Пример . Интегро дифференциальное уравнение $L'y(x) = x^2 \cdot L\int_1^e t^2 y(t)\,dt$, $y(1) = e^{-7}$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $\frac{y'}{y} = xe^{\int_1^e ty(t)dt}$.

Пусть $\gamma = L\int_1^e t^2 y(t)\,dt$, откуда $\frac{xy'}{y} = \gamma x^2$, $\frac{y'}{y} = \gamma x$, решение этого уравнения $y = e^{\frac{\gamma}{2}x^2}c$, используя начальное условие получим $c = e^{-\frac{\gamma}{2}-7}$, значит $y = e^{\frac{\gamma}{2}(x^2-1)-7}$.

Делаем подстановку $\gamma = L\int_1^e t^2 e^{\frac{\gamma}{2}(t^2-1)-7}dt = e^{\int_1^e te^{\frac{\gamma}{2}(t^2-1)-7}dt} = e^{\frac{e^{\frac{\gamma}{2}(e^2-1)}-1}{\gamma}e^{-7}}$. Решение этого уравнения $y = e^{\frac{\gamma}{2}(x^2-1)}$, где γ удовлетворяет алгебраическому уравнению $\gamma = e^{\frac{e^{\frac{\gamma}{2}(e^2-1)}-1}{\gamma}}$, $\gamma \approx 0.025$.

Другое решение . $L'y = \gamma x^2$. Найдем L интеграл от двух частей уравнения $L\int L'y(x)\,dx = L\int \gamma x^2 dx$, итак $y = e^{\frac{\gamma}{2}x^2}c$, дальше решаем аналогично .

Пример . Интегро дифференциальное уравнение $L''y(x) = \frac{1}{\ln x} + L\int_1^e \ln t \cdot y(t)dt$, $y(e) = 1$, $y'(e) = 1$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению

$1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y} = \frac{1}{\ln x} + e^{\int_1^e \frac{\ln t \cdot y(t)}{t}dt}$. Пусть $\gamma = L\int_1^e \ln t \cdot y(t)dt$, это дает $L''y(x) = \frac{1}{\ln x} + \gamma$. Найдем L интеграл от двух частей уравнения $L\int L''y(x)\,dx = L\int\left(\frac{1}{\ln x} + \gamma\right)dx$, тогда

$L'y = \ln x \cdot x^\gamma \cdot c$. Найдем L интеграл от двух частей уравнения $L\int L'y(x)\,dx = L\int (x \cdot x^\gamma \cdot c)dx$, тогда $y(x) = e^{c_1 + c\frac{x^\gamma(\ln x^\gamma - 1)}{\gamma^2}}$. Это дает $y' = ce^{c_1 + c\frac{x^\gamma(\ln x^\gamma - 1)}{\gamma^2}}\ln x$, используя начальные

условия получим $c = 1$, $c_1 = 1 - \frac{e^\gamma(\gamma - 1)}{\gamma^2}$, тогда $y = e^{\frac{x^\gamma(\ln x^\gamma - 1) - e^\gamma(\gamma - 1)}{\gamma^2}+1}$. Делаем подстановку $\gamma = L\int_1^e \ln t\, e^{\frac{t^\gamma(\ln t^\gamma - 1) - e^\gamma(\gamma - 1)}{\gamma^2}+1}dt = e^{\int_1^e e^{\frac{t^\gamma(\ln t^\gamma - 1) - e^\gamma(\gamma - 1)}{\gamma^2}+1}\frac{\ln t}{t}dt}$. Выводим что

решение этого уравнения $y = e^{\frac{x^\gamma(\ln x^\gamma - 1) - e^\gamma(\gamma - 1)}{\gamma^2}+1}$, где γ удовлетворяет алгебраическому уравнению $\gamma = e^{\int_1^e e^{\frac{t^\gamma(\ln t^\gamma - 1) - e^\gamma(\gamma - 1)}{\gamma^2}+1}\frac{\ln t}{t}dt}$, которое можно решить численно .

Другое решение . $1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y} = \frac{1}{\ln x} + e^{\int_1^e \frac{\ln t \cdot y(t)}{t}dt}$, пусть $\gamma = e^{\int_1^e \frac{\ln t \cdot y(t)}{t}dt}$, $x = e^z$, $z = \ln x$.Поэтому $\frac{y_{zz}''}{y_z'} - \frac{y_z'}{y} = \frac{1}{z} + \gamma$, значит $\left(\ln y_z' - \ln y\right)_z' = \frac{1}{z} + \gamma$. Это дает

$\ln\frac{y_z'}{y} = \ln z + z\gamma + c$, $\frac{y_z'}{y} = e^{\gamma z}zc$, решение этого уравнения $y(z) = e^{c_1 + c\frac{e^{\gamma z}(z\gamma - 1)}{\gamma^2}}$, тогда $y(x) = e^{c_1 + c\frac{x^\gamma(\ln x^\gamma - 1)}{\gamma^2}}$, дальше решаем аналогично .

Пример . $L\int_a^x \left(x^2 t - t^2 x\right) y(t)\,dt = f(x)$, $f(a) = f'(a) = 0$, поэтому $L\int_a^x x\left(xt - t^2\right) y(t)\,dt = \left(L\int_a^x \left(xt - t^2\right) y(t)\,dt\right)^x = f(x)$, тогда $L\int_a^x \left(xt - t^2\right) y(t)\,dt = \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$, $e^{\int_a^x \frac{\left(xt - t^2\right) y(t)}{t} dt} = \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$,

$\int_a^x \frac{\left(xt - t^2\right) y(t)}{t} dt = \frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}$, дифференцируем по переменной x , получим $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x \frac{\left(xt - t^2\right) y(t)}{t} dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$, отсюда $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x xy(t)dt\right) - \frac{d}{dx}\left(\int_a^x ty(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$,

$\frac{d}{dx}\left(x\int_a^x y(t)\,dt\right) - xy(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$, $\left((uv)' = u'v + v'u \text{ , } u = x \text{ , } v = \int_a^x y(t)dt\right)$, $1 \cdot \int_a^x y(t)dt + \frac{d}{dx}\left(\int_a^x y(t)\,dt\right) \cdot x - xy(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$,

$\int_a^x y(t)\,dt + xy(t) - xy(t) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$, $\int_a^x y(t)dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$, опять дифференцируем по переменной x , найдем $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x y(t)\,dt\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$,

$y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$, откуда $y(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}\right)$. Пусть $f(x) = x^n$, это дает $y(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3} n$.

Пример . $y(x) = \mu f(x) L\int_a^x (x - t)\, y(t)dt$. Найдем L производную по переменной x , получим $L'y(x) = L'f(x) + L'\left(L\int_a^x (x - t)\, y(t)\,dt\right)$, $L'\left(L\int_a^x (x - t)\, y(t)\,dt\right) = \frac{x\left(L\int_a^x (x - t)\, y(t)\,dt\right)_x'}{L\int_a^x (x - t)\, y(t)\,dt} =$

$= \frac{x\left(e^{\int_a^x \frac{(x-t)y(t)}{t} dt}\right)_x'}{e^{\int_a^x \frac{(x-t)y(t)}{t} dt}} = \frac{xe^{\int_a^x \frac{(x-t)y(t)}{t} dt}\left(\int_a^x \frac{(x - t)\, y(t)}{t} dt\right)_x'}{e^{\int_a^x \frac{(x-t)y(t)}{t} dt}} = x\left(\left(\int_a^x \frac{xy(t)}{t} dt\right)_x' - \left(\int_a^x y(t)\,dt\right)_x'\right) = x\left(\left(x\int_a^x \frac{y(t)}{t} dt\right)_x' - y(x)\right)$, $\left((uv)' = u'v + v'u \text{ , } u = x \text{ , } v = \int_a^x \frac{y(t)}{t} dt\right)$, поэтому

$L'\left(L\int_a^x (x - t)\, y(t)\,dt\right) = x\left(1 \cdot \int_a^x \frac{y(t)}{t} dt + x\left(\int_a^x \frac{y(t)}{t} dt\right)_x' - y(x)\right) = x\left(\int_a^x \frac{y(t)}{t} dt + x\frac{y(x)}{x} - y(x)\right) = x\int_a^x \frac{y(t)}{t} dt$, тогда $L'y(x) = L'f(x) + x\int_a^x \frac{y(t)}{t} dt$, $x\frac{y'(x)}{y(x)} = x\frac{f'(x)}{f(x)} + x\int_a^x \frac{y(t)}{t} dt$,

$\frac{y'(x)}{y(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt$. Дифференцируем по переменной x , получим $\frac{y''(x)y(x)-(y'(x))^2}{y^2(x)}=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}+\left(\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt\right)'_x$,

$\frac{y''(x)y(x)-(y'(x))^2}{y^2(x)}=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}+\frac{y(x)}{x}$. Пусть $f(x)=x^2$, отсюда $\frac{y''(x)y(x)-(y'(x))^2}{y^2(x)}=-\frac{2}{x^2}+\frac{y(x)}{x}$, это уравнение можно решить численным методом .

Другое решение . $y(x)=\mu f(x)L\int_a^x (x-t)y(t)dt$, откуда $y(x)=\mu f(x)\frac{L\int_a^x xy(t)dt}{L\int_a^x ty(t)dt}$, найдем L производную по переменной x , получим $L'y(x)=L'f(x)+L'\left(\frac{L\int_a^x xy(t)dt}{L\int_a^x ty(t)dt}\right)=$

$=L'f(x)+L'\left(L\int_a^x xy(t)dt\right)-L'\left(L\int_a^x ty(t)dt\right)=L'f(x)+L'\left(L\int_a^x xy(t)dt\right)-xy(x)$. Найдем $L'\left(L\int_a^x xy(t)dt\right)=L'\left(e^{\int_a^x \frac{xy(t)}{t}dt}\right)=\frac{x\left(e^{\int_a^x \frac{xy(t)}{t}dt}\right)'_x}{e^{\int_a^x \frac{xy(t)}{t}dt}}=\frac{xe^{\int_a^x \frac{xy(t)}{t}dt}\left(\int_a^x \frac{xy(t)}{t}dt\right)'_x}{e^{\int_a^x \frac{xy(t)}{t}dt}}=x\left(\int_a^x \frac{xy(t)}{t}dt\right)'_x=$

$=x\left(x\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt\right)'_x$, $\left((uv)'=u'v+v'u\ ,\ u=x\ ,\ v=\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt\right)$, значит $L'\left(L\int_a^x xy(t)dt\right)=x\left(1\cdot\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt+x\left(\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt\right)'_x\right)=x\left(\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt+x\frac{y(x)}{x}\right)=x\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt+xy(x)$,

это дает $L'y(x)=L'f(x)+x\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt+xy(x)-y(x)x=L'f(x)+x\int_a^x \frac{y(t)}{t}dt$, дальше решаем аналогично .

Пример . $y(x)=\lambda e^{\mu x}L\int_a^x t^2y(t)e^{\mu t}dt$. Найдем L производную по переменной x , получим $L'y(x)=L'\left(\lambda e^{\mu x}L\int_a^x t^2y(t)e^{\mu t}dt\right)=L'e^{\mu x}+L'\left(L\int_a^x t^2y(t)e^{\mu t}dt\right)=\mu x+x^2y(x)e^{\mu x}$, поэтому

$\frac{xy'(x)}{y(x)}=\mu x+x^2y(x)e^{\mu x}$, $y'(x)=\mu y(x)+x(y(x))^2e^{\mu x}$. Это уравнение имеет решения когда

$\mu = 0$, $y(x) = \dfrac{2}{c - x^2}$, когда $\mu < 0$, $y(x) = \dfrac{4\mu^2 e^{-\mu x}}{4c\mu^2 + e^{-2\mu x} + 2\mu x e^{-2\mu x}}$, когда $\mu > 0$, $y(x) = \dfrac{4\mu^2 e^{\mu x}}{4c\mu^2 + e^{2\mu x} - 2\mu x e^{2\mu x}}$.

Пример . $L\int_x^{2x} \dfrac{y(t)}{t + x} dt = f(x)$. Пусть $t = x\lambda$, где λ новая переменная , поскольку $x \le x\lambda \le 2x$, тогда $1 \le \lambda \le 2$, получим уравнение $L\int_1^2 \dfrac{y(x\lambda)}{x + x\lambda} d(x\lambda) = f(x)$, $e^{\int_1^2 \frac{\frac{y(x\lambda)}{x(1+\lambda)} x d\lambda}{\lambda}} = f(x)$, $\int_1^2 \dfrac{y(x\lambda)}{\lambda(\lambda + 1)} d\lambda = \ln f(x)$. Let $f(x) = e^{Px^n}$, отсюда $\int_1^2 \dfrac{y(x\lambda)}{\lambda(\lambda + 1)} d\lambda = Px^n$. Решение уравнения найдем в виде $y(x) = Rx^n$, откуда $\int_1^2 \dfrac{Rx^n \lambda^n}{\lambda(\lambda + 1)} d\lambda = Px^n$, значит $Rx^n \int_1^2 \dfrac{\lambda^{n-1}}{\lambda + 1} d\lambda = Px^n$, это дает $R = \dfrac{P}{\int_1^2 \dfrac{\lambda^{n-1}}{\lambda + 1} d\lambda}$.

Пример . $L_{tx}''u(x,t)=u(x,t)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $x\left(\frac{u_{tx}''}{u_t'}-\frac{u_x'}{u}\right)=u$.

Пусть $u(x,t)=e^{w(x,t)}$, поэтому $u_t'=e^w w_t'$, $u_x'=e^w w_x'$, $u_{tx}''=\left(e^w w_x'\right)_t'=e^w w_t' w_x'+e^w w_{xy}''=e^w\left(w_t' w_x'+w_{xt}''\right)$, отсюда $x\left(\frac{e^w\left(w_t' w_x'+w_{xt}''\right)}{e^w w_t'}-\frac{e^w w_x'}{e^w}\right)=e^w$, откуда $x\frac{w_{xt}''}{w_t'}=e^w$.

Пусть $x=e^\eta$, $\eta=\ln x$, $\xi=\ln t$, $t=e^\xi$, значит $w_x'=w_\eta'\eta_x'=w_\eta'\frac{1}{x}=\frac{w_\eta'}{e^\eta}$, $w_t'=w_\xi'\xi_t'=w_\xi'\frac{1}{t}=\frac{w_\xi'}{e^\xi}$, $w_{xt}''=\left(w_x'\right)_t'=\left(\frac{w_\eta'}{e^\eta}\right)_t'=\frac{\left(w_\eta'\right)_t' e^\eta-w_\eta'\left(e^\eta\right)_t'}{e^{2\eta}}=\frac{w_{\eta\xi}''\xi_y' e^\eta-0}{e^{2\eta}}=\frac{w_{\eta\xi}''\frac{1}{y}}{e^\eta}=\frac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi}$.

Получим уравнение $e^\eta\frac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi}\frac{e^\xi}{w_\xi'}=e^w$, $w_{\eta\xi}''=w_\xi' e^w$. Пусть $v(\eta,\xi)=e^{w(\eta,\xi)}$, тогда $w(\eta,\xi)=\ln v(\eta,\xi)$, тогда $w_\xi'=\frac{v_\xi'}{v}$, $w_\eta'=\frac{v_\eta'}{v}$, $w_{\eta\xi}''=\frac{v_{\eta\xi}''v-v_\xi' v_\eta'}{v^2}$, найдем уравнение

$\frac{v_{\eta\xi}''v-v_\xi' v_\eta'}{v^2}=\frac{v_\xi'}{v}v$, $-v_\xi' v_\eta'+v_{\eta\xi}''v=v^2 v_\xi'$. Найдем волновое решение данного уравнения . Пусть $v(\eta,\xi)=f(\mu)$, где $\mu=\xi-\lambda\eta$, это дает

$v_\xi'=f_\mu'\mu_\xi'=f_\mu'$, $v_\eta'=f_\mu'\mu_\eta'=-\lambda f_\mu'$, $v_{\eta\xi}''=\left(v_\eta'\right)_\xi'=\left(-\lambda f_\mu'\right)_\xi'=-\lambda f_{\mu\mu}''\mu_\xi'=-\lambda f_{\mu\mu}''$. Подставим эти выражения в уравнение , тогда $f_{\mu\mu}''f-\left(f_\mu'\right)^2=-\frac{f_\mu' f^2}{\lambda}$.

Решение этого дифференциального уравнения $f(\mu)=\frac{\lambda c_1 c e^{c\mu}}{c_1 e^{c\mu}-1}$, тогда $v(\eta,\xi)=\frac{\lambda c_1 c e^{c(\xi-\lambda\eta)}}{c_1 e^{c(\xi-\lambda\eta)}-1}$, $w(\eta,\xi)=\ln\frac{\lambda c_1 c e^{c(\xi-\lambda\eta)}}{c_1 e^{c(\xi-\lambda\eta)}-1}$,

поэтому $w(x,y)=\ln\frac{\lambda c_1 c e^{c(\ln t-\lambda\ln x)}}{c_1 e^{c(\ln t-\lambda\ln x)}-1}=\ln\frac{\lambda c_1\left(\frac{t}{x^\lambda}\right)^c}{c_1\left(\frac{t}{x^\lambda}\right)^c-1}$, отсюда $u(x,y)=e^{\ln\frac{\lambda c_1\left(\frac{t}{x^\lambda}\right)^c}{c_1\left(\frac{t}{x^\lambda}\right)^c-1}}=\frac{\lambda c_1\left(\frac{t}{x^\lambda}\right)^c}{c_1\left(\frac{t}{x^\lambda}\right)^c-1}$.

Пример . $L_{tx}''u(x,t)+\gamma L_t' u(x,t)=u(x,t)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $x\left(\frac{u_{tx}''}{u_t'}-\frac{u_x'}{u}\right)+\gamma\frac{tu_t'}{u}=u$.

Аналогично получим уравнение $f_{\mu\mu}''f-\left(f_\mu'\right)^2\left(\frac{\gamma}{\lambda}+1\right)=-\frac{f_\mu' f^2}{\lambda}$. Это уравнение можно решить аналитически только при некоторых значениях параметров γ , λ .

Пример . Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} L'x(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ L'y(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{tx'(t)}{x(t)} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \dfrac{ty'(t)}{y(t)} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$.

Пусть $x(t) = f_1(g(t)) = f_1(\ln t)$, $y(t) = f_2(g(t)) = f_2(\ln t)$, тогда $x'(t) = f_1'(g)g'(t) = \dfrac{f_1'(g)}{t}$, $y'(t) = f_2'(g)g'(t) = \dfrac{f_2'(g)}{t}$, $\begin{cases} \dfrac{f_1'(g)}{f_1(g)} = a_{11}f_1(g) + a_{12}f_2(g) \\ \dfrac{f_2'(g)}{f_2(g)} = a_{21}f_1(g) + a_{22}f_2(g) \end{cases}$.

Пусть $\begin{cases} \dfrac{f_1'(g)}{f_1(g)} = f_1(g) + f_2(g) \\ \dfrac{f_2'(g)}{f_2(g)} = -f_2(g) + f_1(g) \end{cases}$, $\begin{cases} f_1'(g) = (f_1(g))^2 + f_1(g)f_2(g) \\ f_2'(g) = -(f_2(g))^2 + f_1(g)f_2(g) \end{cases}$, откуда $f_2'(g) + (f_2(g))^2 - f_1(g)f_2(g) = 0$, решение этого уравнения найдем в виде $f_2(g) = u(g)v(g)$,

откуда $u'v + v'u + u^2v^2 - f_1uv = 0$, $u(v' - f_1v) + vu' + u^2v^2 = 0$, $v' - f_1v = 0$, $\dfrac{dv}{dg} = f_1v$, $\dfrac{dv}{v} = f_1dg$, $\ln v(g) = \int f_1(g)dg$, $v(g) = e^{\int f_1(g)dg}$, тогда $u' + u^2e^{\int f_1(g)dg} = 0$,

$\dfrac{du}{dg} = -u^2e^{\int f_1(g)dg}$, $\dfrac{du}{u^2} = -e^{\int f_1(g)dg}dg$, $u(g) = \dfrac{1}{\int_a^g e^{\int_a^\xi f_1(\eta)d\eta}d\xi + c}$, $f_2(g) = \dfrac{e^{\int_a^g f_1(\xi)d\xi}}{\int_a^g e^{\int_a^\xi f_1(\eta)d\eta}d\xi + c}$, $x(e^a) = x_0$, $y(e^a) = y_0$, тогда $y(e^a) = f_2(\ln e^a) = f_2(a) = y_0$, $x(e^a) = f_1(\ln e^a) = f_1(a) = x_0$,

$y_0 = \dfrac{1}{c}$, $c = \dfrac{1}{y_0}$, значит $f_2(g) = \dfrac{y_0e^{\int_a^g f_1(\xi)d\xi}}{y_0\int_a^g e^{\int_a^\xi f_1(\eta)d\eta}d\xi + 1}$.Подставим это выражение в первое уравнение системы $f_1'(g) = f_1(g)^2 + f_1(g)\dfrac{y_0e^{\int_a^g f_1(\xi)d\xi}}{y_0\int_a^g e^{\int_a^\xi f_1(\eta)d\eta}d\xi + 1}$,

это интегро дифференциальное уравнение

Пример . $y(x)=1+\rho L\int_1^e y^2(t)\,dt$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $y(x)=1+\rho e^{\int_1^e \frac{y^2(t)}{t}dt}$. Правая часть уравнения не зависит от переменной x , это дает что функция $y(x)$ постоянная . Пусть $y(x)=a$, отсюда $a=1+\rho e^{\int_1^e \frac{a^2}{t}dt}$, $a=1+\rho e^{a^2}$, если $-0.0554<\rho<0.0054$ то уравнение имеет два действительных решения .

Пример . $y(x)=1+\rho L\int_1^e R\big(y(t)\big)\,dt$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $y(x)=1+\rho e^{\int_1^e \frac{R(y(t))}{t}dt}$. Правая часть этого уравнения не зависит от переменной x , откуда функция $y(x)$ постоянная . Пусть $y(x)=a$, значит $a=1+\rho e^{\int_1^e \frac{R(a)}{t}dt}=1+\rho e^{R(a)\int_1^e \frac{dt}{t}}$, $a=1+\rho e^{R(a)}$. Пусть $R\big(y(t)\big)=\ln y(t)$, это дает $a=1+\rho e^{\ln a}$, $a=1+\rho a$, $a=\frac{1}{1-\rho}$.

Пример . $\begin{cases} u(x)=\sin x\cdot L\int_0^{\frac{\pi}{4}}\big(xu(t)+v(t)x\big)\,dt \\ 2v(x)=\cos x\cdot L\int_0^{\frac{\pi}{4}}\big(u(t)-v(t)\big)\,dt \end{cases}$, эта система эквивалентна следущей системе $\begin{cases} u(x)=\sin x\cdot e^{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xu(t)+v(t)x}{t}dt} \\ 2v(x)=\cos x\cdot e^{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{u(t)-v(t)}{t}dt} \end{cases}$. Это дает $\begin{cases} u(x)=\sin x\cdot\left(L\int_0^{\frac{\pi}{4}}u(t)\,dt\right)^x\cdot\left(L\int_0^{\frac{\pi}{4}}v(t)\,dt\right)^x \\ 2v(x)=\cos x\cdot\dfrac{L\int_0^{\frac{\pi}{4}}u(t)\,dt}{L\int_0^{\frac{\pi}{4}}v(t)\,dt} \end{cases}$.

Пусть $\delta=\left(L\int_0^{\frac{\pi}{4}}u(t)\,dt\right)\cdot\left(L\int_0^{\frac{\pi}{4}}v(t)\,dt\right)$, $\gamma=\dfrac{L\int_0^{\frac{\pi}{4}}u(t)\,dt}{L\int_0^{\frac{\pi}{4}}v(t)\,dt}$, поэтому $\begin{cases} u(x)=\delta^x\sin x \\ 2v(x)=\gamma\cos x \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} \delta^x\sin x=\sin x\cdot L\int_0^{\frac{\pi}{4}}\big(x\delta^t\sin t+x\gamma\cos t\big)\,dt \\ 2\gamma\cos x=\cos x\cdot L\int_0^{\frac{\pi}{4}}\big(\delta^t\sin t-\gamma\cos t\big)\,dt \end{cases}$, откуда

$\begin{cases} \delta^x=e^{x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\delta^t\sin t+\gamma\cos t\right)dt} \\ 2\gamma=e^{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\delta^t\sin t-\gamma\cos t\right)dt} \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \delta=e^{\frac{\delta^{\frac{\pi}{4}}(\ln\delta-1)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left((\ln\delta)^2+1\right)}+\frac{\delta}{\sqrt{2}}} \\ 2\gamma=e^{\frac{\delta^{\frac{\pi}{4}}(\ln\delta-1)+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left((\ln\delta)^2+1\right)}-\frac{\delta}{\sqrt{2}}} \end{cases}$, эту алгебраическую систему можно решить численно $\begin{cases} \delta\approx 41.7 \\ \gamma\approx 1.72 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} u(x)=41.7^x\sin x \\ v(x)=\frac{1.72}{2}\cos x \end{cases}$.

L производная дробного порядка .

L производной дробного порядка $0<\delta\le 1$ от функции $f(x)$ в точке x_0 назовем выражение $L^{(\delta)}f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln f\left(x_0+x_0^{1-\delta}\Delta x\right)-\ln f(x_0)}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}$. Пусть $\varepsilon=x_0^{1-\delta}\Delta x$, значит

$\Delta x=x_0^{\delta-1}\varepsilon$, тогда $L^{(\delta)}f(x_0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\ln f(x_0+\varepsilon)-\ln f(x_0)}{\ln\left(1+\dfrac{x_0^{\delta-1}\varepsilon}{x_0}\right)}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\ln f(x_0+\varepsilon)-\ln f(x_0)}{\varepsilon}\cdot\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\varepsilon}{\ln\left(1+x_0^{\delta-2}\varepsilon\right)}=\left(\ln f(x_0)\right)'\cdot\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\varepsilon}{x_0^{\delta-2}\varepsilon}=\dfrac{x_0^{2-\delta}f'(x_0)}{f(x_0)}$, поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(1+\varepsilon)=\varepsilon$.

Пусть $\delta=1$, тогда $L^{(1)}f(x)=L'f(x)$. Для L производной дробного порядка сохраняются свойства L производной первого порядка , например $L^{(\delta)}c=0$, $L^{(\delta)}cf(x)=L^{(\delta)}f(x)$, $L^{(\delta)}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=L^{(\delta)}g(x)+L^{(\delta)}f(x)$, $L^{(\delta)}f\left(g(x)\right)=L^{(\delta)}g(x)\cdot L'f(x)$.

Найдем $L^{(\delta)}\left(L^{(\rho)}f(x)\right)=L^{(\delta)}\left(\dfrac{x^{2-\rho}f'(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{\dfrac{x^{2-\delta}\left[\left((2-\rho)x^{1-\rho}f'(x)+f''(x)x^{2-\rho}\right)f(x)-x^{2-\rho}\left(f'(x)\right)^2\right]}{f^2(x)}}{\dfrac{x^{2-\rho}f'(x)}{f(x)}}=x^{1-\delta}\left[(2-\rho)+x\dfrac{f''(x)}{f'(x)}-\dfrac{f'(x)}{f(x)}x\right]$, аналогично

$L^{(\rho)}\left(L^{(\delta)}f(x)\right)=x^{1-\rho}\left[(2-\delta)+x\dfrac{f''(x)}{f'(x)}-\dfrac{f'(x)}{f(x)}x\right]$, то есть $L^{(\rho)}\left(L^{(\delta)}f(x)\right)\ne L^{(\delta)}\left(L^{(\rho)}f(x)\right)\ne L^{(\delta+\rho)}f(x)$, поскольку $L^{(\delta+\rho)}f(x)=\dfrac{x^{1-(\rho+\delta)}f'(x)}{f(x)}$. Значит чтобы найти L производную дробного порядка $(\rho+\delta)$ нельзя использовать комбинацию производных $L^{(\delta)}$, $L^{(\rho)}$, нужно смотреть на $L^{(\delta+\rho)}f(x)=\dfrac{x^{1-(\rho+\delta)}f'(x)}{f(x)}$ в виде отдельного объекта .

Пусть $\delta=1$, $\rho=1$, so $L^{(\delta)}\left(L^{(\rho)}f(x)\right)=L^{(\rho)}\left(L^{(\delta)}f(x)\right)=L''f(x)=1+x\dfrac{f''(x)}{f'(x)}-\dfrac{f'(x)}{f(x)}x$.

Это определение L производной дробного порядка существенно отличается от определения Римана Лиувилля , Капуто , где используется гамма функция .

Пример . $L^{(\delta)}c=\dfrac{x^{2-\delta}0}{c}=0$.

Пример . $L^{(\delta)}x^n=\dfrac{x^{2-\delta}nx^{n-1}}{x^n}=nx^{1-\delta}$.

Пример . $L^{(\delta)}e^{nx}=\dfrac{x^{2-\delta}ne^{nx}}{e^{nx}}=nx^{2-\delta}$.

Пример . $L^{(\delta)}a^{nx}=\dfrac{x^{2-\delta}na^{nx}\ln a}{a^{nx}}=nx^{2-\delta}\ln a$.

Пример . $L^{(\delta)} \ln x = \dfrac{x^{2-\delta} \dfrac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{x^{1-\delta}}{\ln x}$.

Пример . $L^{(\delta)} \cos x = \dfrac{x^{2-\delta} \sin x}{\cos x} = x^{2-\delta} \tan x$.

Пример . $L^{(\delta)} \tan x = \dfrac{x^{2-\delta} \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} = \dfrac{2x^{2-\delta}}{\sin 2x}$.

Пример . $L^{(\delta)} \tanh x = \dfrac{2x^{2-\delta}}{\sinh 2x}$.

Пример . $L^{(\delta)} \sinh x = x^{2-\delta} \cosh x$.

Пример . $L^{(\delta)} \arcsin x = \dfrac{x^{2-\delta}}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$.

L производной дробного порядка $1 < \delta \le 2$ от функции $f(x)$ в точке x_0 назовем выражение $L^{(\delta)} f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln\left(L^{(1)} f\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right)\right) - \ln\left(L^{(1)} f(x_0)\right)}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \dfrac{\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right) f'\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right)}{f\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right)} - \ln \dfrac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right) + \ln f'\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right) - \ln f\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right) - \ln x_0 - \ln f'(x_0) + \ln f(x_0)}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)} =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x_0^{1-\delta}\Delta x\right)}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln f'\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right) - \ln f'(x_0)}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln f\left(x_0 + x_0^{2-\delta}\Delta x\right) - \ln f(x_0)}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}$. Пусть $\varepsilon = x_0^{2-\delta}\Delta x$, это дает $\Delta x = x_0^{\delta-2}\varepsilon$, тогда

$L^{(\delta)} f(x_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x_0^{1-\delta}\varepsilon\right)}{\ln\left(1+\dfrac{x_0^{\delta-2}\varepsilon}{x_0}\right)} + \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\ln f'(x_0+\varepsilon) - \ln f'(x_0)}{\varepsilon} \cdot \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\ln\left(1+\dfrac{x_0^{\delta-2}\varepsilon}{x_0}\right)} - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\ln f(x_0+\varepsilon) - \ln f(x_0)}{\varepsilon} \cdot \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\ln\left(1+\dfrac{x_0^{\delta-2}\varepsilon}{x_0}\right)}$, по определению производной

$f^{(n)}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$, тогда $L^{(\delta)} f(x_0) = \dfrac{x_0^{1-\delta}\varepsilon}{\dfrac{x_0^{\delta-2}\varepsilon}{x_0}} + \left(\ln f'(x_0)\right)' \cdot \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\dfrac{x_0^{\delta-2}\varepsilon}{x_0}} - \left(\ln f(x_0)\right)' \cdot \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon}{\dfrac{x_0^{\delta-2}\varepsilon}{x_0}} = x_0^{4-2\delta} + \dfrac{x_0^{3-\delta} f''(x_0)}{f'(x_0)} - \dfrac{x_0^{3-\delta} f'(x_0)}{f(x_0)}$.

Дробный L интеграл .

Пусть $F(x)$ первообразная функция в смысле дробной L производной то есть . $L^{(\delta)}F(x) = f(x)$ тогда $L^{(\delta)}cF(x) = f(x)$. Поэтому дробный L интеграл имеет общий вид $L^{(\delta)}\int f(x)\,dx = cF(x)$.

$$L^{(\delta)}\int_a^x f(t)\,dt = e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt} .$$

Найдем $L^{(\delta)}$ производную от $L^{(\delta)}$ интеграла $L^{(\delta)}\left(L^{(\delta)}\int_a^x f(t)\,dt\right) = L^{(\delta)}\left(e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt}\right) = \dfrac{x^{2-\delta}\left(e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt}\right)'}{e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt}} = \dfrac{x^{2-\delta}e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt}\cdot\dfrac{f(x)}{x^{2-\delta}}}{e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt}} = f(x)$.

Другое доказательство . $L^{(\delta)}F(x) = f(x)$, отсюда $\dfrac{x^{2-\delta}F'(x)}{F(x)} = f(x)$, $\dfrac{dF}{F(x)} = \dfrac{f(x)}{x^{2-\delta}}dx$, $\ln F(x) = \int_a^x \dfrac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt$, $F(x) = e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\delta}}dt}$.

Найдем $L^{(\delta)}$ интеграл от $L^{(\delta)}$ производной $L^{(\delta)}\int_a^x \left(L^{(\delta)}f(t)\right)dt = L^{(\delta)}\int_a^x \left(\dfrac{t^{2-\delta}f'(t)}{f(t)}\right)dt = L^{(\delta)}\int_a^x \left(t^{2-\delta}\left(\ln f(t)\right)'\right)dt = e^{\int_a^x \frac{t^{2-\delta}(\ln f(t))'}{t^{2-\delta}}dt} = e^{\int_a^x (\ln f(t))'dt} = e^{\ln f(x) - \ln f(a)} = \dfrac{f(x)}{f(a)}$.

Найдем $L^{(\rho)}$ интеграл от $L^{(\delta)}$ производной $L^{(\rho)}\int_a^x \left(L^{(\delta)}f(t)\right)dt = L^{(\rho)}\int_a^x \left(\dfrac{t^{2-\delta}f'(t)}{f(t)}\right)dt = L^{(\rho)}\int_a^x \left(t^{2-\delta}\left(\ln f(t)\right)'\right)dt = e^{\int_a^x \frac{t^{2-\delta}(\ln f(t))'}{t^{2-\rho}}dt} = e^{\int_a^x t^{\rho-\delta}(\ln f(t))'dt}$.

Найдем $L^{(\delta)}$ производную от $L^{(\rho)}$ интеграла $L^{(\delta)}\left(L^{(\rho)}\int_a^x f(t)\,dt\right) = L^{(\delta)}\left(e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\rho}}dt}\right) = \dfrac{x^{2-\delta}\left(e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\rho}}dt}\right)'}{e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\rho}}dt}} = \dfrac{x^{2-\delta}e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\rho}}dt}\cdot\dfrac{f(x)}{x^{2-\rho}}}{e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t^{2-\rho}}dt}} = x^{\rho-\delta}f(x)$.

Пример . $L^{(0.5)}y(x) + \gamma y(x) = 0$, где γ постоянная . $\dfrac{x^{1.5}y'(x)}{y(x)} + \gamma y(x) = 0$, отсюда $\dfrac{dy}{y^2} = -\gamma x^{-1.5}dx$, $y = \dfrac{1}{2\gamma x^{-0.5} + c}$.

Пример . $L^{(0.5)}y(x) + ax^n y(x) = bx^r$, откуда $\dfrac{x^{1.5}y'(x)}{y(x)} + ax^n y(x) = bx^r$, $y' + ax^{n-1.5}y^2 = bx^{r-1.5}y$ это уравнение Риккати .

Пример . $L^{(\delta)}\left(L^{(\gamma)}y(x)\right)+a_1(x)L^{(\rho)}y(x)+a_2(x)y(x)=R(x)$, значит $x^{1-\delta}\left(x\frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}x-\gamma+2\right)+a_1\frac{x^{2-\rho}y'}{y}+a_2y=R$, это дает $\frac{y''}{y'}+\frac{y'}{y}\left(a_1x^{\delta-\rho}-1\right)+a_2yx^{\delta-2}=Rx^{\delta-2}+(\gamma-2)x^{-1}$.

Такие уравнения рассматривались ранее .

Пример . $L_{xy}^{(\delta)}u(x,y)+aL_x^{(\delta)}u(x,y)=0$, $0<\delta\le 1$. Поэтому $L_y^{(\delta)}\left(L_x^{(\delta)}u(x,y)\right)+aL_x^{(\delta)}u(x,y)=0$, $L_y^{(\delta)}\left(\frac{x^{2-\delta}u_x'}{u}\right)+a\frac{x^{2-\delta}u_x'}{u}=0$, $y^{2-\delta}\frac{\frac{u_{xy}''u-u_y'u_x'}{u^2}}{\frac{u_x'}{u}}+a\frac{x^{2-\delta}u_x'}{u}=0$,

$y^{2-\delta}\left(u_{xy}''u-u_y'u_x'\right)+ax^{2-\delta}\left(u_x'\right)^2=0$. Пусть $u(x,y)=e^{w(x,y)}$, тогда $u_x'=e^ww_x'$, $u_y'=e^ww_y'$, $u_{yx}''=e^w\left(w_x'w_y'+w_{yx}''\right)$, $u_{xy}''=e^w\left(w_y'w_x'+w_{xy}''\right)$, отсюда $y^{2-\delta}w_{xy}''+ax^{2-\delta}\left(w_x'\right)^2=0$.

Пусть $w_x'(x,y)=g(x,y)$, тогда $g_y'=w_{xy}''$, откуда $y^\rho g_y'+ax^\rho g^2=0$, $\frac{dg}{g^2}=-\frac{ax^\rho}{y^\rho}dy$, $g=\frac{1}{ax^\rho+\frac{y^{1-\rho}}{1-\rho}+F_1(x)}$, $w_x'=\frac{1}{ax^\rho+\frac{y^{1-\rho}}{1-\rho}+F_1(x)}$, $w(x,y)=\int\frac{dx}{ax^\rho+\frac{y^{1-\rho}}{1-\rho}+F_1(x)}+F_2(y)$,

где $\rho=2-\delta$, $F_2(y)$ произвольная дифференцируемая функция от y , $F_1(x)$ произвольная дифференцируемая функция от x .

Пример . $L_x^{(\delta)}u(x,y)+L_y^{(\delta)}u(x,y)=0$, $1<\delta\le 2$. Значит $x^{4-2\delta}+\frac{x^{3-\delta}u_{xx}''}{u_x'}-\frac{x^{3-\delta}u_x'}{u}+y^{4-2\delta}+\frac{y^{3-\delta}u_{yy}''}{u_y'}-\frac{y^{3-\delta}u_y'}{u}=0$. Пусть $u(x,y)=e^{w(x,y)}$, тогда

$u_x'=e^ww_x'$, $u_y'=e^ww_y'$, $u_{yy}''=e^w\left(\left(w_y'\right)^2+w_{yy}''\right)$, $u_{xx}''=e^w\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)$, после подстановки получим уравнение $x^{4-2\delta}+x^{3-\delta}w_{xx}''+y^{3-\delta}w_{yy}''+y^{4-2\delta}=0$.

Решение этого уравнения $w(x,y)=F_1(x)+F_2(y)$, где $F_2(y)$ произвольная дифференцируемая функция от y , $F_1(x)$ произвольная дифференцируемая функция от x ,

$\frac{d^2F_2}{dy^2}=-y^{-n}c-y^{r-n}$, $\frac{d^2F_1}{dx^2}=x^{-n}c-x^{r-n}$, $r=4-2\delta$, $n=3-\delta$.

B производная , свойства .

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция . B производной функции $f(x)$ называется выражение $B'f(x)=\lim\limits_{r\to 1}\left(\frac{f(rx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\ln r}}$, поэтому $B'f(x)=\lim\limits_{r\to 1} e^{\ln\left(\frac{f(rx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\ln r}}}=\lim\limits_{r\to 1} e^{\frac{\ln f(rx)-\ln f(x)}{\ln r}}$, $x_1=rx$, $x_1=x+\Delta x$, $rx=x+\Delta x$, $r=1+\frac{\Delta x}{x}$, если $r\to 1$,

тогда $\Delta x\to 0$, отсюда $B'f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} e^{\frac{\ln f(x+\Delta x)-\ln f(x)}{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} e^{\frac{\ln f(x+\Delta x)-\ln f(x)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}}=e^{(\ln f(x))'\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{x}}}=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$.

Другое определение . $B'f(x)=\lim\limits_{x\to r}\left(\frac{f(x)}{f(r)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln r}}=e^{\ln\lim\limits_{x\to r}\left(\frac{f(x)}{f(r)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln r}}}=e^{\lim\limits_{x\to r}\ln\left(\frac{f(x)}{f(r)}\right)^{\frac{1}{\ln x-\ln r}}}=e^{\lim\limits_{x\to r}\frac{\ln\left(\frac{f(x)}{f(r)}\right)}{\ln x-\ln r}}=e^{\lim\limits_{x\to r}\frac{\frac{\ln f(x)-\ln f(r)}{x-r}}{\frac{\ln x-\ln r}{x-r}}}=e^{\frac{(\ln f(x))'}{\lim\limits_{x\to r}\frac{\ln x-\ln r}{x-r}}}=\left(\lim\limits_{x\to r}\frac{\ln x-\ln r}{x-r}=\lim\limits_{x\to r}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{r}\right)=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$.

$B'c=e^{\frac{xc'}{c}}=e^0=1$. Определим $B'0=1$.

$B'cf(x)=e^{\frac{xcf'(x)}{cf(x)}}=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}=B'f(x)$.

$B'(nx)=e^{\frac{x(nx)'}{nx}}=e$.

$B'f(g(x))=e^{\frac{xf'(g(x))}{f(g(x))}g'(x)}=(B'f(g))^{g'(x)}$, $B'\sin x^2=e^{\frac{x\cos x^2}{\sin x^2}2x}=e^{\frac{2x^2}{\tan x^2}}$.

$B'f(nx)=(B'f)^n$, $B'\sin 2x=e^{\frac{x\cos 2x}{\sin 2x}2}=e^{\frac{2x}{\tan 2x}}$.

$B'f(x)^n=e^{\frac{xnf(x)^{n-1}f'(x)}{f(x)^n}}=\left(e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\right)^n=(B'f(x))^n$.

$B'f(x)^{g(x)}=e^{\frac{x\left(f(x)^{g(x)}\right)'}{f(x)^{g(x)}}}=e^{\frac{xf(x)^{g(x)}\left(\frac{f'(x)g(x)}{f(x)}+g'(x)\ln f(x)\right)}{f(x)^{g(x)}}}=(B'f(x))^{g(x)}f(x)^{xg'(x)}$.

$B'(f(x)\cdot g(x))=e^{\frac{x(f'(x)g(x)+g'(x)f(x))}{f(x)g(x)}}=e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}e^{\frac{xg'(x)}{g(x)}}=B'f(x)\cdot B'g(x)$.

$B'\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{B'f(x)}{B'g(x)}$.

$B'f(x) = f(x)$, $e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = f(x)$, $\frac{df(x)}{f(x)\ln f(x)} = \frac{dx}{x}$, $\ln(\ln f(x)) = \ln x + \ln c$, $f(x) = e^{cx}$.

$B'f(x) = (p'f(x))^x$, $p'f(x) = (B'f(x))^{\frac{1}{x}}$.

$L'f(x) = \ln B'f(x)$, $B'f(x) = e^{L'f(x)}$.

$$B''f(x) = B'(B'f(x)) = B'\left(e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\right) = e^{\frac{x\left(e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\right)'}{e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}}} = e^{\frac{xf(x)f'(x)+x^2f(x)f''(x)-x^2(f'(x))^2}{f(x)^2}} .$$

$L''f(x)L'f(x) = \ln B''f(x)$, $B''f(x) = e^{L''f(x)L'f(x)}$.

$\frac{B''f(x)}{B'f(x)} = (p''f(x))^{x^2}$, $p''f(x) = \left(\frac{B''f(x)}{B'f(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$B'''f(x) = B'(B''f(x)) = B'\left(e^{\frac{xf(x)f'(x)+x^2f(x)f''(x)-x^2(f'(x))^2}{f(x)^2}}\right) = e^{\frac{x\left(e^{\frac{xf(x)f'(x)+x^2f(x)f''(x)-x^2(f'(x))^2}{f(x)^2}}\right)'}{\frac{xf(x)f'(x)+x^2f''(x)-x^2(f'(x))^2}{f(x)^2}}} = e^{\frac{xf(x)^2f'(x)+3x^2f(x)^2f''(x)+x^3f(x)^2f'''(x)+2x^3(f'(x))^3-3x^2f(x)(f'(x))^2-3x^3f(x)f'(x)f''(x)}{f(x)^3}} . \quad \frac{B'''f(x)(B'f(x))^2}{(B''f(x))^3} = (p'''f(x))^{x^3} .$$

Пусть $f(x) = e^{g(x)}$, тогда $f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$, $f''(x) = e^{g(x)}\left((g'(x))^2 + g''(x)\right)$, $f'''(x) = e^{g(x)}\left((g'(x))^3 + 3g'(x)g''(x) + g'''(x)\right)$, откуда $B'f(x) = e^{xg'(x)}$, $B''f(x) = e^{xg'(x)+x^2g''(x)}$, $B'''f(x) = e^{xg'(x)+3x^2g''(x)+x^3g'''(x)}$.

B интеграл это операция обратная к операции B дифференцирования . Обозначим B интеграл символом $B\int f(x)\,dx$, то есть $B'F(x) = f(x)$, найдем логарифм от обеих частей $\ln e^{\frac{xF'(x)}{F(x)}} = \ln f(x)$, $\ln f(x) = \frac{xF'(x)}{F(x)}$, $\frac{\ln f(x)}{x} = \frac{F'(x)}{F(x)}$,

$\int \frac{\ln f(x)}{x}dx = \int \frac{F'(x)}{F(x)}dx$, $\ln e^{\frac{xF'(x)}{F(x)}} = \ln f(x)$, $\ln f(x) = \frac{xF'(x)}{F(x)}$, $\frac{\ln f(x)}{x} = \frac{F'(x)}{F(x)}$, $\int \frac{\ln f(x)}{x}dx = \int \frac{F'(x)}{F(x)}dx$, $\ln F(x) + \ln c = \int \frac{\ln f(x)}{x}dx$, $F(x) = ce^{\int \frac{\ln f(x)}{x}dx}$.

$B\int (f(x))^\gamma\,dx = e^{\int \frac{\ln(f(x))^\gamma}{x}dx} = e^{\gamma\int \frac{\ln(f(x))}{x}dx} = \left(B\int f(x)dx\right)^\gamma$.

$$B\int \gamma f(x)\,dx = e^{\int \frac{\ln(f(x)\gamma)}{x}}dx = e^{\int \frac{\ln(f(x))+\ln\gamma}{x}dx} = e^{\int \frac{\ln\gamma}{x}dx+\int \frac{\ln f(x)}{x}dx} = e^{\ln\gamma \ln x}e^{\int \frac{\ln f(x)}{x}dx} = \gamma^{\ln x}B\int f(x)dx\ .$$

$$B\int dx = ce^{\int 0dx} = c\ .$$

$$B\int \rho dx = ce^{\int \frac{\ln\rho}{x}dx} = cx^{\ln\rho}\ .$$

$$B\int e^{\rho}dx = cx^{\ln e^{\rho}} = cx^{\rho}\ .$$

$$B\int e^{\rho x}dx = ce^{\int \frac{\ln e^{\rho x}}{x}dx} = ce^{\rho x}\ .$$

$$B\int x^{n}dx = ce^{\int \frac{\ln x^{n}}{x}}dx = ce^{n\frac{(\ln x)^2}{2}}\ .$$

$$B\int x^{x}dx = ce^{\int \frac{\ln x^{x}}{x}dx} = cx^{x}e^{-x}\ .$$

Определеный B интеграл непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

$$B\int_a^b f(x)dx = e^{\int_a^b \frac{\ln f(x)}{x}dx} = e^{\Phi(b)-\Phi(a)} = \frac{e^{\Phi(b)}}{e^{\Phi(a)}} = \frac{F(b)}{F(a)}\ .$$

$$B\int_a^b \gamma f(x)\,dx = e^{\int_a^b \frac{\ln(f(x)\gamma)}{x}dx} = e^{\int_a^b \frac{\ln(f(x))+\ln\gamma}{x}dx} = e^{\int_a^b \frac{\ln\gamma}{x}dx+\int_a^b \frac{\ln f(x)}{x}dx} = e^{\ln\gamma \ln x_a^b}e^{\int_a^b \frac{\ln f(x)}{x}dx} = \gamma^{\ln\frac{b}{a}}B\int_a^b f(x)dx\ .$$

$$B\int_a^b (f(x))^{\gamma}\,dx = e^{\int_a^b \frac{\ln(f(x))^{\gamma}}{x}dx} = e^{\gamma\int_a^b \frac{\ln(f(x))}{x}dx} = \left(B\int_a^b f(x)dx\right)^{\gamma}\ .$$

$$B\int_a^b f(x)\,dx = \frac{F(b)}{F(a)} = \frac{1}{\frac{F(a)}{F(b)}} = \frac{1}{B\int_b^a f(x)\,dx}\ .$$

$$B'\left(B\int_a^x f(t)\,dt\right) = B'\left(e^{\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt}\right) = e^{\frac{x\left(e^{\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt}\right)'_x}{e^{\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt}}} = e^{x\left(\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt\right)'_x} = e^{x\frac{\ln f(x)}{x}} = f(x)\ .$$

$B\int_n^r f(x)\,dx = B\int_n^q f(x)\,dx \cdot B\int_q^r f(x)\,dx$, поскольку $B\int_n^q f(x)\,dx \cdot B\int_q^r f(x)\,dx = \frac{F(q)}{F(n)} \cdot \frac{F(r)}{F(q)} = \frac{F(r)}{F(n)}$.

Определеный B интеграл предел суммы $a = x_0 < x_1 < .. < x_{j-1} < x_j < .. < x_n < b$, $\sigma = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$, $x_{j-1} < \xi_j < x_j$, $\rho = \text{maximum}_{1\le j\le n}(\Delta x_j)$,

$$B\int_a^b f(x)\,dx = e^{\lim_{\rho\to 0}\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln f(\xi_j)}{\xi_j}\Delta x_j} = \lim_{\rho\to 0} e^{\sum_{j=1}^{n}\frac{\ln f(\xi_j)}{\xi_j}\Delta x_j} = \lim_{\rho\to 0} e^{\frac{\ln f(\xi_1)}{\xi_1}\Delta x_1 + \frac{\ln f(\xi_2)}{\xi_2}\Delta x_2 + .. + \frac{\ln f(\xi_n)}{\xi_n}\Delta x_n} = \lim_{\rho\to 0}\left(f(\xi_1)^{\frac{\Delta x_1}{\xi_1}} \cdot f(\xi_2)^{\frac{\Delta x_2}{\xi_2}} \cdot \ldots \cdot f(\xi_n)^{\frac{\Delta x_n}{\xi_n}} \right) .$$

Пример . $B\int_a^b e^x\,dx = e^{\int_a^b \frac{\ln e^x}{x}dx} = e^{\int_a^b dx} = e^{b-a}$. Пусть $\Delta x_j = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, .. , $x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x$, $x_n = a + n\Delta x = b$, ξ_j , берем левый конец x_{j-1} каждого интервала , это дает

$$B\int_a^b e^x\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(e^a\right)^{\frac{\Delta x}{a}} \cdot \left(e^{a+\Delta x}\right)^{\frac{\Delta x}{a+\Delta x}} \cdot \ . \ . \ . \ \cdot \left(e^{a+(n-1)\Delta x}\right)^{\frac{\Delta x}{a+(n-1)\Delta x}} \right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(e^{\Delta x} \cdot e^{\Delta x} \cdot \ . \ . \ . \ \cdot e^{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x\to 0} e^{n\Delta x} = e^{b-a}$$, поскольку $b - a = \Delta x n$.

Рассмотрим разбиение интервала $a = x_0$, $x_1 = ah$, $x_2 = ah^2$, . . . , $x_{n-1} = ah^{n-1}$, $x_n = ah^n = b$, где $h = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Пусть $n \to \infty$, тогда $h \to 1$, $h^n \to \frac{b}{a}$, определим $B\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 1}\left(f(a) \cdot f(ah) \cdot f(ah^2) \cdot \ . \ . \ . \ \cdot f(ah^{n-2}) \cdot f(ah^{n-1}) \right)^{\ln h} = \lim_{h\to 1}\left(\prod_{j=0}^{n-1} f(ah^j) \right)^{\ln h} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=0}^{n-1} f(ah^j) \right)^{\ln h}$.

$$\text{Пример . } B\int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 1}\left(e^a \cdot e^{ah} \cdot e^{ah^2} \cdot \ . \ . \ . \ \cdot e^{ah^{n-2}} \cdot e^{ah^{n-1}} \right)^{\ln h} = \lim_{h\to 1}\left(e^{a\left(1+h+h^2+\, . \, . \, +h^{n-2}+h^{n-1}\right)} \right)^{\ln h} = \lim_{h\to 1}\left(e^{a\frac{h^n-1}{h-1}} \right)^{\ln h} = \lim_{h\to 1}\left(e^{a\frac{\frac{b}{a}-1}{h-1}} \right)^{\ln h} = \lim_{h\to 1}\left(e^{\ln h} \right)^{\frac{b-a}{h-1}} = \lim_{h\to 1}\left(h^{\frac{1}{h-1}} \right)^{b-a} = e^{b-a} .$$

$$B'\left(B\int_a^x f(t)\,dt \right) = B'\left(e^{\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt} \right) = e^{\frac{x\left(e^{\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt} \right)'_x}{e^{\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt}}} = e^{x\left(\int_a^x \frac{\ln f(t)}{t}dt \right)'_x} = e^{x\frac{\ln f(x)}{x}} = f(x) .$$

$$B\int_a^b \gamma f(x)\,dx = e^{\int_a^b \frac{\ln(f(x)\gamma)}{x}dx} = e^{\int_a^b \frac{\ln f(x)+\ln\gamma}{x}dx} = e^{\int_a^b \frac{\ln\gamma}{x}dx + \int_a^b \frac{\ln f(x)}{x}dx} = e^{\ln\gamma \ln x_a^b} e^{\int_a^b \frac{\ln f(x)}{x}dx} = \gamma^{\ln\frac{b}{a}} B\int_a^b f(x)dx .$$

Обыкновеные B дифференциальные уравнения .

Пример . $B''y(x)\cdot(B'y(x))^{\gamma_1}\cdot(y(x))^{\gamma_2}=f(x)$. Пусть $y(x)=e^{g(x)}$, тогда $y'(x)=e^g g'(x)$, $y''(x)=e^g\left((g'(x))^2+g''(x)\right)$, тогда $e^{xg'(x)+x^2g''(x)}\cdot e^{\gamma_1 xg'(x)}\cdot e^{\gamma_2 g(x)}=f(x)$, поэтому $x^2g''+(\gamma_1+1)xg'+\gamma_2 g=\ln f$, соответствующее однородное уравнение $x^2g''+(\gamma_1+1)xg'+\gamma_2 g=0$. Пусть $x=e^\eta$, $\eta=\ln x$, отсюда $g_x{}'=\dfrac{g_\eta{}'}{e^\eta}$, $g_{xx}{}''=\dfrac{g_{\eta\eta}{}''-g_\eta{}'}{e^{2\eta}}$, после подстановки найдем уравнение $g_{\eta\eta}{}''+g_\eta{}'\gamma_1+\gamma_2 g=0$. Пусть $\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$, тогда $g_{\eta\eta}{}''+g=0$. Решение этого уравнения $g(\eta)=c_1\sin\eta+c_2\cos\eta$, $g(x)=c_2\cos(\ln x)+c_1\sin(\ln x)$, частное решение уравнения $x^2g''+(\gamma_1+1)xg'+\gamma_2 g=\ln f$ для данной функции $f(x)$ можно найти методом коэффициента . Пусть $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, откуда решение данного уравнения

$$g(x)=x^{\frac{-\gamma_1-\sqrt{\gamma_1^2-4\gamma_2}}{2}}c+x^{\frac{-\gamma_1+\sqrt{\gamma_1^2-4\gamma_2}}{2}}c_1+\frac{1}{(1-\gamma_1+\gamma_2)x}$$, если $\gamma_2<0$, $$g(x)=x^{\frac{-\gamma_1-\sqrt{\gamma_1^2+4\gamma_2}}{2}}c+x^{\frac{-\gamma_1+\sqrt{\gamma_1^2+4\gamma_2}}{2}}c_1+\frac{1}{(1-\gamma_1-\gamma_2)x}$$, если $\gamma_2>0$, $$g(x)=\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{4\gamma_2-1}}{2}\ln x\right)}{\sqrt{x}}c+\frac{\cos\left(\frac{\sqrt{4\gamma_2-1}}{2}\ln x\right)}{\sqrt{x}}c_1+\frac{1}{\gamma_2 x}$$, если $\gamma_1=1$.

Другое решение . Пусть $t=\varphi(x)$ новая переменная , значит $g'(x)=\dfrac{dg}{dx}=\dfrac{dg}{dt}\dfrac{dt}{dx}=g'(t)\varphi'(x)$, $g''(x)=\dfrac{d}{dx}(g'(x))=\dfrac{d}{dx}(g'(t)\varphi'(x))=\dfrac{d}{dx}(g'(t))\varphi'(x)+\varphi''(x)g'(t)=\dfrac{dg'(t)}{dt}\dfrac{dt}{dx}\varphi'(x)+\varphi''(x)g'(t)=g''(t)(\varphi'(x))^2+\varphi''(x)g'(t)$.

Подставим эти выражения в уравнение $x^2g''(t)(\varphi'(x))^2+x^2\varphi''(x)g'(t)+(\gamma_1+1)xg'(t)\varphi'(x)+\gamma_2 g(t)=\ln f$, $x^2g''(t)(\varphi'(x))^2+\left(x^2\varphi''(x)+(\gamma_1+1)x\varphi'(x)\right)g'(t)+\gamma_2 g(t)=\ln f$, пусть коэффициент при $g'(t)$ равен 0 , то есть получим уравнение $x^2\varphi''(x)+(\gamma_1+1)x\varphi'(x)=0$, решение этого уравнения $\varphi(x)=\dfrac{\lambda x^{-\gamma_1}}{\gamma_1}+\lambda_1$, полагаем $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}=t$, $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Подставим эти выражения в уравнение $x^2g''(t)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^2+\gamma_2 g(t)=\ln f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $\dfrac{g''(t)}{x^2}+\gamma_2 g(t)=\ln f\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Let $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, найдем $t^2g''(t)+\gamma_2 g(t)=t$, получим решение данного уравнения $g(t)=t^{\frac{1-\sqrt{1-4\gamma_2}}{2}}c+t^{\frac{1+\sqrt{1-4\gamma_2}}{2}}c_1+\dfrac{t}{\gamma_2}$, if $\gamma_2<0$, $g(t)=t^{\frac{1-\sqrt{1+4\gamma_2}}{2}}c+t^{\frac{1+\sqrt{1+4\gamma_2}}{2}}c_1+\dfrac{1}{\gamma_2}$, if $\gamma_2>0$, $g(t)=\sqrt{t}\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\gamma_2-1}}{2}\ln t\right)c+\sqrt{t}\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\gamma_2-1}}{2}\ln t\right)c_1+\dfrac{t}{\gamma_2}$, if $\gamma_2=1$.

Другое решение . Пусть $g(x)=\varphi(x)\zeta(x)$, поэтому $g'(x)=\varphi'(x)\zeta(x)+\zeta'(x)\varphi(x)$, $g''(x)=\varphi''(x)\zeta(x)+\zeta''(x)\varphi(x)+2\zeta'(x)\varphi'(x)$. Подставим эти выражения в уравнение $x^2(\varphi''\zeta+\zeta''\varphi+2\zeta'\varphi')+(\varphi'\zeta+\zeta'\varphi)x(\gamma_1+1)+\gamma_2\varphi\zeta=\ln f$, пусть коэффициент при ζ' равен 0 , то есть получим уравнение $2x^2\varphi'+(\gamma_1+1)x\varphi=0$. Решение данного уравнения $\varphi(x)=cx^{-\frac{\gamma_1+1}{2}}$, полагаем $\gamma_1=1$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. Подставим эти выражения в уравнения получим $\zeta''x+\dfrac{\gamma_2\zeta}{x}=\ln f$. Пусть $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x^2\zeta''+\zeta\gamma_2=1$, Решение данного уравнения $\zeta(x)=x^{\frac{1-\sqrt{1-4\gamma_2}}{2}}c+x^{\frac{1+\sqrt{1-4\gamma_2}}{2}}c_1+\dfrac{1}{\gamma_2}$, if $\gamma_2<0$, $\zeta(x)=x^{\frac{1-\sqrt{1+4\gamma_2}}{2}}c+x^{\frac{1+\sqrt{1+4\gamma_2}}{2}}c_1+\dfrac{1}{\gamma_2}$, if $\gamma_2>0$, $\zeta(x)=\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\gamma_2-1}}{2}\ln x\right)c+\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\gamma_2-1}}{2}\ln x\right)c_1+1$, if $\gamma_2=1$.

Пример . $B'''y(x)\cdot(B''y(x))^{\gamma_1}\cdot(B'y(x))^{\gamma_2}\cdot(y(x))^{\gamma_3}=f(x)$. Пусть $y(x)=e^{g(x)}$, тогда $y'(x)=e^g g'(x)$, $y''(x)=e^g\left((g'(x))^2+g''(x)\right)$, $y'''(x)=e^g\left((g'(x))^3+3g'(x)g''(x)+g'''(x)\right)$, тогда $e^{xg'(x)+3x^2g''(x)+x^3g'''(x)}\cdot e^{\gamma_1(xg'(x)+x^2g''(x))}\cdot e^{\gamma_2(xg'(x))}\cdot e^{\gamma_3 g(x)}=f(x)$, $x^3g'''+(3+\gamma_1)x^2g''+(1+\gamma_1+\gamma_2)xg'+\gamma_3 g=f(x)$, соответствующее однородное уравнение $x^3g'''+(3+\gamma_1)x^2g''+(1+\gamma_1+\gamma_2)xg'+\gamma_3 g=0$. Пусть $x=e^\eta$, $\eta=\ln x$, откуда $g_x{}'=\dfrac{g_\eta{}'}{e^\eta}$, $g_{xx}{}''=\dfrac{g_{\eta\eta}{}''-g_\eta{}'}{e^{2\eta}}$, $g_{xxx}{}'''=\dfrac{g_{\eta\eta\eta}{}'''-3g_{\eta\eta}{}''+2g_\eta{}'}{e^{3\eta}}$, после подстановки найдем уравнение $g_{\eta\eta\eta}{}'''+\gamma_1 g_{\eta\eta}{}''+\gamma_2 g_\eta{}'+\gamma_3 g=0$, частное решение уравнения $x^3g'''+(3+\gamma_1)x^2g''+(1+\gamma_1+\gamma_2)xg'+\gamma_3 g=f(x)$ для данной функции $f(x)$ можно найти методом коэффициента .

Другое решение . Пусть $t=\varphi(x)$ новая переменная , значит $g'(x)=\frac{dg}{dx}=\frac{dg}{dt}\frac{dt}{dx}=g'(t)\varphi'(x)$, $g''(x)=\frac{d}{dx}(g'(x))=\frac{d}{dx}(g'(t)\varphi'(x))=\frac{d}{dx}(g'(t))\varphi'(x)+\varphi''(x)g'(t)=\frac{dg'(t)}{dt}\frac{dt}{dx}\varphi'(x)+\varphi''(x)g'(t)=g''(t)(\varphi'(x))^2+\varphi''(x)g'(t)$,

$g'''(x)=\frac{d}{dx}(g''(x))=\frac{d}{dx}\left(g''(t)(\varphi'(x))^2+\varphi''(x)g'(t)\right)=\frac{d}{dx}(g''(t))(\varphi'(x))^2+2\varphi'(x)\varphi''(x)g''(t)+\varphi'''(x)g'(t)+\frac{d}{dx}(g'(t))\varphi''(x)=\frac{dg''(t)}{dt}\frac{dt}{dx}(\varphi'(x))^2+2\varphi'(x)\varphi''(x)g''(t)+\varphi'''(x)g'(t)+\frac{dg'(t)}{dt}\frac{dt}{dx}\varphi''(x)=$

$=g'''(t)(\varphi'(x))^3+2\varphi'(x)\varphi''(x)g''(t)+\varphi'''(x)g'(t)+\varphi'(x)\varphi''(x)g''(t)$. Подставим эти выражения в уравнение

$\left[2\varphi'(x)\varphi''(x)g''(t)+\varphi'(x)\varphi''(x)g''(t)+g'''(t)(\varphi'(x))^3+\varphi'''(x)g'(t)\right]x^3+(3+\gamma_1)x^2\left[g''(t)(\varphi'(x))^2+\varphi''(x)g'(t)\right]+(1+\gamma_1+\gamma_2)xg'(t)\varphi'(x)+\gamma_3 g(t)=\ln f(x)$, пусть коэффициент при $g'(t)$ равен 0 ,то есть получим уравнение

$(1+\gamma_1+\gamma_2)x\varphi'(x)+\varphi''(x)x^2(3+\gamma_1)+\varphi'''(x)x^3=0$. Решение этого уравнения $\varphi(x)=c+c_1x^{\frac{-\gamma_1-\sqrt{\gamma_1^2-4\gamma_2}}{2}}+c_2x^{\frac{-\gamma_1+\sqrt{\gamma_1^2-4\gamma_2}}{2}}$. Пусть $\gamma_1=-1$, $\gamma_2=-2$, тогда полагаем $\varphi(x)=\frac{1}{x}$.

Подставим эту функцию в уравнение , получим $4t^2g''(t)+g'''(t)t^3-\gamma_3 g(t)=\ln f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Пусть $u(x,t)$ непрерывная функция . Найдем частные производные .

$B_x'u(x,t)=e^{\frac{xu_x'(x,t)}{u(x,t)}}$, $B_t'u(x,t)=e^{\frac{tu_t'(x,t)}{u(x,t)}}$, $B_{tt}''u(x,t)=B_t'\left(B_t'u(x,t)\right)=B_t'\left(e^{\frac{tu_t'(x,t)}{u(x,t)}}\right)=e^{\frac{tu(x,t)u_t'(x,t)+t^2u(x,t)u_{tt}''(x,t)-t^2\left(u_t'(x,t)\right)^2}{(u(x,t))^2}}$, $B_{xx}''u(x,t)=B_x'\left(B_x'u(x,t)\right)=B_x'\left(e^{\frac{xu_x'(x,t)}{u(x,t)}}\right)=e^{\frac{xu(x,t)u_x'(x,t)+x^2u(x,t)u_{xx}''(x,t)-x^2\left(u_x'(x,t)\right)^2}{(u(x,t))^2}}$,

$B_{xt}''u(x,t)=B_t'\left(B_x'u(x,t)\right)=B_t'\left(e^{\frac{xu_x'(x,t)}{u(x,t)}}\right)=e^{tx\frac{u_{xt}''(x,t)u(x,t)-u_t'(x,t)u_x'(x,t)}{(u(x,t))^2}}$, $B_{tx}''u(x,t)=B_x'\left(B_t'u(x,t)\right)=B_x'\left(e^{\frac{tu_t'(x,t)}{u(x,t)}}\right)=e^{xt\frac{u_{tx}''(x,t)u(x,t)-u_x'(x,t)u_t'(x,t)}{(u(x,t))^2}}$, $B_{tx}''u(x,t)=B_{xt}''u(x,t)$,

$B_{ttt}'''u(x,t)=B_t'\left(B_{tt}''u(x,t)\right)=e^{\frac{t(u(x,t))^2u_t'(x,t)+3t^2(u(x,t))^2u_{tt}''(x,t)+t^3(u(x,t))^2u_{ttt}'''(x,t)+2t^3\left(u_t'(x,t)\right)^3-3t^2u(x,t)\left(u_t'(x,t)\right)^2-3t^3u(x,t)u_t'(x,t)u_{tt}''(x,t)}{(u(x,t))^3}}$,

$B_{xxx}'''u(x,t)=B_x'\left(B_{xx}''u(x,t)\right)=e^{\frac{x(u(x,t))^2u_x'(x,t)+3x^2(u(x,t))^2u_{xx}''(x,t)+x^3(u(x,t))^2u_{xxx}'''(x,t)+2x^3\left(u_x'(x,t)\right)^3-3x^2u(x,t)\left(u_x'(x,t)\right)^2-3x^3u(x,t)u_x'(x,t)u_{xx}''(x,t)}{(u(x,t))^3}}$.

Пусть $u(x,t)=e^{w(x,t)}$, тогда $u_x'=e^w w_x'$, $u_t'=e^w w_t'$,

$u_{tt}''=e^w\left(w_t'\right)^2+e^w w_{tt}''=e^w\left(\left(w_t'\right)^2+w_{tt}''\right)$, $u_{xx}''=e^w\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)$, $u_{xt}''=\left(e^w w_x'\right)_t'=e^w w_t'w_x'+e^w w_{xt}''=e^w\left(w_t'w_x'+w_{xt}''\right)$, $u_{tx}''=e^w\left(w_x'w_t'+w_{tx}''\right)$,

$u_{xxx}'''=\left(e^w\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)\right)_x'=e^w w_x'\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)+e^w\left(2w_x'w_{xx}''+w_{xxx}'''\right)=e^w\left(\left(w_x'\right)^3+3w_x'w_{xx}''+w_{xxx}'''\right)$, $u_{ttt}'''=e^w\left(\left(w_t'\right)^3+3w_t'w_{tt}''+w_{ttt}'''\right)$,

$$w_{ttt}''' = \left(w_{tt}''\right)_t' = \frac{w_{\xi\xi\xi}''' - 3w_{\xi\xi}'' + 2w_{\xi}'}{e^{3\xi}} ,$$

$$w_{ttx}''' = \left(w_{tt}''\right)_x' = \frac{w_{\xi\xi\eta}''' - w_{\xi\eta}''}{e^{\eta}e^{2\xi}} ,$$

$$w_{xxt}''' = \left(w_{xx}''\right)_t' = \left(\frac{w_{\eta\eta}'' - w_{\eta}'}{e^{2\eta}}\right)_t' = \frac{w_{\eta\eta\xi}'''\xi_t' - \xi_t' w_{\eta\xi}''}{e^{2\eta}} = \frac{w_{\eta\eta\xi}''' - w_{\eta\xi}''}{e^{\xi}e^{2\eta}} .$$

Пример . $\left(B_{xx}''u(x,t)\right)^r \cdot B_t'u(x,t) = 1$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $r\frac{xuu_x' + x^2uu_{xx}'' - x^2\left(u_x'\right)^2}{u^2} + \frac{tu_t'}{u} = 0$, $r\left(xuu_x' + x^2uu_{xx}'' - x^2\left(u_x'\right)^2\right) + tuu_t' = 0$.

Пусть $u(x,t) = e^{w(x,t)}$, получим уравнение $r\left(xw_x' + w_{xx}''x^2\right) + tw_t' = 0$. Пусть $x = e^{\eta}$, $\eta = \ln x$, $\xi = \ln t$, $t = e^{\xi}$. После подстановки найдем уравнение $rw_{\eta\eta}'' + w_{\xi}' = 0$.

Пусть $w(\eta,\xi) = X(\eta)T(\xi)$, это дает $w_{\xi}'(\eta,\xi) = T'(\xi)X(\eta)$, $w_{\eta}'(\eta,\xi) = X'(\eta)T(\xi)$, $w_{\eta\eta}''(\eta,\xi) = X''(\eta)T(\xi)$, получим уравнение $rX''(\eta)T(\xi) + T'(\xi)X(\eta) = 0$, поэтому $\frac{\gamma X''}{X} = -\frac{T'}{T} = \delta$, где δ призвольная постоянная , $X(\eta) = e^{\frac{\delta\eta}{r}}c_1(\xi)$, $T(\xi) = e^{-\delta\xi}c_2(\eta)$, $w(\eta,\xi) = e^{\frac{\delta\eta}{r}}e^{-\delta\xi}c_2(\eta)c_1(\xi)$, $w(x,y) = x^{\frac{\delta}{r}}t^{-\delta}c_2(\ln x)c_1(\ln t)$, $u(x,t) = e^{w(x,t)}$.

Пример . $\left(B_{xt}''u(x,t)\right)^r = B_t'u(x,t) \cdot B_x'u(x,t)$ это уравнение эквиваленто следующему уравнению $rxt\left(u_{xt}''u - u_t'u_x'\right) = \left(tu_t' + u_x'x\right)u$. Пусть $u(x,t) = f(y)$, где $y = xt$, откуда

$u_x'(x,t) = f_x'(x,t) = f_y'(y)y_x' = f_y'(y)t$, $u_t'(x,t) = f_t'(x,t) = f_y'(y)y_t' = f_y'(y)x$, $u_{tt}''(x,t) = \left(f_y'(y)x\right)_t' = f_{yy}''(y)y_t'x = f_{yy}''(y)x^2$, $u_{xx}''(x,t) = \left(f_y'(y)t\right)_x' = f_{yy}''(y)y_x't = f_{yy}''(y)t^2$,

$u_{xt}''(x,t) = \left(f_y'(y)t\right)_t' = f_{yy}''(y)y_t't + tf_y'(y) = f_{yy}''(y)xt + tf_y'(y)$.

Подставим эти выражения в уравнение найдем $ry\left(f(y)f_{yy}''(y) - \left(f_y'(y)\right)^2\right) = 2f_y'(y)f(y)$. Решение этого уравнения $f(y) = e^{y^{\frac{r+2}{r}}c}c_1$, тогда $u(x,t) = e^{(tx)^{\frac{r+2}{r}}c}c_1$.

Другое решение $u(x,t) = e^{w(x,t)}$, тогда получим уравнение $rtxw_{xt}'' = tw_t' + w_x'x$. Пусть $x = e^{\eta}$, $\eta = \ln x$, $\xi = \ln t$, $t = e^{\xi}$, получим уравнение $rw_{\eta\xi}'' = w_{\xi}' + w_{\eta}'$.

Пусть $w(\eta,\xi) = X(\eta)T(\xi)$, это дает $w_{\xi}'(\eta,\xi) = T'(\xi)X(\eta)$, $w_{\eta}'(\eta,\xi) = X'(\eta)T(\xi)$, $w_{\eta\xi}''(\eta,\xi) = X'(\eta)T'(\xi)$, значит $rX'(\eta)T'(\xi) = T'(\xi)X(\eta) + X'(\eta)T(\xi)$,

поэтому $\frac{rX'}{X} = \delta$, $\frac{rT'}{T} = \frac{\delta}{\delta-1}$, где δ произвольная постоянная , $X(\eta) = e^{\frac{\delta}{r}\eta}c(\xi)$, $T(\xi) = e^{\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta-1}\xi}\tilde{c}(\eta)$, $w(\eta,\xi) = e^{\frac{\delta}{r}\eta}e^{\frac{\delta}{r}\frac{\xi}{\delta-1}}\tilde{c}(\eta)c(\xi)$, $w(x,t) = x^{\frac{\delta}{r}}t^{\frac{\delta}{r}\frac{1}{\delta-1}}c(\ln t)\tilde{c}(\ln x)$, $u(x,t) = e^{w(x,t)}$.

Найдем волновое решение этого уравнения $\gamma w_{\eta\xi}'' = w_{\xi}' + w_{\eta}'$. Пусть $w(\eta,\xi) = g(\lambda)$, где $\lambda = \eta - \rho\xi$, ρ постоянная , отсюда получаем $w_{\eta}' = g'$, $w_{\xi}' = -\rho g'$, $w_{\xi\eta}'' = -\rho g''$, откуда получаем $r\rho g'' = g'(\rho - 1)$. Решение данного уравнения $g(\lambda) = c\dfrac{\rho r}{\rho - 1}e^{\frac{\rho-1}{r\rho}\lambda} + \tilde{c}$, это дает $w(\eta,\xi) = c\dfrac{\rho r}{\rho - 1}e^{\frac{\rho-1}{r\rho}(\eta-\rho\xi)} + \tilde{c}$, $w(x,t) = c\dfrac{\rho r}{\rho - 1}x^{\frac{\rho-1}{r\rho}}t^{\frac{1-\rho}{r}} + \tilde{c}$, $u(x,t) = e^{w(x,t)}$.

Пример . $\left(B_{xxx}'''u(x,t)\right)^{r} = \left(B_{xx}''u(x,t)\right)^{q} \cdot B_{t}'u(x,t)$. Пусть $u(x,t) = e^{w(x,t)}$ получим уравнение $tw_{t}'(x,t) + \delta\left(xw_{x}'(x,t) + w_{xx}''(x,t)x^{2}\right) = r\left(w_{x}'(x,t)x + 3x^{2}w_{xx}''(x,t) + x^{3}w_{xxx}'''(x,t)\right)$. Пусть $x = e^{\eta}$, $\eta = \ln x$, $\xi = \ln t$, $t = e^{\xi}$, получим уравнение $w_{\xi}'(\eta,\xi) + qw_{\eta\eta}''(\eta,\xi) = rw_{\eta\eta\eta}'''(\eta,\xi)$. Пусть $w(\eta,\xi) = X(\eta)T(\xi)$, поэтому $w_{\xi}'(\eta,\xi) = T'(\xi)X(\eta)$, $w_{\eta}'(\eta,\xi) = X'(\eta)T(\xi)$, $w_{\eta\eta}''(\eta,\xi) = X''(\eta)T(\xi)$, $w_{\xi\xi}''(\eta,\xi) = T''(\xi)X(\eta)$, $w_{\eta\eta\eta}'''(\eta,\xi) = X'''(\eta)T(\xi)$, отсюда $-q\dfrac{X''(\eta)}{X(\eta)} + \dfrac{X'''(\eta)}{X(\eta)}r = \dfrac{T'(\xi)}{T(\xi)} = \sigma$, нашли два линейных обыкновенных дифференциальных уравнения .

Найдем волновое решение уравнения $w_{\xi}'(\eta,\xi) + qw_{\eta\eta}''(\eta,\xi) = rw_{\eta\eta\eta}'''(\eta,\xi)$. Пусть $w(\eta,\xi) = g(\lambda)$, где $\lambda = \eta - \rho\xi$, ρ постоянная , откуда $w_{\eta}' = g'$, $w_{\xi}' = -\rho g'$, $w_{\xi\xi}'' = \rho^{2}g''$, $w_{\eta\eta}'' = g''$, $w_{\eta\eta\eta}''' = g'''$, значит $-\rho g' + qg'' = rg'''$.

Решение этого уравнения $g(\lambda) = ce^{\frac{q-\sqrt{\delta^{2}-4r\rho}}{2r}\lambda} + c_{1}e^{\frac{q+\sqrt{\delta^{2}-4r\rho}}{2r}\lambda} + c_{2}$, это дает $w(\eta,\xi) = ce^{\frac{q-\sqrt{\delta^{2}-4r\rho}}{2r}(\eta-\rho\xi)} + c_{1}e^{\frac{q+\sqrt{\delta^{2}-4r\rho}}{2r}(\eta-\rho\xi)} + c_{2}$.

Это уравнение можно написать в виде $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(rw_{\eta\eta}'' - w_{\eta}'q\right) = \dfrac{\partial}{\partial\zeta}(w)$, получили закон сохранения какой физический смысл этого закона . $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial\zeta}(\ln t)_{t}' \Rightarrow t\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial\zeta}$, $w_{\zeta}' = w_{t}'e^{\zeta} = tw_{t}'$, $w_{\eta}' = w_{x}'e^{\eta} = xw_{x}'$, $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial\eta}(\ln x)_{x}' \Rightarrow x\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial\eta}$, пусть $\dfrac{\partial w}{\partial\eta} = \phi(\zeta,\eta) \Rightarrow \dfrac{\partial^{2}w}{\partial\eta^{2}} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} = x\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = x\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\left(\dfrac{\partial w}{\partial\eta}\right) = x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = x\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}x\right)$, $w_{xx}'' = \dfrac{w_{\eta\eta}'' - w_{\eta}'}{x^{2}} \Rightarrow w_{\eta\eta}'' = w_{\eta}' + w_{xx}''x^{2} = xw_{x}' + w_{xx}''x^{2}$. Подставим эти выражения в закон сохранения $x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(r\left(x(\ln u)_{x}' + (\ln u)_{xx}''x^{2}\right) - x(\ln u)_{x}'q\right) = t\dfrac{\partial}{\partial t}(w)$.

B интегральные уравнения .

Пример . $y(x)=B\int_1^x \frac{ty(t)}{x}dt$, значит $y(x)=e^{\int_1^x \frac{\ln\left(\frac{ty(t)}{x}\right)}{t}dt}$, тогда $\ln y(x)=\int_1^x \frac{\ln\left(\frac{ty(t)}{x}\right)}{t}dt$, дифференцируем по переменной x , найдем $(\ln y(x))'_x=\left(\int_1^x \frac{\ln\left(\frac{ty(t)}{x}\right)}{t}dt\right)'_x$,

$\frac{y'(x)}{y(x)}=\left(\int_1^x \frac{\ln(ty(t))}{t}dt\right)'_x-\left(\int_1^x \frac{\ln x}{t}dt\right)'_x=\frac{\ln(xy(x))}{x}-\left(\ln x\cdot\int_1^x \frac{dt}{t}\right)'_x=\frac{\ln(xy(x))}{x}-\left((\ln x)^2\right)'_x=\frac{\ln y(x)-\ln x}{x}$, значит $y'(x)=\frac{y(x)}{x}\ln\left(\frac{\ln y(x)}{x}\right)$. Решение этого уравнения $y(x)=xe^{cx+1}$.

Пример . $y(x)=\gamma B\int_1^x \frac{e^{t^2}}{e^x}y(t)\,dt$. Пусть $u(x)=B\int_1^x e^{t^2}y(t)\,dt$, это дает $B'u(x)=B'\left(B\int_1^x e^{t^2}y(t)\,dt\right)=e^{x^2}y(x)$, $y(x)=\frac{\gamma B\int_1^x e^{t^2}y(t)\,dt}{(e^x)^{\ln x-\ln 1}}=\frac{\gamma u(x)}{x^x}$, поэтому $B'u(x)=e^{x^2}\frac{\gamma u(x)}{x^x}$, $e^{\frac{xu'(x)}{u(x)}}=e^{x^2}\frac{\gamma u(x)}{x^x}$, отсюда $u'(x)=u(x)\left(x+\frac{\ln(\gamma u(x))}{x}-\ln x\right)$.

Решение этого уравнения $u(x)=\frac{e^{x\left(x+c-1-\frac{(\ln x)^2}{2}\right)}}{\gamma}$, $y(x)=\frac{e^{x\left(x+c-1-\frac{(\ln x)^2}{2}\right)}}{x^x}$.

Пример . $y(x)(B'y(x))^{\gamma_1(x)}(B''y(x))^{\gamma_2(x)}=f(x)$, $y(1)=c_0$, $B'y(1)=c_1$. Пусть $y(x)=e^{g(x)}$, откуда $B'y(x)=e^{xg'(x)}$, $B''y(x)=e^{(g'(x)+g''(x)x)x}$, тогда $g(x)+g'(x)\gamma_1(x)x+x(g'(x)+g''(x)x)\gamma_2(x)=\ln f(x)$,

$c_0=e^{g(1)}$, $g(1)=\ln c_0$, $B'y(1)=e^{\frac{y'(1)}{y(1)}}$, $c_1=e^{\frac{y'(1)}{y(1)}}$, $y'(1)=c_0\ln c_1$, $B'y(1)=e^{g'(1)}$, $g'(1)=\ln B'y(1)=\ln c_1$.

Линейное дифференциальное уравнение $g(x)+x(\gamma_1(x)+\gamma_2(x))g'(x)+x^2\gamma_2(x)g''(x)=\ln f(x)$, $g(x)+g'(x)\omega_1(x)+\omega_2(x)g''(x)=\ln f(x)$, где $\omega_2(x)=\gamma_2(x)x^2$, $\omega_1(x)=x(\gamma_2(x)+\gamma_1(x))$ эквивалентно уравнению $u(x)=\int_1^x k(x,t)g(t)\,dt+F(x)$,

где $u(x)=g''(x)$, $k(x,t)=-(\omega_1(x)+\omega_2(x)(x-t))$, $F(x)=\ln f(x)-c_0\omega_2(x)-c_1\omega_1(x)$.

Пример . Рассмотрим интегро дифференциальное уравнение $(B'y(x))^\gamma=(y(x))^r B\int_1^e sy(s)\,ds$, $y(1)=y_0$, это уравнение эквивалентно слудующему $\gamma y'(x)=\frac{y(x)}{x}\left(\int_1^e \frac{\ln(sy(s))}{s}ds+y(x)r\right)$. Найдем от этого уравнения B производную

$B'\left((B'y(x))^\gamma\right)=B'\left((y(x))^r B\int_1^e sy(s)\,ds\right)$, $(B''y(x))^\gamma=(B'y(x))^r$, потому что $B\int_1^e sy(s)\,ds$ это число . Пусть $y(x)=e^{g(x)}$, тогда $B'y(x)=e^{xg'(x)}$, $B''y(x)=e^{x(g'(x)+g''(x)x)}$. Получим уравнение в виде $(-r+\gamma)g'(x)+g''(x)x\gamma=0$.

Решение этого уравнения $g(x)=x^{\frac{r}{\gamma}}c+c_1$, $y(x)=e^{x^{\frac{r}{\gamma}}c+c_1}$, используя начальные условия найдем $y_0=e^{c_1+c}$, $(B'y(1))^{\gamma}=(y(1))^{r}B\int_1^e sy(s)\,ds=y_0^{\,r}B\int_1^e se^{c_1+c}ds=y_0^{\,r}e^{c_1+c}\frac{e^2-1}{2}$, $B'y(x)=e^{x^{\frac{r}{\gamma}}\frac{r}{\gamma}c}$, $B'y(1)=e^{\frac{r}{\gamma}c}$,

тогда найдем систему уравнений $\begin{cases} e^{r}c=y_0^{\,r}e^{c_1+c}\dfrac{e^2-1}{2} \\ e^{c+c_1}=y_0 \end{cases}$. Решение этой системы $c=y_0^{\,r+1}\frac{e^2-1}{2e^{r}}$, $c_1=\ln y_0-y_0^{\,r+1}\frac{e^2-1}{2e^{r}}$.

Пример . Рассмотрим интегро дифференциальное уравнение $B'y(x)=x^{n}B\int_1^e ty(t)\,dt$, $y(1)=1$, это уравнение эквивалентно следующему $xy'(x)=y(x)\left(n\ln x+\int_1^e\frac{\ln t+\ln y(t)}{t}dt\right)$.

Пусть $\gamma=B\int_1^e ty(t)dt$, значит $B'y(x)=x^{n}\gamma$, $B'y(x)=\gamma x^{n}$, $\frac{y'}{y}=\frac{\gamma n}{x}\ln x$, $\frac{dy}{y}=\frac{n\gamma}{x}\ln x dx$. Решение этого уравнения $y(x)=\gamma^{\ln x}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}c$, используя начальные условия найдем $y(x)=\gamma^{\ln x}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}$, тогда $\gamma=B\int_1^e t\gamma^{\ln t}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}dt$, $\gamma=1.27^{1+\ln\gamma}1.07^{n}$.

Это уравнение можно решить численно для любого значения n .

Другое решение . Найдем B интеграл от обеих частей уравнения $B\int B'y(x)dx=B\int\gamma x^{n}dx$, $y(x)=\gamma^{\ln x}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}c$, дальше решается аналогично .

Найдем собственные значения , собственные функции B дифференциального оператора $B'x(t)=\lambda x(t)$, тогда $tx'(t)=x(t)\ln(\lambda x(t))$, решение этого уравнения $x(t)=t^{\ln\lambda}t^{\frac{\ln t}{2}}c$. Пусть $x(1)=1$, $x(e)=r$, отсюда $c=1$, $\lambda=\ln r-\frac{1}{2}$,

собственные значения $\lambda=\ln r-\frac{1}{2}$, собственные функции $x(t)=t^{\ln\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{\ln t}{2}}$.

Рассмотрим B дифференциальный оператор $F:C[a,b]\to C[a,b]$, данный формулой $(Fx)t=B''x(t)=e^{\frac{tx(t)x'(t)+t^2x(t)x''(t)-t^2(x'(t))^2}{(x(t))^2}}$.

Найдем собственные значения , собственные функции этого оператора $e^{\frac{tx(t)x'(t)+t^2x(t)x''(t)-t^2(x'(t))^2}{(x(t))^2}}=\lambda x(t)$, $\lambda>0$. Пусть $x(t)=e^{g(t)}$, откуда $B''x(t)=e^{tg'(t)+g''(t)t^2}$, получим уравнение $g(t)+g'(t)t-t^2g''(t)-\rho=0$, где $\rho=\ln\lambda$.

Решение этого уравнения $g(t)=c_1t+\frac{c_2}{t}+\rho$, значит $x(t)=\frac{e^{c_1t+\frac{c_2}{t}}}{\lambda}$. Пусть граничные условия $x(1)=1$, $x(e)=r$, $r>0$, это дает $c_1=\ln\lambda-\frac{e\ln r\lambda^{1-e}}{1-e^2}$, $c_2=\frac{e\ln r\lambda^{1-e}}{1-e^2}$, этот оператор имеет непрерывный спектр собственных значений $\lambda>0$.

Решение этого уравнения $g(x)=x^{\frac{r}{\gamma}}c+c_1$, $y(x)=e^{x^{\frac{r}{\gamma}}c+c_1}$, используя начальные условия найдем $y_0=e^{c_1+c}$, $(B'y(1))^{\gamma}=(y(1))^{r}B\int_1^e sy(s)\,ds=y_0^{\,r}B\int_1^e se^{c_1+c}ds=y_0^{\,r}e^{c_1+c}\frac{e^2-1}{2}$, $B'y(x)=e^{x^{\frac{r}{\gamma}}\frac{r}{\gamma}c}$, $B'y(1)=e^{\frac{r}{\gamma}c}$,

тогда найдем систему уравнений $\begin{cases} e^{r}c=y_0^{\,r}e^{c_1+c}\dfrac{e^2-1}{2} \\ e^{c+c_1}=y_0 \end{cases}$. Решение этой системы $c=y_0^{\,r+1}\frac{e^2-1}{2e^r}$, $c_1=\ln y_0-y_0^{\,r+1}\frac{e^2-1}{2e^r}$.

Пример . Рассмотрим интегро дифференциальное уравнение $B'y(x)=x^{n}B\int_1^e ty(t)\,dt$, $y(1)=1$, это уравнение эквивалентно следующему $xy'(x)=y(x)\left(n\ln x+\int_1^e\frac{\ln t+\ln y(t)}{t}dt\right)$.

Пусть $\gamma=B\int_1^e ty(t)dt$, значит $B'y(x)=x^{n}\gamma$, $B'y(x)=\gamma x^{n}$, $\frac{y'}{y}=\frac{\gamma n}{x}\ln x$, $\frac{dy}{y}=\frac{n\gamma}{x}\ln x dx$. Решение этого уравнения $y(x)=\gamma^{\ln x}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}c$, используя начальные условия найдем $y(x)=\gamma^{\ln x}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}$, тогда $\gamma=B\int_1^e t\gamma^{\ln t}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}dt$, $\gamma=1.27^{1+\ln\gamma}1.07^{n}$.
Это уравнение можно решить численно для любого значения n .

Другое решение . Найдем B интеграл от обеих частей уравнения $B\int B'y(x)dx=B\int\gamma x^{n}dx$, $y(x)=\gamma^{\ln x}e^{\frac{(\ln x)^2}{2}n}c$, дальше решается аналогично .

Найдем собственные значения , собственные функции B дифференциального оператора $B'x(t)=\lambda x(t)$, тогда $tx'(t)=x(t)\ln(\lambda x(t))$, решение этого уравнения $x(t)=t^{\ln\lambda}t^{\frac{\ln t}{2}}c$. Пусть $x(1)=1$, $x(e)=r$, отсюда $c=1$, $\lambda=\ln r-\frac{1}{2}$,

собственные значения $\lambda=\ln r-\frac{1}{2}$, собственные функции $x(t)=t^{\ln\left(\ln r-\frac{1}{2}\right)}t^{\frac{\ln t}{2}}$.

Рассмотрим B дифференциальный оператор $F:C[a,b]\to C[a,b]$, данный формулой $(Fx)t=B''x(t)=e^{\frac{tx(t)x'(t)+t^2x(t)x''(t)-t^2(x'(t))^2}{(x(t))^2}}$.

Найдем собственные значения , собственные функции этого оператора $e^{\frac{tx(t)x'(t)+t^2x(t)x''(t)-t^2(x'(t))^2}{(x(t))^2}}=\lambda x(t)$, $\lambda>0$. Пусть $x(t)=e^{g(t)}$, откуда $B''x(t)=e^{tg'(t)+g''(t)t^2}$, получим уравнение $g(t)+g'(t)t-t^2g''(t)-\rho=0$, где $\rho=\ln\lambda$.

Решение этого уравнения $g(t)=c_1t+\frac{c_2}{t}-\rho$, значит $x(t)=\frac{e^{c_1t+\frac{c_2}{t}}}{\lambda}$. Пусть граничные условия $x(1)=1$, $x(e)=r$, $r>0$, это дает $c_1=\ln\lambda-\frac{e\ln r\lambda^{1-e}}{1-e^2}$, $c_2=\frac{e\ln r\lambda^{1-e}}{1-e^2}$, этот оператор имеет непрерывный спектр собственных значений $\lambda>0$.

G производная , ее свойства .

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция , определим G производную функции $y=f(x)$ по формуле $G'y=u(y',y,x)$,где $u(y',y,x)$ непрерывная функция .

Поэтому $G''y=G'(G'y), G^{(n)}y=G'\left(G^{(n-1)}y\right)$.

Рассмотрим функцию $u(y',y,x)=y'\mu(y)\varphi(x)$, то есть $G'y=y'\mu(y)\varphi(x)$. Пусть $x=g(t)$, где $t=h(x)=\int\frac{dx}{\varphi(x)},\ h'(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$, тогда $y=f(g(t))$.

Функции $x=g(t), t=h(x)$ обратные , тогда $\frac{dg}{dt}=\frac{1}{\frac{dh}{dx}}, x_t'=g_t'=\frac{1}{h_x'}=\frac{1}{t_x'}, g_{tt}''=-\frac{h_{xx}''}{\left(h_x'\right)^2}\frac{1}{h_x'}$, отсюда $\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$, потому что $\frac{df}{dg}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}$ то есть производная $\frac{df}{dg}$ эквивалентна производной $\frac{dy}{dx}$, откуда $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dg}{dt}$, значит $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dg}{dt}}\frac{dy}{dt}=\frac{dh}{dx}\frac{dy}{dt}=h_x'\frac{dy}{dt}=\frac{1}{g_t'}\frac{dy}{dt}\Leftrightarrow f_g'=\frac{1}{g_t'}$, $f_t', y_x'=\frac{1}{g_t'}y_t'$, $y_x'=h'(x)y_t'=\frac{1}{\varphi(x)}y_t'$.

Другое решение . $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}h_x'=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x_t'}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{g_t'}$ то есть $\frac{d}{dx}=\frac{d}{dt}\frac{1}{g_t'}$, нахождение производной по x эквивалентно нахожению производной по t умножением на $\frac{1}{g_t'}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(h_x'\frac{dy}{dt}\right)=h_{xx}''\frac{dy}{dt}+h_x'\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=h_{xx}''\frac{dy}{dt}+\left(h_x'\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{\left(g_t'\right)^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{g_{tt}''}{\left(g_t'\right)^2}\frac{1}{g_t'}\frac{dy}{dt}\ .$$

Другое решение . $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{g_t'}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{g_t'}\right)\frac{1}{g_t'}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{g_t'}+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{g_t'}\right)\right)\frac{1}{g_t'}=\frac{1}{\left(g_t'\right)^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{g_{tt}''}{\left(g_t'\right)^2}\frac{1}{g_t'}\frac{dy}{dt}$.

Это дает $G_x'y(x)=y_x'\mu(y)\varphi(x)=\frac{1}{\varphi(x)}y_t'(t)\mu(y(t))\varphi(x)=y_t'(t)\mu(y(t))$, поэтому выражение $G_x'y(x)$ не содержит в явном виде переменную t ,

откуда t не содержиться в G производной любого порядка $G_x^{(j)}y(x)$.

Пример . $G'y(x)=y'(x)\sin y(x)\dfrac{1}{\cos x},\mu(y)=\sin y,\varphi(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, отсюда $G''y=G'\left(\dfrac{y'\sin y}{\cos x}\right)=\left(\dfrac{y'\sin y}{\cos x}\right)'_x\sin\left(\dfrac{y'\sin y}{\cos x}\right)\dfrac{1}{\cos x}=$

$=\dfrac{\left(y''\sin y+(y')^2\cos y\right)\cos x-(-\sin x)\,y'\sin y}{\cos^2 x}\sin\left(\dfrac{y'\sin y}{\cos x}\right)\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{\left(y''\sin y+(y')^2\cos y\right)\cos x+y'\sin y\sin x}{\cos^3 x}\sin\left(\dfrac{y'\sin y}{\cos x}\right)$.

Пусть $t=h(x)=\int\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos x}}dx=\sin x$, $x=g(t)=\arcsin t$, $g'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, тогда $y_x'=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{(\arcsin t)'}=\dfrac{dy}{dt}\sqrt{1-t^2}=y_t'\sqrt{1-t^2}\Rightarrow$

$G_x'y(x)=y_t'(t)\sqrt{1-t^2}\sin y(t)\dfrac{1}{\cos(\arcsin t)}=y_t'(t)\sin y(t)$, $g''(t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)'=\dfrac{t}{\left(1-t^2\right)^{1.5}}$, $y_{xx}''=\dfrac{1}{\left(g_t'\right)^2}y_{tt}''-\dfrac{g_{tt}''}{\left(g_t'\right)^2}\dfrac{1}{g_t'}y_t'=\left(1-t^2\right)y_{tt}''-ty_t'$,

so $G_{xx}''y(x)=\dfrac{\left(\left(1-t^2\right)y_{tt}''-ty_t'\right)\sin y\sqrt{1-t^2}+\left(y_t'\right)^2\left(1-t^2\right)\cos y\sqrt{1-t^2}+ty_t'\sin y\sqrt{1-t^2}}{\left(1-t^2\right)^{1.5}}\sin\left(\dfrac{y_t'\sqrt{1-t^2}\sin y}{\sqrt{1-t^2}}\right)=\left(y_{tt}''\sin y+\left(y_t'\right)^2\cos y\right)\sin\left(y_t'\sin y\right)$

Другое решение $G_{xx}''y(x)=G_x'\left(G_x'y(x)\right)=G_x'\left(y_t\sin y(t)\right)=\left(y_t'\sin y(t)\right)_x'\sin\left(y_t'\sin y(t)\right)\dfrac{1}{\cos x}=$

$=\left(y_{tt}''t_x'\sin y(t)+y_t'y_t't_x'\cos y(t)\right)\sin\left(y_t'\sin y(t)\right)\dfrac{1}{\cos x}=\left(y_{tt}''\sin y(t)+\left(y_t'\right)^2\cos y(t)\right)\cos x\sin\left(y_t'\sin y(t)\right)\dfrac{1}{\cos x}=\left(y_{tt}''\sin y+\left(y_t'\right)^2\cos y\right)\sin\left(y_t'\sin y\right)$.

Рассмотрим уравнение $G''y+a_1G'y+a_2y=0$ решение этого уравнения может быть найденно в виде $y=q(t)$, где $t=h(x)=\int\dfrac{1}{\varphi(x)}dx$

получим дифференциальное уравнение которое не содержит в явном виде независимую переменную .

Пусть $y=r(x)$ решение дифференциального уравнения $G'y(x)=y(x)$ то есть $G'r(x)=r(x)$ тогда $G''r(x)=G'\left(G'r(x)\right)=G'r(x)=r(x),G^{(n)}r(x)=r(x)$.

Пусть $G'f(cx)=c^k f(x),G'cf(x)=c^p f(x)$ значит $G''f(cx)=G'c^k f(x)=c^{kp}f(x)$.

Рассмотрим уравнение $G''y+a_1G'y+a_2y=0$ найдем решение в виде $y=r(cx)$ тогда получим алгебраическое уравнение $c^{kp}+a_1c^k+a_2=0$.

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция , определим LT производную функции $y=f(x)$ по формуле $LT'=\frac{x^n f'(x)}{f(x)}$.

Для $n=0$ получим $LT'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, для $n=1$ найдем L derivative $LT'=\frac{xf'(x)}{f(x)}$.

$$LT'c=\frac{x^n c'}{c}=0\ ,\ LT'cf(x)=\frac{x^n\left(cf(x)\right)'}{cf(x)}=\frac{x^n cf'(x)}{cf(x)}=\frac{x^n f'(x)}{f(x)}=LT'f(x)\ ,\ LT'f(ax)=\frac{x^n f_{ax}'(ax)a}{f(ax)}=aLT_{ax}'f(ax)\ ,$$

$$LT'f\left(g(x)\right)=\frac{x^n f_g'(g)g_x'(x)}{f(g)}=\frac{g(x)^n f_g'(g)}{f(g)}\frac{x^n g_x'(x)}{g(x)^n}=LT_g'f(g)LT_x'g(x)\frac{1}{g(x)^{n-1}}\ ,\ LT'f'(x)=\frac{x^n\left(f'(x)\right)'}{f'(x)}=\frac{x^n f''(x)}{f'(x)}\ ,$$

$$LT'(fg)=\frac{x^n(fg)'}{fg}=\frac{x^n(f'g+g'f)}{fg}=\frac{x^n f'}{f}+\frac{x^n g'}{g}=LT'f+LT'g\ ,\ LT'\left(\frac{f}{g}\right)=LT'f-LT'g\ .$$

$$LT''f(x)=LT'\left(LT'f(x)\right)=\frac{x^n\left(LT'f\right)_x'}{LT'f}=\frac{x^n\left(\frac{x^n f'}{f}\right)_x'}{\frac{x^n f'}{f}}=\frac{\frac{\left(nx^{n-1}f'+x^n f''\right)-x^n f'f'}{f^2}}{\frac{f'}{f}}=\frac{x^{n-1}\left(nff'+xf''f-x(f')^2\right)}{ff'}=x^{n-1}\left(n+x\frac{f''}{f'}-x\frac{f'}{f}\right).$$

$$LT''f(x)=x^{n-1}\left(n+x\left((\ln f')'-(\ln f)'\right)\right)=x^{n-1}\left(n+x(\ln f'-\ln f)'\right)=x^{n-1}\left(n+x\left(\ln\frac{f'}{f}\right)'\right)=x^{n-1}\left(n+x\left(\ln\frac{x^n f'}{f}\frac{1}{x^n}\right)'\right)=x^{n-1}\left(n+x(\ln LT'f-n\ln x)'\right)=x^{n-1}\left(n+x\left(\ln\frac{LT'f}{x^n}\right)'\right)=$$

$$=nx^{n-1}+x^n\left(\ln\frac{LT'f}{x^n}\right)'$$. $$LT''f(x)=x^{n-1}\left(n+\frac{1}{x^{n-1}}\left(\frac{x^n f''}{f'}-\frac{x^n f'}{f}\right)\right)=x^{n-1}\left(n+x^{1-n}\left(LT'f'-LT'f\right)\right)=nx^{n-1}+LT'\frac{f'}{f}$$ so $$LT'\frac{f'}{f}=x^n\left(\ln\frac{LT'f}{x^n}\right)'$$.

Пусть $t=h(x)=\int\frac{dx}{x^n}=\frac{x^{1-n}}{1-n}$, $x=g(t)=\left((1-n)t\right)^{\frac{1}{1-n}}$, тогда $y_x'=\frac{1}{g_t'}y_t'=\frac{1}{(1-n)^{\frac{1}{1-n}}\frac{1}{1-n}t^{\frac{1}{1-n}-1}}y_t'=\frac{1}{(1-n)^{\frac{n}{1-n}}t^{\frac{n}{1-n}}}y_t'$, тогда $LT_x'y(x)=\frac{x^n y_x'}{y}=\frac{(1-n)^{\frac{n}{1-n}}t^{\frac{n}{1-n}}\frac{1}{(1-n)^{\frac{n}{1-n}}t^{\frac{n}{1-n}}}}{y}y_t'=\frac{y_t'}{y}$.

$$LT_{xx}''y(x)=LT_x'\left(LT_x'y\right)=LT_x'\left(\frac{y_t'}{y}\right)=\frac{x^n\left(\frac{y_t'}{y}\right)_x'}{\frac{y_t'}{y}}=\frac{x^n\frac{y_{tt}''t_x'y-y_t'y_t't_x'}{y^2}}{\frac{y_t'}{y}}=\frac{x^nt_x'\left(y_{tt}''y-\left(y_t'\right)^2\right)}{y_t'y}=\frac{x^n\left(\frac{x^{1-n}}{1-n}\right)_x'\left(y_{tt}''y-\left(y_t'\right)^2\right)}{y_t'y}=\frac{y_{tt}''}{y_t'}-\frac{y_t'}{y}.$$

Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет свойству $\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{1}{x_1-x_0}}=c$, отсюда $p'f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)}{f(x_0)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=c$

Пусть $s(t)$ уравнение движения тела , p средней скоростью назовем выражение $v_{ap}=\left(\frac{s(t_2)}{s(t_1)}\right)^{\frac{1}{t_2-t_1}}$, instantaneous L скорость $v_p(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\frac{s(t+\Delta t)}{s(t)}\right)^{\frac{1}{\Delta t}}$, тогда $v_p(t)=p's(t)$.

Рассмотрим движение $v_p(t)=v_{0p}, s(0)=s_0$ тогда $s(t)=P\int v_p(t)\,dt=P\int v_{0p}dt=cv_{0p}{}^t$, $s_0=cv_{0p}{}^0=c$, $s(t)=s_0v_{0p}{}^t$.

Откуда уравнение движения $s(t)=s_0v_{0p}{}^t$ происходит с постоянной p скоростью , $p's(t)=v_{0p}, e^{\frac{s'}{s}}=v_{0p}, \frac{s'}{s}\ln v_{0p}, \frac{ds}{s}=\ln v_{0p}dt$, $\ln cs(t)=t\ln v_{0p}, s(t)=cv_{0p}{}^t$,

p ускорение $a_p(t)=p'v_p(t)=p''s(t)$ Рассмотрим движение $a_p(t)=a_{0p}$, тогда $p''s(t)=a_{0p}, v_p=P\int a_{0p}dt=ca_{0p}{}^t, v_p(0)=v_{0p}$,тогда $v_{0p}=ca_{0p}{}^0=c, v_p=v_{0p}a_{0p}{}^t$,

$s(t)=P\int v_p(t)\,dt=P\int v_{0p}a_{0p}{}^t dt=cv_{0p}{}^ta_{0p}{}^{\frac{t^2}{2}}, s(0)=s_0$, $s(t)=P\int v_p(t)\,dt=P\int v_{0p}a_{0p}{}^t dt=cv_{0p}{}^ta_{0p}{}^{\frac{t^2}{2}}, s(0)=s_0$, значит $s_0=cv_{0p}{}^0a_{0p}{}^0=c, s(t)=s_0v_{0p}{}^ta_{0p}{}^{\frac{t^2}{2}}$.

Это дает что уравнение движения $s(t)=s_0v_{0p}{}^ta_{0p}{}^{\frac{t^2}{2}}$ происходит с постоянным p ускорением , $p''s(t)=a_{0p}$.

Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет свойству $\log_{\frac{x_1}{x_0}}\frac{f(x_1)}{f(x_0)}=\frac{\ln\frac{f(x_1)}{f(x_0)}}{\ln\frac{x_1}{x_0}}=c, \frac{x_1}{x_0}=r, x_1=rx_0$ значит $L'f(x)=\lim\limits_{r\to 1}\frac{\ln\frac{f(rx_0)}{f(x_0)}}{\ln r}=c$

Пусть $s(t)$ уравнение движения тела , L средней скоростью назовем выражение $v_{aL} = \dfrac{\ln \dfrac{s(t_2)}{s(t_1)}}{\ln \dfrac{t_2}{t_1}}$, мгновенная скорость $v_L = \lim\limits_{r \to 1} \dfrac{\ln \dfrac{s(rt_0)}{s(t_0)}}{\ln r}$, тогда $v_L = L's(t)$.

Рассмотрим движение $v_L(t) = v_{0L}, s(1) = s_0$ тогда $s(t) = L\int v_L(t)\,dt = L\int v_{0L}\,dt = ct^{v_{0L}}$, $s_0 = c1^{v_{0L}}, c = s_0$, найдем $s(t) = s_0 t^{v_{0L}}$.

Поэтому движение тела согласно уравнению $s(t) = s_0 t^{v_{0L}}$ происходит с постоянной L скоростью .

L ускорение $a_L(t) = L'v_L(t) = L''s(t)$. Рассмотрим движение $a_L(t) = a_{0L}$ then $L''s(t) = a_{0L}, v_L(t) = L\int a_{0L}\,dt = ct^{a_{0L}}, v_L(1) = v_{0L}, v_{0L} = c1^{a_{0L}}, c = v_{0L}$, тогда $v_L(t) = v_{0L}t^{a_{0L}}$,

$s(t) = L\int v_L(t)\,dt = L\int v_{0L}t^{a_{0L}}\,dt = \left(L\int t^{a_{0L}}\,dt\right)^{v_{0L}} = \left(ce^{\frac{t^{a_{0L}}}{a_{0L}}}\right)^{v_{0L}} = c^{v_{0L}}e^{\frac{v_{0L}t^{a_{0L}}}{a_{0L}}}, s(1) = s_0, s_0 = c^{v_{0L}}e^{\frac{v_{0L}1^{a_{0L}}}{a_{0L}}} = c^{v_{0L}}e^{\frac{v_{0L}}{a_{0L}}}, c^{v_{0L}} = \dfrac{s_0}{e^{\frac{v_{0L}}{a_{0L}}}}$, откуда $s(t) = s_0 e^{\frac{v_{0L}}{a_{0L}}\left(t^{a_{0L}}-1\right)}$. Значит движение тела согласно

уравнению $s(t) = s_0 e^{\frac{v_{0L}}{a_{0L}}\left(t^{a_{0L}}-1\right)}$ происходит с постоянным L ускорением , $L''s(t) = a_{0L}$.

Эластичность функции $y = f(x)$ по переменной x называется предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \dfrac{x}{y} f'(x) = E_x(y)$.

Аналогично для функции k переменных $y = f(x_1, .., x_k)$ имеем $E_{x_j}(y) = \dfrac{x_j}{y} f'_{x_j}(x)$, это дает $E_{x_j}(y) = L_{x_j}'y$. Пусть $y = ax_1^{n_1} \bullet .. \bullet x_k^{n_k}$ тогда получим $E_{x_j}(y) = n_j$.

Рассмотрим p дифференциальный оператор $F: \ C[a,b] \to C[a,b]$, данный формулой $(Fx)t = p(x(t)) = p'x(t) = e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}$. Пусть последовательность функций $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$,

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} \frac{|\sin nt|}{n} = 0$, последовательность $(Fx_n)t = e^{\frac{\frac{\cos nt}{\sin nt}}{n}} = e^{\frac{n}{\tan nt}}$ не сходиться к 0 , откуда этот оператор не является непрерывным .

Рассмотрим L дифференциальный оператор $F: \ C[a,b] \to C[a,b]$, данный по формуле $(Fx)t = L(x(t)) = L'x(t) = \frac{tx'(t)}{x(t)}$. Пусть последовательность функций $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$,

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} \frac{|\sin nt|}{n} = 0$, последовательность $(Fx_n)t = \frac{t\cos nt}{\frac{\sin nt}{n}} = \frac{nt}{\tan nt}$ не сходиться к 0 , отсюда этот оператор не является непрерывным .

Найдем собственное значение , собственная функция L дифференциального оператора $L(x(t)) = \lambda x(t)$ откуда $x' = \lambda \frac{x^2}{t}$ решение этого уравнения $x = \frac{-1}{\lambda \ln|t| + c}$.

Пусть $x(1) = -1, x(e) = \frac{1}{r}$ тогда $c = 1$, $\lambda = -1 - r$, значит значение $\lambda = -1 - r$, собственная функция $y = \frac{1}{(1+r)\ln|t| - 1}$.

Найдем собственное значение , собственнная функция p дифференциального оператора $p(x(t)) = \lambda x(t)$, это дает $x' = x\ln(\lambda x)$, решение этого уравнения $x = \frac{1}{\lambda} e^{ce^t}$.

Пусть $x(0) = 1, x(1) = r$, тогда $c = \frac{\ln r}{e-1}, \lambda = r^{\frac{1}{e-1}}$ собственное значение is $\lambda = r^{\frac{1}{e-1}}$, собственная функция $y = r^{\frac{e^t-1}{e-1}}$.

Рассмотрим p дифференциальный оператор $F: C[a,b] \to C[a,b]$, данный по формуле $(Fx)t = p''x(t) = e^{\frac{x''(t)x(t) - (x'(t))^2}{(x(t))^2}}$. Найдем собственное значение , собственнная функция $e^{\frac{x''(t)x(t) - (x'(t))^2}{(x(t))^2}} = \lambda x(t)$, $\lambda > 0$,

тогда $\frac{x''(t)x(t) - (x'(t))^2}{(x(t))^2} = \ln x(t) + \ln\lambda$. Пусть $x(t) = e^{\phi(t)}$, это дает $x'(t) = \phi'(t)e^{\phi(t)}$, $x''(t) = \left((\phi'(t))^2 + \phi''(t)\right)e^{\phi(t)}$, получим уравнение $\phi''(t) - \phi(t) - \rho = 0$, где $\rho = \ln\lambda$. Решение этого уравнения $\phi(t) = c_1 e^{-t} + e^t c_2 - \rho$,

собственная функция $x(t) = e^{c_2 e^t + e^{-t} c_1 - \rho}$. Пусть граничные условия $x(0) = 1$, $x(1) = r$, тогда найдем $c_1 = \rho - \frac{\left(\ln r + \rho - \frac{\rho}{e}\right)e}{e^2 - 1}$, $c_2 = \frac{\left(\ln r + \rho - \frac{\rho}{e}\right)}{e^2 - 1}$, этот оператор имеет непрерывный спектр собственых значений $\lambda > 0$.

Рассмотрим L дифференциальный оператор $F : C[a,b] \to C[a,b]$, данный по формуле $(Fx)t = L''x(t) = 1 + \frac{tx''}{x'} - \frac{tx'}{x}$. Найдем собственное значение , собственнная функция $1 + \frac{tx''(t)}{x'(t)} - \frac{tx'(t)}{x(t)} = \lambda x(t)$. Пусть $x(t) = q(\ln t)$,

тогда $\frac{q''}{q'} - \frac{q'}{q} - \lambda q = 0$, $q' = u(q)$, отсюда $q'' = u'u$, уравнение трансформируется к уравнению $\frac{u'u}{u} - \frac{u}{q} - \lambda q = 0$, $u' - \frac{u}{q} - \lambda q = 0$. Пусть $u(q) = \alpha(q)\beta(q)$, значит $\alpha'\beta + \beta'\alpha - \frac{\alpha\beta}{g} - \lambda q = 0$, $\alpha'\beta + \alpha\left(\beta' - \frac{\beta}{q}\right) - \lambda q = 0$, $\frac{d\beta}{dq} = \frac{\beta}{q}$ это дает

$\beta = q$, получим $\alpha' q - \lambda q = 0$, $q \neq 0$, $\alpha' = \lambda$, $\alpha = \lambda q + c \Rightarrow u = (\lambda q + c)q = \lambda q^2 + qc$, находим $\frac{dq}{d\xi} = \lambda q^2 + qc$, $\frac{dq}{\lambda q^2 + qc} = d\xi$, где $\xi = \ln x$, тогда $\frac{1}{c}\ln\frac{q}{\lambda q + c} = \xi + c_1$, $\ln\frac{q}{\lambda q + c} = c\xi + c_1$, $\frac{q}{\lambda q + c} = e^{c\xi}c_1$, $q = \frac{e^{c\xi}cc_1}{1 - \lambda e^{c\xi}c_1}$, поэтому

$x(t) = \frac{e^{c\ln t}cc_1}{1 - \lambda e^{c\ln t}c_1} = \frac{t^c cc_1}{1 - \lambda t^c c_1}$.

Другое решение . $L''x = \lambda x$. Пусть $L'x = u(x)$, тогда $L''y = L'_x u(x) L'_t x(t) = L'u(x)u(x)$, тогда $L'u(x)u(x) = \lambda x$, $\frac{xu'}{u}u = \lambda x$, $u' = \lambda$, $\frac{du}{dx} = \lambda$, $u = \lambda x + c$, $L'x = \lambda x + c$, $\frac{tx'}{x} = \lambda x + c$, поэтому $t\frac{dx}{dt} = \lambda x^2 + cx$, $\frac{dx}{x(\lambda x + c)} = \frac{dt}{t}$, отсюда

$\frac{1}{c}\ln\frac{x}{\lambda x + c} = \ln tc_1$, откуда $\frac{x}{\lambda x + c} = (tc_1)^c = t^c c_1$, $x = \frac{t^c cc_1}{1 - \lambda t^c c_1}$. Граничные условия $x(1) = 1$, $x(R) = 2$, где $R > 1$ произвольное число , если $\lambda = 0$, значит $x = t^c cc_1$, применение первого граничного условия дает $1 = cc_1$,

применение второго граничного условия дает , $2 = R^c cc_1$, значит $R^c = 2$, $c = \log_R 2$, тогда собственные функции $x = t^{\log_R 2}$. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $\frac{cc_1}{1 - \lambda c_1} = 1$, $2 = \frac{R^c cc_1}{1 - \lambda R^c c_1}$, найдем уравнение $R^c(c + 2\lambda) - 2(\lambda + c) = 0$,

это уравнение можно решить численно , $c_1 = \frac{1}{c + \lambda}$. Собственные значения $\lambda = \frac{c(2 - R^c)}{2(R^c - 1)}$, собственные функции $x = \frac{t^c cc_1}{1 - \lambda t^c c_1}$. Найдем L интеграл от этих функций

$L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt}$, $\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt = \int_1^R \frac{t^{c-1}cc_1}{1 - \lambda t^c cc_1}dt = \frac{1}{\lambda}\int_1^R \frac{d(1 - \lambda t^c cc_1)}{1 - \lambda t^c cc_1}dt = \frac{1}{\lambda}\ln(1 - \lambda t^c cc_1)_1^R = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1 - \lambda cc_1}{1 - \lambda R^c cc_1}\right)$, $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1 - \lambda cc_1}{1 - \lambda R^c cc_1}\right)} = \left(\frac{1 - \lambda cc_1}{1 - \lambda R^c cc_1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Найдем решение уравнения $\frac{q''}{q'} - \frac{q'}{q} - \lambda q = 0$, $q''q - (q')^2 - \lambda q' q^2 = 0$, где $q = q(t)$ методом tanh . Рассмотрим однородный баланс между выражениями $q''q$,$(q')^2$, $q'q^2$ получим $(q''q)((2+n)+n) = ((q')^2)(1+n)^2 = (q'q^2)(1+n+2n)$,

тогда $n = 1$. Рассмотрим новую независимую переменную в виде $\phi(\xi) = \tanh(\xi)$. Решение данного уравнения можно представить в виде $q(\xi) = \Phi(\phi) = \sum_{j=0}^{n} a_j\phi^j = a_0 + a_1\phi$, что приводит к изменению переменной

$\frac{dq}{d\xi} = (1 - \phi^2)\frac{d\Phi}{d\phi}$, $\frac{d^2q}{d\xi^2} = -2(1 - \phi^2)\phi\frac{d\Phi}{d\phi} + (1 - \phi^2)^2\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$, $\frac{d\Phi}{d\phi} = a_1$, $\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$. Подставим эти выражения в уравнение $(1 - \phi^2)^2\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\Phi - 2\phi(1 - \phi^2)\frac{d\Phi}{d\phi}\Phi - (1 - \phi^2)^2\left(\frac{d\Phi}{d\phi}\right)^2 - \lambda(1 - \phi^2)\frac{d\Phi}{d\phi}\Phi^2 = 0$.

Рассмотрим однородный баланс между выражениями $\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\Phi$, $\frac{d\Phi}{d\phi}\Phi^2$ is $\left(\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\Phi\right)((n+2)+n) = \left(\frac{d\Phi}{d\phi}\Phi^2\right)((n+1)+2n)$, отсюда $n = 1$.тогда групперуя члены с одинаковыми степенями ϕ получим многочлен от ϕ , приравняем каждый

коэффициент этого полинома к 0 , получим переопределенную систему алгебраических уравнений . Откуда $q(t) = \Phi(\phi) = a_0 + a_1\phi$, $\frac{d\Phi}{d\phi} = a_1$, $\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$, после подстановки найдем уравнение

$\left(1-\phi^2\right)^2 0\Phi - 2\phi\left(1-\phi^2\right)a_1\left(a_0+a_1\phi\right) - \left(1-\phi^2\right)^2 a_1^{\ 2} - \lambda\left(1-\phi^2\right)a_1\left(a_0+a_1\phi\right)^2 = 0$, $\left(-2\left(1-\phi^2\right)\phi a_1 + \left(1-\phi^2\right)^2 0\right)\left(a_0+a_1\phi\right) - \left(\left(1-\phi^2\right)a_1\right)^2 - \lambda\left(1-\phi^2\right)a_1\left(a_0+a_1\phi\right)^2 = 0$, $2\phi a_0 + 2\phi^2 a_1 + a_1 - a_1\phi^2 + \lambda a_0^{\ 2} + 2\lambda a_0 a_1\phi + \lambda a_1^{\ 2}\phi^2 = 0$, $\begin{cases} a_1 + \lambda a_0^{\ 2} = 0 \\ 2a_0 + 2\lambda a_0 a_1 = 0 \\ 2a_1 - a_1 + \lambda a_1^{\ 2} = 0 \end{cases}$.

Решение этой системы $a_0 = \pm\frac{1}{\lambda}$, $a_1 = -\frac{1}{\lambda}$, тогда $q(\xi) = \Phi(\phi) = -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\tanh\xi$, $q(\xi) = \Phi(\phi) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\tanh\xi$.

Проверка $q = \frac{1}{\lambda}\left(1-\tanh\xi\right)$, $q' = \frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}$, $q'' = \frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}$,

$\frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}\frac{1}{\lambda}\left(1-\tanh\xi\right) - \left(\frac{-1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)^2 - \lambda\left(\frac{-1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\left(1-\tanh\xi\right)\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi}\left(1-\tanh\xi\right) - \frac{1}{\cosh^2\xi} + \left(1-\tanh\xi\right)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi} - \frac{2\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi} - \frac{1}{\cosh^2\xi} + 1 - \frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi} + \tanh^2\xi\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(-\frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi} - \frac{1}{\cosh^2\xi} + 1\right) =$

$= \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\frac{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi - 1}{\cosh^2\xi} = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\frac{1-1}{\cosh^2\xi} = 0$. $q = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\tanh\xi\right)$, $q' = -\frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}$, $q'' = \frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}$, $\frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}\left(-\frac{1}{\lambda}\left(1+\tanh\xi\right)\right) - \left(\frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)^2 - \lambda\left(-\frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)\left(-\frac{1}{\lambda}\left(1+\tanh\xi\right)\right)^2 =$

$= \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{-2\sinh\xi}{\cosh\xi}\left(1+\tanh\xi\right) - \frac{1}{\cosh^2\xi} + \left(1+\tanh\xi\right)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{-2\sinh\xi}{\cosh\xi} - \frac{2\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi} - \frac{1}{\cosh^2\xi} + 1 + \frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi} + \frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi}\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\frac{-\sinh^2\xi - 1 + \cosh^2\xi}{\cosh^2\xi} = 0$.

Это дает $x(t) = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\tanh(\ln t)\right) = -\frac{1}{\lambda}\frac{2t^2}{t^2+1}$, собственные функции $x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(1-\tanh(\ln t)\right) = \frac{1}{\lambda}\frac{2}{t^2+1}$. Найдем L интеграл от этой функции $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt}$, $\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt = \int_1^R \frac{2}{t\left(t^2+1\right)}dt = \ln\frac{2R^2}{R^2+1}$, поэтому $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2R^2}{R^2+1}} = \left(\frac{2R^2}{R^2+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Отсюда $x(t) = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\tanh(\ln t)\right) = -\frac{1}{\lambda}\frac{2t^2}{t^2+1}$, собственные функции $x(t) = \frac{1}{\lambda}\left(1-\tanh(\ln t)\right) = \frac{1}{\lambda}\frac{2}{t^2+1}$. Найдем L от этой функции $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt}$, $\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt = \int_1^R \frac{2}{t\left(t^2+1\right)}dt = \ln\frac{2R^2}{R^2+1}$, откуда $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2R^2}{R^2+1}} = \left(\frac{2R^2}{R^2+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Пример . Найдем собственные значения , собственные функции данного оператора $\Phi\left[y(t)\right] = e^{\int_0^t \ln y(s)ds}$, $e^{\int_0^t \ln y(s)ds} = \lambda y(t)$, дифференцируем по t данное уравнение $\left(e^{\int_0^t \ln y(s)ds}\right)' = \lambda y'(t)$, $e^{\int_0^t \ln y(s)ds}\ln y(t) = \lambda y'(t)$, тогда $\lambda y(t)\ln y(t) = \lambda y'(t)$,

$\lambda \neq 0$, $y'(t) = y(t)\ln y(t)$. Решение данного уравнения $y(t) = e^{e^t c}$. Найдем $e^{\int_0^0 \ln y(s)ds} = \lambda y(0)$, $\lambda y(0) = 1$, $y(0) = \lambda^{-1}$, отсюда $\lambda^{-1} = e^{e^0 c}$, $c = \ln\lambda^{-1}$, $y(t) = \lambda^{-e^t}$, этот оператор имеет непрерывный спектр .

Пример . Найдем собственные значения , собственные функции $\Phi\left[y(t)\right]=e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}$, $e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}=\lambda y(t)$, дифференцируем по t данное уравнение $\left(e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}\right)'=\lambda y'(t)$, $e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}\frac{y(t)}{t}=\lambda y'(t)$, тогда $\frac{y(t)}{t}y(t)\lambda=\lambda y'(t)$, $\lambda\neq 0$, $y'(t)=\frac{y^2(t)}{t}$.

Решение данного уравнения $y(t)=\frac{1}{c-\ln t}$. Найдем $e^{\int_1^1 \frac{y(s)}{s}ds}=\lambda y(1)$, $\lambda y(1)=1$, $y(1)=\lambda^{-1}$, откуда $\lambda^{-1}=\frac{1}{c-\ln 1}$, $c=\lambda$, $y(t)=\frac{1}{\lambda-\ln t}$, этот оператор имеет непрерывный спектр .

Пример . Найдем собственные значения , собственные функции $\Phi\left[y(t)\right]=e^{\int_1^t \frac{\ln y(s)}{s}ds}$, $e^{\int_1^t \frac{\ln y(s)}{s}ds}=\lambda y(t)$, дифференцируем по t данное уравнение $\left(e^{\int_1^t \frac{\ln y(s)}{s}ds}\right)'=\lambda y'(t)$, $e^{\int_1^t \frac{\ln y(s)}{s}ds}\frac{\ln y(t)}{t}=\lambda y'(t)$, тогда $\frac{\ln y(t)}{t}y(t)\lambda=\lambda y'(t)$, $\lambda\neq 0$,

$y'(t)=y(t)\frac{\ln y(t)}{t}$. Решение данного уравнения $y(t)=e^{tc}$. Найдем $e^{\int_1^1 \frac{\ln y(s)}{s}ds}=\lambda y(1)$, $\lambda y(1)=1$, $y(1)=\lambda^{-1}$, отсюда $\lambda^{-1}=e^{c}$, $c=-\ln\lambda$, $y(t)=\lambda^{-t}$, этот оператор имеет непрерывный спектр .

Пусть $y_1(t)=\lambda_1^{-t}$, $y_2(t)=\lambda_2^{-t}$ две собственные функции оператора , тогда $y(t)=y_2(t)\,y_1(t)=\lambda^{-t}$ собственная функция , $y^{-1}(t)=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-t}$ собственная функция , $y^{-1}(t)\,y(t)=1$ собственная функция . Поэтому множество собственных функций данного оператора образуют мультипликативную группу .

Пример . Найдем резольвенту оператора $\Phi\left[y(t)\right]=e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}$, то есть оператор обратный оператору $\Phi\left[y(t)\right]-\lambda J$, $R_\lambda(\Phi)=\left(\Phi\left[y(t)\right]-\lambda J\right)^{-1}$. Решим уравнение $e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}-\lambda y(t)=u(t)$, обозначим $g(t)=e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}$,

тогда $g'(t)=e^{\int_1^t \frac{y(s)}{s}ds}\frac{y(t)}{t}=\frac{y(t)}{t}g(t)$, $y(t)=\frac{g'(t)}{g(t)}t$. Подставим в уравнение $\lambda t\frac{g'(t)}{g(t)}-g(t)=-u(t)$. Решение данного уравнения $g(t)=\dfrac{e^{\int\left(-\frac{u(t)}{\lambda t}\right)dt}}{\int\left(-\dfrac{e^{\int\left(-\frac{u(t)}{\lambda t}\right)dt}}{\lambda t}\right)dt+c}$, где $c=g(1)=e^0=1$, $y(t)=\frac{g'(t)}{g(t)}t$,

$$g'(t)=-\frac{u(x)e^{\int\left(-\frac{u(x)}{x}\right)dx}}{x\left(\int\left(-\dfrac{e^{\int\left(-\frac{u(x)}{x}\right)dx}}{x}\right)dx+1\right)}+\frac{\left(e^{\int\left(-\frac{u(x)}{x}\right)dx}\right)^2}{\left(\int\left(-\dfrac{e^{\int\left(-\frac{u(x)}{x}\right)dx}}{x}\right)dx+1\right)^2 x}$$, $R_\lambda(\Phi)\left[u(t)\right]=y(t)$.

Пусть X функция метрического пространства $X=C[a,b]=\left(f:[a,b]\to C: f\text{ непрерывная}\right)$ метрика $d\left(x(t),y(t)\right)=\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|$

Рассмотрим отображение $Tx(t)=L\int_a^b tx(s)\,ds=e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}$, $T:\ L_2[a,b]\to C[a,b]$, отображение $T:\ X\to Y$ непрерывно в точке $x_0(t)$, если $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)$ такое что $\forall x(t)\in X$, из $\left\|x(t)-x_0(t)\right\|_X<\delta\Rightarrow\left\|Tx(t)-Tx_0(t)\right\|_Y<\varepsilon$. Пусть $x_0(t)=0$,

тогда $\left\|Tx(t)-Tx_0(t)\right\|_{C[a,b]}=\max_{t\in[a,b]}\left|e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}-e^{\int_a^b t\frac{0}{s}ds}\right|=\max_{t\in[a,b]}\left|e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}-1\right|\le\max_{t\in[a,b]}\left|e^{|t|\int_a^b\frac{|x(s)|}{s}ds}-1\right|=\left|e^{b\int_a^b\frac{|x(s)|}{s}ds}-1\right|$, неравенство Щварца $\int_a^b\frac{|x(s)|}{s}ds\le\sqrt{\int_a^b|x(s)|^2\,ds}\sqrt{\int_a^b\frac{1}{s^2}\,ds}=\left\|x(t)\right\|_{L_2[a,b]}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$, $\left\|Tx(t)-Tx_0(t)\right\|_{C[a,b]}\le\left|e^{b\left\|x(t)\right\|_{L_2[a,b]}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}-1\right|$.

$(1-\phi^2)^2 0\Phi - 2\phi(1-\phi^2)a_1(a_0+a_1\phi) - (1-\phi^2)^2 a_1^2 - \lambda(1-\phi^2)a_1(a_0+a_1\phi)^2 = 0$, $\left(-2(1-\phi^2)\phi a_1 + (1-\phi^2)^2 0\right)(a_0+a_1\phi) - \left((1-\phi^2)a_1\right)^2 - \lambda(1-\phi^2)a_1(a_0+a_1\phi)^2 = 0$, $2\phi a_0 + 2\phi^2 a_1 + a_1 - a_1\phi^2 + \lambda a_0^2 + 2\lambda a_0 a_1\phi + \lambda a_1^2\phi^2 = 0$, $\begin{cases} a_1 + \lambda a_0^2 = 0 \\ 2a_0 + 2\lambda a_0 a_1 = 0 \\ 2a_1 - a_1 + \lambda a_1^2 = 0 \end{cases}$.

Решение этой системы $a_0 = \pm\frac{1}{\lambda}$, $a_1 = -\frac{1}{\lambda}$, тогда $q(\xi) = \Phi(\phi) = -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\tanh\xi$, $q(\xi) = \Phi(\phi) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\tanh\xi$.

Проверка $q = \frac{1}{\lambda}(1-\tanh\xi)$, $q' = \frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}$, $q'' = \frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}$,

$$\frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}\frac{1}{\lambda}(1-\tanh\xi) - \left(\frac{-1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)^2 - \lambda\left(\frac{-1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)\left(\frac{1}{\lambda}(1-\tanh\xi)\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi}(1-\tanh\xi) - \frac{1}{\cosh^2\xi} + (1-\tanh\xi)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi} - \frac{2\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi} - \frac{1}{\cosh^2\xi} + 1 - \frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi} + \tanh^2\xi\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(-\frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi} - \frac{1}{\cosh^2\xi} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\frac{\cosh^2\xi - \sinh^2\xi - 1}{\cosh^2\xi} = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\frac{1-1}{\cosh^2\xi} = 0$$

. $q = -\frac{1}{\lambda}(1+\tanh\xi)$, $q' = -\frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}$, $q'' = \frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}$, $\frac{2\sinh\xi}{\lambda\cosh^3\xi}\left(-\frac{1}{\lambda}(1+\tanh\xi)\right) - \left(\frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)^2 - \lambda\left(-\frac{1}{\lambda\cosh^2\xi}\right)\left(-\frac{1}{\lambda}(1+\tanh\xi)\right)^2 =$

$$= \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{-2\sinh\xi}{\cosh\xi}(1+\tanh\xi) - \frac{1}{\cosh^2\xi} + (1+\tanh\xi)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\left(\frac{-2\sinh\xi}{\cosh\xi} - \frac{2\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi} - \frac{1}{\cosh^2\xi} + 1 + \frac{2\sinh\xi}{\cosh\xi} + \frac{\sinh^2\xi}{\cosh^2\xi}\right) = \frac{1}{\lambda^2\cosh^2\xi}\frac{-\sinh^2\xi - 1 + \cosh^2\xi}{\cosh^2\xi} = 0 .$$

Это дает $x(t) = -\frac{1}{\lambda}(1+\tanh(\ln t)) = -\frac{1}{\lambda}\frac{2t^2}{t^2+1}$, собственные функции $x(t) = \frac{1}{\lambda}(1-\tanh(\ln t)) = \frac{1}{\lambda}\frac{2}{t^2+1}$. Найдем L интеграл от этой функции $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt}$, $\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt = \int_1^R \frac{2}{t(t^2+1)}dt = \ln\frac{2R^2}{R^2+1}$, поэтому $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2R^2}{R^2+1}} = \left(\frac{2R^2}{R^2+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Отсюда $x(t) = -\frac{1}{\lambda}(1+\tanh(\ln t)) = -\frac{1}{\lambda}\frac{2t^2}{t^2+1}$, собственные функции $x(t) = \frac{1}{\lambda}(1-\tanh(\ln t)) = \frac{1}{\lambda}\frac{2}{t^2+1}$. Найдем L от этой функции $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt}$, $\int_1^R \frac{x(t)}{t}dt = \int_1^R \frac{2}{t(t^2+1)}dt = \ln\frac{2R^2}{R^2+1}$, откуда $L\int_1^R x(t)\,dt = e^{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2R^2}{R^2+1}} = \left(\frac{2R^2}{R^2+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Пример . Найдем собственные значения , собственные функции данного оператора $\Phi[y(t)] = e^{\int_0^t \ln y(s)ds}$, $e^{\int_0^t \ln y(s)ds} = \lambda y(t)$, дифференцируем по t данное уравнение $\left(e^{\int_0^t \ln y(s)ds}\right)' = \lambda y'(t)$, $e^{\int_0^t \ln y(s)ds}\ln y(t) = \lambda y'(t)$, тогда $\lambda y(t)\ln y(t) = \lambda y'(t)$,

$\lambda \neq 0$, $y'(t) = y(t)\ln y(t)$. Решение данного уравнения $y(t) = e^{e^t c}$. Найдем $e^{\int_0^0 \ln y(s)ds} = \lambda y(0)$, $\lambda y(0) = 1$, $y(0) = \lambda^{-1}$, отсюда $\lambda^{-1} = e^{e^0 c}$, $c = \ln\lambda^{-1}$, $y(t) = \lambda^{-e^t}$, этот оператор имеет непрерывный спектр .

Пример $x(t)=\gamma P\int_a^b tx(s)\,ds+g(t)=\gamma e^{\int_a^b t\ln x(s)ds}+g(t)$, где $a>0$, $b>0$, непрерывные , ограниченные функции .Рассмотрим отображение $Tx(t)=\gamma P\int_a^b tx(s)\,ds+g(t)=\gamma e^{\int_a^b t\ln x(s)ds}+g(t)$, является ли это отображение сжимающим ,

нужно проверить существует число $0<\mu(\gamma)<1$ которое удовлетворяет неравенству $d(Tx(t),Ty(t))=\max_{t\in[a,b]}|Tx(t)-Ty(t)|=\max_{s\in[a,b]}\left|\gamma\left(P\int_a^b tx(s)\,ds-P\int_a^b ty(s)\,ds\right)\right|=\max_{s\in[a,b]}\left|\gamma\left(e^{\int_a^b \ln tx(s)ds}-e^{\int_a^b \ln ty(s)ds}\right)\right|\le\varepsilon(\gamma)\,d(x(t),y(t))=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$,

это уравнение можно написать в операторной форме $x(t)=Tx(t)$.

Пример . $x(t)=\gamma L\int_a^b tx(s)\,ds+g(t)=\gamma e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}+g(t)$, где $a>0$, $b>0$, $x(t),g(t)$ непрерывные , ограниченные функции . Рассмотрим отображение $Tx(t)=\gamma L\int_a^b tx(s)\,ds+g(t)=\gamma e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}+g(t)$, является ли это отображение сжимающим ,

нужно проверить существует ли число $0<\varepsilon(\gamma)<1$ которое удовлетворяет неравенству

$d(Tx(t),Ty(t))=\max_{t\in[a,b]}|Tx(t)-Ty(t)|=\max_{s\in[a,b]}\left|\gamma\left(L\int_a^b tx(s)\,ds-L\int_a^b ty(s)\,ds\right)\right|=\max_{s\in[a,b]}\left|\gamma\left(e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}-e^{\int_a^b t\frac{y(s)}{s}ds}\right)\right|=\max_{s\in[a,b]}\left|\gamma e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}\right|\cdot\left|e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds-\int_a^b t\frac{y(s)}{s}ds}-1\right|\le\varepsilon(\gamma)\,d(x(t),y(t))=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$, поскольку $x(t)$ ограниченная функция , $|x(t)|<r$,

откуда $e^{\int_a^b t\frac{x(s)}{s}ds}\le e^{(b-a)r\ln\frac{b}{a}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{(b-a)r}$, тогда $\max_{t\in[a,b]}|Tx(t)-Ty(t)|\le|\gamma|\left(\frac{b}{a}\right)^{(b-a)r}\left|e^{(b-a)\ln\frac{b}{a}\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|}-1\right|=|\gamma|\left(\frac{b}{a}\right)^{(b-a)r}\left|\left(\frac{b}{a}\right)^{(b-a)\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|}-1\right|$, этот оператор может быть написан в виде $x(t)=Tx(t)$.

Рассмотрим отображение $Tx(t)=\left(P\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds\right)^{\gamma}+g(t)=e^{\gamma\int_a^b \ln(K(s,t)x(s))ds}+g(t)$, является ли это отображение сжимающим , нужно проверить существует ли число $0<\varepsilon(\gamma)<1$ которое удовлетворяет неравенству

$d(Tx(t),Ty(t))=\max_{t\in[a,b]}|Tx(t)-Ty(t)|=\max_{s\in[a,b]}\left|\left(P\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds\right)^{\gamma}-\left(P\int_a^b K(s,t)\,y(s)ds\right)^{\gamma}\right|=\max_{s\in[a,b]}\left|e^{\gamma\int_a^b \ln(K(s,t)x(s))ds}-e^{\gamma\int_a^b \ln(K(s,t)y(s))ds}\right|\le\varepsilon d(x(t),y(t))$.

Рассмотрим отображение $Tx(t)=\left(L\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds\right)^{\gamma}+g(t)=e^{\gamma\int_a^b \frac{K(s,t)x(s)}{s}ds}+g(t)$, является ли это отображение сжимающим , нужно проверить существует ли число $0<\varepsilon(\gamma)<1$ которое удовлетворяет неравенству

$d(Tx(t),Ty(t))=\max_{t\in[a,b]}|Tx(t)-Ty(t)|=\max_{s\in[a,b]}\left|\left(L\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds\right)^{\gamma}-\left(L\int_a^b K(s,t)\,y(s)\,ds\right)^{\gamma}\right|=\max_{s\in[a,b]}\left|e^{\gamma\int_a^b \frac{K(s,t)x(s)}{s}ds}-e^{\gamma\int_a^b \frac{K(s,t)y(s)}{s}ds}\right|\le\varepsilon d(x(t),y(t))$.

Рассмотрим оператор $F:\ C[a,b]\to C[a,b]$, где $C[a,b]$ линейное пространство непрерывных функций $x(t)$ с нормой $\|x\|_{C[a,b]}=\max|x(t)|_{t\in[a,b]}$, $F(x)(t)=f(x,x(t),x'(t))$, где f непрерывная функция , поэтому $(F(x+h))(t)-(F(x))(t)=f\left(t,x+h,(x+h)'\right)-f(t,x,x')=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial x'}h+o(h), h(t)\in C[a,b]$, тогда производная Фреше этого оператора $(F'(x)h)(t)=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial x'}h$. Пусть $F(x(t))=e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}$, тогда $(F'(x)h)(t)=e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}\left(-\frac{x'(t)}{x^2(t)}\right)h+e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}\left(\frac{1}{x(t)}\right)h$. Пусть $F(x(t))=\frac{tx'(t)}{x(t)}$, $(F'(x)h)(t)=\left(-\frac{tx'(t)}{x^2(t)}\right)h+\left(\frac{t}{x(t)}\right)h$.

Пример . $F(x(t))\ :C[a,b]\to C[a,b]$, $F(x(t))=f(t,x(t))$, где $f(t,x(t))$ непрерывная функция , дифференциал Фреше в точке $x_0(t)\in C[a,b]$ $\left(F_f'(x)h\right)(t)=\frac{\partial(t,x)}{\partial x}h(t)$, выражение $\left(F_f'(x)h\right)(t)$ это действие оператора $F'(x)$ на любой элемент $h(t)\in X=R[a,b]$, то есть $\left(F_f'(x)h\right)(t)\in Y=C[a,b]$.

Пример . $F(x(t))\ :C[a,b]\to C[a,b]$, $F(x(t))=f(t,x(t),x'(t))$, где $f(t,x(t),x'(t))$ непрерывная функция , тогда $F((x+h)(t))-F(x(t))=f\left(t,x+h,(x+h)'\right)-f(t,x,x')=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial x'}h'+o(h)$, производная Фреше в точке $x_0(t)$ равна $\left(F_f'(x)h\right)(t)=\frac{\partial f}{\partial x}h(t)+\frac{\partial f}{\partial x'}h'(t)$.

Пример . $F(x(t))\ :C[a,b]\to C[a,b]$, $F(x(t))=e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}$, производная Фреше в точке $x_0(t)$ равна $\left(F_f'(x)h\right)(t)=e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}\left(-\frac{x'(t)}{x^2(t)}\right)h(t)+e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}\left(\frac{1}{x(t)}\right)h'(t)$.

Пример . $F(x(t))\ :C[a,b]\to C[a,b]$, $F(x(t))=\frac{tx'(t)}{x(t)}$, производная Фреше в точке $x_0(t)$ равна $\left(F_f'(x)h\right)(t)=\left(-\frac{tx'(t)}{x^2(t)}\right)h(t)+\left(\frac{t}{x(t)}\right)h'(t)$.

Example . $F(x(t))\ :C[a,b]\to C[a,b]$, $F(x(t))=e^{\frac{tx'(t)}{x(t)}}$, производная Фреше в точке $x_0(t)$ равна $\left(F_f'(x)h\right)(t)=e^{\frac{tx'(t)}{x(t)}}\left(-\frac{tx'(t)}{x^2(t)}\right)h(t)+e^{\frac{tx'(t)}{x(t)}}\left(\frac{t}{x(t)}\right)h'(t)=\frac{F(x(t))\,t}{x(t)}\left(h'(t)-h(t)\frac{x'(t)}{x(t)}\right)$.

Пример. $\Phi[y(x)]=P\int_a^b y(x)\,dx=e^{\int_a^b \ln y(x)dx}$, $\Phi:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$. Найдем дифференциал $\Phi_g{}'[y(x)]=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]_{\varepsilon=0}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}e^{\int_a^b\ln(y(x)+\varepsilon\delta y(x))dx}{}_{\varepsilon=0}=e^{\int_a^b\ln(y(x)+\varepsilon\delta y(x))dx}{}_{\varepsilon=0}\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_a^b\ln(y(x)+\varepsilon\delta y(x))dx_{\varepsilon=0}=e^{\int_a^b\ln y(x)dx}\cdot\int_a^b\frac{1}{y(x)+\varepsilon\delta y(x)}(y(x)+\varepsilon\delta y(x))_\varepsilon{}'\,dx_{\varepsilon=0}=$
$=\Phi[y(x)]\cdot\int_a^b\frac{\delta y(x)}{y(x)}dx$. Найдем приращение данного функционала $\Delta\Phi[y(x),\delta y(x)]=\Phi[y(x)+\delta y(x)]-\Phi[y(x)]=e^{\int_a^b\ln(y(x)+\delta y(x))dx}-e^{\int_a^b\ln(y(x))dx}$. Let $\Phi[y(x)]=F[G[y(x)]]$, where $G[y(x)]=\int_a^b\ln y(x)dx$, $F[u]=e^u$, $u=G[y]$, таким образом

производная Фреше этого функционала $\Phi_f{}'[y]=F_f{}'[u]G_f{}'[y]$, $F_f{}'[u]=e^u=e^{\int_a^b \ln y(x)dx}$, $G_f{}'[y]=\int_a^b \frac{1}{y}h(x)\,dx$, производная Фреше функционала $\int_a^b f(x,y,y')dx$ равна $\int_a^b (f_y h+h'f_{y'})dx$, приращение $h(x)=\delta y(x)=y_0(x)-y(x)$, поэтому $\Phi_f{}'[y,h]=e^{\int_a^b \ln y(x)dx}\cdot\int_a^b \frac{1}{y(x)}h(x)dx=\Phi[y(x)]\cdot\int_a^b \frac{h(x)}{y(x)}dx$, то есть $\Phi_f{}'[y(x)]=\Phi_g{}'[y(x)]$.

Пример . $\Phi[y(x)]=L\int_a^b y(x)\,dx=e^{\int_a^b \frac{y(x)}{x}dx}$, $\Phi: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$. Найдем дифференциал $\Phi_g{}'[y(x)]=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]_{\varepsilon=0}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}e^{\int_a^b \frac{y(x)+\varepsilon\delta y(x)}{x}dx}\Big|_{\varepsilon=0}=e^{\int_a^b \frac{y(x)+\varepsilon\delta y(x)}{x}dx}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_a^b \frac{y(x)+\varepsilon\delta y(x)}{x}dx\Big|_{\varepsilon=0}=e^{\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx}\cdot\int_a^b \frac{\delta y(x)}{x}dx=\Phi[y(x)]\cdot\int_a^b \frac{\delta y(x)}{x}dx$.

Найдем приращение данного функционала $\Delta\Phi[y(x),\delta y(x)]=\Phi[y(x)+\delta y(x)]-\Phi[y(x)]=e^{\int_a^b \frac{y(x)+\delta y(x)}{x}dx}-e^{\int_a^b \frac{y(x)}{x}dx}$. Пусть $\Phi[y(x)]=F[G[y(x)]]$, где $G[y(x)]=\int_a^b \frac{y(x)}{x}dx$, $F[u]=e^u$, $u=G[y]$, производная Фреше функционала $\Phi_f{}'[y]=F_f{}'[u]G_f{}'[y]$, $F_f{}'[u]=e^u=e^{\int_a^b \frac{y(x)}{x}dx}$, $G_f{}'[y]=\int_a^b \frac{1}{x}h(x)\,dx$, производная Фреше функционала $\int_a^b f(x,y,y')dx$ равна $\int_a^b (f_y h+h'f_{y'})\,dx$, приращение $h(x)=\delta y(x)=y_0(x)-y(x)$, $\Phi_f{}'[y,h]=e^{\int_a^b \frac{y(x)}{x}dx}\cdot\int_a^b \frac{1}{x}h(x)\,dx=\Phi[y(x)]\cdot\int_a^b \frac{h(x)}{x}dx$, то есть $\Phi_f{}'[y(x)]=\Phi_g{}'[y(x)]$.

Пример . $\Phi[y(x)]=B\int_a^b y(x)dx=e^{\int_a^b \frac{\ln y(x)}{x}dx}$, $\Phi: L_2[a,b]\to L_2[a,b]$. Найдем дифференциал $\Phi_g{}'[y(x)]=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]_{\varepsilon=0}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}e^{\int_a^b \frac{\ln(y(x)+\varepsilon\delta y(x))}{x}dx}\Big|_{\varepsilon=0}=e^{\int_a^b \frac{\ln(y(x)+\varepsilon\delta y(x))}{x}dx}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_a^b \frac{\ln(y(x)+\varepsilon\delta y(x))}{x}dx_{\varepsilon=0}=$
$=e^{\int_a^b \frac{\ln y(x)}{x}dx}\cdot\int_a^b \frac{1}{x(y(x)+\varepsilon\delta y(x))}(y(x)+\varepsilon\delta y(x))'_{\varepsilon}\,dx_{\varepsilon=0}=\Phi[y(x)]\cdot\int_a^b \frac{\delta y(x)}{xy(x)}dx$. Найдем приращение данного функционала $\Delta\Phi[y(x),\delta y(x)]=\Phi[y(x)+\delta y(x)]-\Phi[y(x)]=e^{\int_a^b \frac{\ln(y(x)+\delta y(x))}{x}dx}-e^{\int_a^b \frac{\ln y(x)}{x}dx}$. Пусть $\Phi[y(x)]=F[G[y(x)]]$, где $G[y(x)]=\int_a^b \frac{\ln y(x)}{x}dx$, $F[u]=e^u$, $u=G[y]$, $\Phi_f{}'[y]=F_f{}'[u]G_f{}'[y]$, $F_f{}'[u]=e^u=e^{\int_a^b \frac{\ln y(x)}{x}dx}$, $G_f{}'[y]=\int_a^b \frac{h(x)}{xy(x)}dx$, производная Фреше функционала $\int_a^b f(x,y,y')dx$ равна $\int_a^b (f_y h+h'f_{y'})\,dx$, приращение $h(x)=\delta y(x)=y_0(x)-y(x)$, $\Phi_f{}'[y,h]=e^{\int_a^b \frac{\ln y(x)}{x}dx}\cdot\int_a^b \frac{h(x)}{xy(x)}dx=\Phi[y(x)]\cdot\int_a^b \frac{h(x)}{xy(x)}dx$, то есть $\Phi_f{}'[y(x)]=\Phi_g{}'[y(x)]$.

Рассмотрим оператор $F_P:\ C[a,b]\to C[a,b], a>0, x(t)>0, (F_Px)(t)=P\int_a^t x(s)\,ds=e^{\int_a^t \ln x(s)ds}$, $\|F_Px\|_{C[a,b]}=\max_{t\in[a,b]}\left|e^{\int_a^t \ln x(s)ds}\right|\le\max_{t\in[a,b]}e^{\left|\int_a^t \ln x(s)ds\right|}\le e^{\max_{s\in[a,b]}\ln|x(s)|\cdot\max_{t\in[a,b]}\int_a^t ds}\le e^{\ln\max_{s\in[a,b]}|x(s)|\cdot(b-a)}=e^{\ln\|x\|_{C[a,b]}\cdot(b-a)}=\left(\|x\|_{C[a,b]}\right)^{(b-a)}$, является ли этот ограниченный оператор , непрерывным ?

Пусть оператор $G: \ C[a,b] \to C[a,b], (Gx)(t) = \int_a^t \ln x(s)\, ds$, тогда оператор $(F_P x)(t)$ можно рассматривать в виде операторной функции $e^{(Gx)(t)} = J + G + \frac{1}{2!}G^2 + .. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} G^n$, норма этого оператора $\left\| e^G \right\|_{L(X,X)} \le e^{\|G\|_{L(X,X)}}, \|G\|_{L(X,X)} \le (b-a)$, тогда $\|F_P\|_{L(X,X)} \le e^{(b-a)}$.

Рассмотрим оператор $F_L: \ C[a,b] \to C[a,b], a > 0, (F_L x)(t) = L\int_a^t x(s)\, ds = e^{\int_a^t \frac{x(s)}{s} ds}, \|F_L x\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} \left| e^{\int_a^t \frac{x(s)}{s} ds} \right| \le \max_{t\in[a,b]} e^{\int_a^t \left|\frac{x(s)}{s}\right| ds} \le e^{\max_{s\in[a,b]}|x(s)| \cdot \max_{t\in[a,b]} \int_a^t \frac{ds}{|s|}} = e^{\|x\|_{C[a,b]} \cdot \ln\left|\frac{b}{a}\right|} = \left|\frac{a}{b}\right|^{\|x\|_{C[a,b]}}$, является ли этот ограниченный оператор , непрерывным ?

Рассмотрим оператор $Q: \ C[a,b] \to C[a,b], (Qx)(t) = \int_a^t \frac{x(s)}{s} ds$, тогда оператор $(F_L x)(t)$ можно рассматривать в виде операторной функции $e^{(Qx)(t)} = J + Q + \frac{1}{2!}Q^2 + .. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Q^n$, норма этого оператора $\left\| e^Q \right\|_{L(X,X)} \le e^{\|Q\|_{L(X,X)}}, \|Q\|_{L(X,X)} \le (b-a)$, тогда $\|F_L\|_{L(X,X)} \le e^{(b-a)}$.

Рассмотрим функционал $f_L\left(x(t)\right)=L\int\limits_a^b x(t)\,dt=e^{\int\limits_a^b \frac{x(t)}{t}dt}$, $f_L\left(x(t)\right):\ C[a,b]\to R, a>0, b>0$, выражение $f_L\left(\left|x(t)-y(t)\right|\right)$, обозначим так $d_L\left(x(t),y(t)\right)$, поэтому

$d_L\left(x(t),y(t)\right)=d_L\left(y(t),x(t)\right), d_L\left(x(t),x(t)\right)=1, d_L\left(x(t),y(t)\right)\le d_L\left(x(t),z(t)\right)\cdot d_L\left(z(t),y(t)\right)$.

Доказательство . $L\int\limits_a^b \left|x(t)+y(t)\right|dt=e^{\int\limits_a^b \frac{|x(t)+y(t)|}{t}dt}\le e^{\int\limits_a^b \frac{|x(t)|}{t}dt+\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{t}dt}=e^{\int\limits_a^b \frac{|x(t)|}{t}dt}\cdot e^{\int\limits_a^b \frac{|y(t)|}{t}dt}=L\int\limits_a^b \left|x(t)\right|dt\cdot L\int\limits_a^b \left|y(t)\right|dt$ Обозначим $x(t)$ так $\left(x(t)-z(t)\right)$, $y(t)$ так $\left(z(t)-y(t)\right)$,

тогда $L\int\limits_a^b \left|\left(x(t)-z(t)\right)+\left(z(t)-y(t)\right)\right|dt\le L\int\limits_a^b \left|x(t)-z(t)\right|dt\cdot L\int\limits_a^b \left|z(t)-y(t)\right|dt, L\int\limits_a^b \left|x(t)-y(t)\right|dt\le L\int\limits_a^b \left|x(t)-z(t)\right|dt\cdot L\int\limits_a^b \left|z(t)-y(t)\right|dt$.

$f_L\left(cx(t)\right)=L\int\limits_a^b cx(t)\,dt=e^{c\int\limits_a^b \frac{x(t)}{t}dt}=\left(e^{\int\limits_a^b \frac{x(t)}{t}dt}\right)^c=\left(L\int\limits_a^b x(t)\,dt\right)^c=\left(f_L\left(x(t)\right)\right)^c$, $f_L\left(x(t)+y(t)\right)=f_L\left(x(t)\right)\cdot f_L\left(y(t)\right)$, $f_L\left(x(t)-y(t)\right)=\dfrac{f_L\left(x(t)\right)}{f_L\left(y(t)\right)}$, $f_L(c)=\left(\dfrac{b}{a}\right)^c$.

Функционал $f_L\left(x(t)\right)$ является непрерывным в пространстве $C[a,b], a>0, b>0$. Доказательство $\left|f_L(x)-f_L(x_0)\right|=\left|e^{\int\limits_a^b \frac{x(t)}{t}dt}-e^{\int\limits_a^b \frac{x_0(t)}{t}}\right|=e^{\int\limits_a^b \frac{x_0(t)}{t}dt}\cdot\left|e^{\int\limits_a^b \frac{x(t)-x_0(t)}{t}dt}-1\right|$.

Пусть $\max_{t\in[a,b]}\dfrac{x_0(t)}{t}=R$, отсюда $\int\limits_a^b \dfrac{x_0(t)}{t}dt\le R(b-a)$ тогда $e^{\int\limits_a^b \frac{x_0(t)}{t}dt}\le e^{R(b-a)}=S$, тогда $\left|f_L(x)-f_L(x_0)\right|\le S\left|e^{\int\limits_a^b \frac{x(t)-x_0(t)}{t}dt}-1\right|$. Пусть $\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-x_0(t)\right|\le\delta$,

$\int\limits_a^b \dfrac{x(t)-x_0(t)}{t}dt\le\int\limits_a^b \dfrac{\delta}{t}dx=\delta\left(\ln b-\ln a\right)=\delta\ln\dfrac{b}{a}$, откуда $\left|f_L(x)-f_L(x_0)\right|\le S\left|e^{\delta\ln\frac{b}{a}}-1\right|=S\left|\left(\dfrac{b}{a}\right)^\delta-1\right|$. $\left(\dfrac{b}{a}\right)^\delta>1$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\left|\left(\dfrac{b}{a}\right)^\delta-1\right|=0$, значит $S\left|\left(\dfrac{b}{a}\right)^\delta-1\right|<\varepsilon$.

Последовательность $\left(x_n(t)\right)$ точек пространства $C[a,b]$ назовем L сходящейся если $\lim\limits_{n\to\infty}d_L\left(x_n(t),x(t)\right)=1$, будем писать $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\,x_n(t)=x(t)$.

Последовательность $\left(x_n(t)\right)$ точек пространства $C[a,b]$ имеет L предел $x(t)$ если последовательность чисел $d_L\left(x_n(t),x(t)\right)$ сходиться к1 то есть $\lim\limits_{n\to\infty}d_L\left(x_n(t),x(t)\right)=1$.

Последовательность $\left(x_n(t)\right)$ точек пространства $C[a,b]$ L фундаментальная если $d_L\left(x_m(t),x_n(t)\right)\to 1, m,n\to\infty$, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует число $N=N(\varepsilon)$