1.5$



y(x)
y5(x)
z5(x)
1.2
1
0.8
0.6
0.6
0.8
1
1.2
x