Характеристическая система этого уравнения $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y+z)\,x \\ \dfrac{dy}{dt} = (x+z)\,y \\ \dfrac{dz}{dt} = (x+y)\,z \end{cases}$, отсюда $\dfrac{dx}{(y+z)\,x} = \dfrac{dy}{(x+z)\,y} = \dfrac{dz}{(x+y)\,z}$. Пусть $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \Rightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}$,

$\dfrac{dx - dy}{xy + xz - yz - yx} = \dfrac{dy - dz}{yx + yz - zx - zy}$, тогда $\dfrac{dx - dy}{z(x-y)} = \dfrac{dy - dz}{x(y-z)}$ $\dfrac{d(x-y)}{z(x-y)} = \dfrac{d(y-z)}{x(y-z)} \Rightarrow \dfrac{1}{z}\ln(x-y) - \dfrac{1}{x}\ln(y-z) = c_1$, первый интеграл $v_1 = \dfrac{1}{z}\ln(x-y) - \dfrac{1}{x}\ln(y-z)$.

Пример .$\left(L_x{}'u\right)^2 + \left(L_y{}'u\right)^2 + \left(L_z{}'u\right)^2 = n^2(x,y,z) \Leftrightarrow \left(\dfrac{xu_x{}'}{u}\right)^2 + \left(\dfrac{yu_y{}'}{u}\right)^2 + \left(\dfrac{zu_z{}'}{u}\right)^2 = n^2(x,y,z)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y,z) = e^{\omega(x,y,z)}$,

$u_x{}' = e^{\omega}\omega_x{}'$, $u_y{}' = e^{\omega}\omega_y{}'$, $u_z{}' = e^{\omega}\omega_z{}'$, значит $\left(x\omega_x{}'\right)^2 + \left(y\omega_y{}'\right)^2 + \left(z\omega_z{}'\right)^2 = n^2(x,y,z)$. Пусть $x = e^{\eta}$, $y = e^{\mu}$, $z = e^{\rho}$, $\eta = \ln x$, $\mu = \ln y$, $\rho = \ln z$,

поэтому $\left(e^{\eta}\dfrac{\omega_\eta{}'}{e^{\eta}}\right)^2 + \left(e^{\mu}\dfrac{\omega_\mu{}'}{e^{\mu}}\right)^2 + \left(e^{\rho}\dfrac{\omega_\rho{}'}{e^{\rho}}\right)^2 = n^2\left(e^{\eta}, e^{\mu}, e^{\rho}\right)$, $\left(\omega_\eta{}'\right)^2 + \left(\omega_\mu{}'\right)^2 + \left(\omega_\rho{}'\right)^2 = n^2\left(e^{\eta}, e^{\mu}, e^{\rho}\right)$, это уравнение эйконала .

Пример . $L_{tx}{}''u(x,t) + aL_t{}'u(x,t) = 0$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $x\left(\dfrac{u_{tx}{}''}{u_t{}'} - \dfrac{u_x{}'}{u}\right) + a\dfrac{tu_t{}'}{u} = 0$. Пусть $L_t{}'u(x,t) = v(x,t)$,

отсюда $L_{tx}{}''u(x,t) = L_x{}'v(x,t)$, тогда получим уравнение $L_x{}'v + av = 0$, $\dfrac{xv_x{}'}{v} + av = 0$, тогда $\dfrac{dv}{v^2} = -a\dfrac{dx}{x}$. Решение этого уравнения $v(x,t) = \dfrac{1}{a\ln x + c(t)}$,

so $L_t{}'u(x,t) = \dfrac{1}{a\ln x + c(t)}$, $\dfrac{tu_t{}'}{u} = \dfrac{1}{a\ln x + c(t)}$, $\dfrac{du}{u} = \dfrac{dt}{y(a\ln x + c(t))}$, откуда $\ln u = \displaystyle\int \dfrac{dt}{y(a\ln x + c(t))} + \phi(x)$, $u(x,t) = e^{\int \frac{dy}{t(a\ln x + c(t))} + \phi(x)} = e^{\int \frac{dy}{t(a\ln x + c(t))}}\mu(x)$, где $\mu(x) = e^{\phi(x)}$.

Пусть $u(x,1) = \ln x$, $L_t{}'u(1,t) = \dfrac{1}{\ln t}$, значит $v(1,t) = \dfrac{1}{\ln t}$, $\dfrac{1}{\ln t} = \dfrac{1}{a\ln 1 + c(t)}$ поэтому $c(t) = \ln t$, отсюда $v(x,t) = \dfrac{1}{a\ln x + \ln t}$,

$u(x,t)=e^{\int\frac{dy}{t(a\ln x+\ln t)}}\rho(x)=(a\ln x+\ln t)\mu(x)$, тогда $\ln x=\rho(x)\ln x^{a}$, $\rho(x)=\frac{1}{a}$, откуда $u(x,t)=\frac{a\ln x+\ln t}{a}$.

Другое решение . Пусть $u(x,t)=e^{w(x,t)}$, $u_t'=e^w w_t'$, $u_x'=e^w w_x'$, $u_{tx}''=\left(e^w w_x'\right)_t'=e^w w_t' w_x'+e^w w_{xy}''=e^w\left(w_t' w_x'+w_{xt}''\right)$, значит $x\left(\frac{e^w\left(w_t' w_x'+w_{xt}''\right)}{e^w w_t'}-\frac{e^w w_x'}{e^w}\right)+at\frac{e^w w_t'}{e^w}=0$,

поэтому $x\frac{w_{xt}''}{w_t'}+atw_t'=0$. Пусть $x=e^{\eta}$, $\eta=\ln x$, $\xi=\ln t$, $t=e^{\xi}$, отсюда $w_x'=w_\eta'\eta_x'=w_\eta'\frac{1}{x}=\frac{w_\eta'}{e^\eta}$, $w_t'=w_\xi'\xi_t'=w_\xi'\frac{1}{t}=\frac{w_\xi'}{e^\xi}$, $w_{xt}''=\left(w_x'\right)_t'=$

$=\left(\frac{w_\eta'}{e^\eta}\right)_t'=\frac{\left(w_\eta'\right)_t' e^\eta-w_\eta'\left(e^\eta\right)_t'}{e^{2\eta}}=\frac{w_{\eta\xi}''\xi_y' e^\eta-0}{e^{2\eta}}=\frac{w_{\eta\xi}''\frac{1}{y}}{e^\eta}=\frac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi}$. Получим уравнение $e^\eta\frac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi}\frac{e^\xi}{w_\xi'}+ae^\xi\frac{w_\xi'}{e^\xi}=0$, $\frac{w_{\eta\xi}''}{w_\xi'}+aw_\xi'=0$, это уравнение гиперболического типа .

Пусть $v(\eta,\xi)=w_\xi'(\eta,\xi)$, тогда $w_{\eta\xi}''(\eta,\xi)=v_\eta'(\eta,\xi)$, тогда $v_\eta'+ev^2=0$, решение этого уравнения $v(\eta,\xi)=\frac{1}{a\eta+c_1(\xi)}$, so $w_\xi'=\frac{1}{a\eta+c_1(\xi)}$,

откуда $w(\eta,\xi)=\int\frac{1}{a\eta+c_1(\xi)}d\xi+c_2(\xi)$, значит $w(x,t)=\int\frac{1}{a\ln x+c_1(\ln t)}\frac{dt}{t}+c_2(\ln x)$, поэтому $u(x,t)=e^{\int\frac{1}{a\ln x+c_1(\ln t)}\frac{dt}{t}+c_2(\ln x)}$.

Другое решение . Найдем волновое решение этого уравнения . Пусть $w(\eta,\xi)=f(\mu)$, где $\mu=\xi-v\eta$, $w_\xi'=f_\mu'\mu_\xi'=f_\mu'$, $w_\eta'=f_\mu'\mu_\eta'=-vf_\mu'$,

$w_{\eta\xi}''=\left(w_\eta'\right)_\xi'=\left(-vf_\mu'\right)_\xi'=-vf_{\mu\mu}''\mu_\xi'=-vf_{\mu\mu}''$. Откуда $af_\mu'\left(-vf_\mu'\right)=-vf_{\mu\mu}''$, $a\left(f_\mu'\right)^2=f_{\mu\mu}''$, let $f_\mu'(\mu)=g(\mu)$, отсюда $f_{\mu\mu}''(\mu)=g'(\mu)$, тогда $ag^2(\mu)=g'(\mu)$.

Решение этого дифференциального уравнения $g(\mu)=-\frac{1}{a\mu+c}$, тогда $f(\mu)=\int-\frac{1}{a\mu+c}d\mu=-\frac{1}{a}\ln|a\mu+c|+c_1$, $w(\eta,\xi)=-\frac{1}{a}\ln|a(\xi-v\eta)+c|+c_1$.

Откуда $u(x,t)=e^{-\frac{1}{a}\ln|a(\ln x-v\ln t)+c|+c_1}=\left(a(\ln x-v\ln t)+c\right)^{-\frac{1}{a}}c_1$.

Пример . $L_{tx}''u(x,t)=u(x,t)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $x\left(\frac{u_{tx}''}{u_t'}-\frac{u_x'}{u}\right)=u$.

Пусть $u(x,t)=e^{w(x,t)}$, поэтому $u_t'=e^w w_t'$, $u_x'=e^w w_x'$, $u_{tx}''=\left(e^w w_x'\right)_t'=e^w w_t' w_x'+e^w w_{xy}''=e^w\left(w_t' w_x'+w_{xt}''\right)$, отсюда $x\left(\frac{e^w\left(w_t' w_x'+w_{xt}''\right)}{e^w w_t'}-\frac{e^w w_x'}{e^w}\right)=e^w$, откуда $x\frac{w_{xt}''}{w_t'}=e^w$.

Пусть $x=e^\eta$, $\eta=\ln x$, $\xi=\ln t$, $t=e^\xi$, значит $w_x'=w_\eta'\eta_x'=w_\eta'\frac{1}{x}=\frac{w_\eta'}{e^\eta}$, $w_t'=w_\xi'\xi_t'=w_\xi'\frac{1}{t}=\frac{w_\xi'}{e^\xi}$, $w_{xt}''=\left(w_x'\right)_t'=\left(\frac{w_\eta'}{e^\eta}\right)_t'=\frac{\left(w_\eta'\right)_t' e^\eta-w_\eta'\left(e^\eta\right)_t'}{e^{2\eta}}=\frac{w_{\eta\xi}''\xi_y' e^\eta-0}{e^{2\eta}}=\frac{w_{\eta\xi}''\frac{1}{y}}{e^\eta}=\frac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi}$.

Получим уравнение $e^{\eta}\frac{w_{\eta\xi}''}{e^{\eta}e^{\xi}}\frac{e^{\xi}}{w_{\xi}'}=e^{w}$, $w_{\eta\xi}''=w_{\xi}'e^{w}$. Пусть $v(\eta,\xi)=e^{w(\eta,\xi)}$, тогда $w(\eta,\xi)=\ln v(\eta,\xi)$, тогда $w_{\xi}'=\frac{v_{\xi}'}{v}$, $w_{\eta}'=\frac{v_{\eta}'}{v}$, $w_{\eta\xi}''=\frac{v_{\eta\xi}''v-v_{\xi}'v_{\eta}'}{v^2}$, найдем уравнение $\frac{v_{\eta\xi}''v-v_{\xi}'v_{\eta}'}{v^2}=\frac{v_{\xi}'}{v}\ v$, $-v_{\xi}'v_{\eta}'+v_{\eta\xi}''v=v^2v_{\xi}'$. Найдем волновое решение данного уравнения . Пусть $v(\eta,\xi)=f(\mu)$, где $\mu=\xi-\lambda\eta$, это дает

$v_{\xi}'=f_{\mu}'\mu_{\xi}'=f_{\mu}'$, $v_{\eta}'=f_{\mu}'\mu_{\eta}'=-\lambda f_{\mu}'$, $v_{\eta\xi}''=\left(v_{\eta}'\right)_{\xi}'=\left(-\lambda f_{\mu}'\right)_{\xi}'=-\lambda f_{\mu\mu}''\mu_{\xi}'=-\lambda f_{\mu\mu}''$. Подставим эти выражения в уравнение , тогда $f_{\mu\mu}''f-\left(f_{\mu}'\right)^2=-\frac{f_{\mu}'f^2}{\lambda}$.

Решение этого дифференциального уравнения $f(\mu)=\frac{\lambda c_1ce^{c\mu}}{c_1e^{c\mu}-1}$, тогда $v(\eta,\xi)=\frac{\lambda c_1ce^{c(\xi-\lambda\eta)}}{c_1e^{c(\xi-\lambda\eta)}-1}$, $w(\eta,\xi)=\ln\frac{\lambda c_1ce^{c(\xi-\lambda\eta)}}{c_1e^{c(\xi-\lambda\eta)}-1}$,

поэтому $w(x,y)=\ln\frac{\lambda c_1ce^{c(\ln t-\lambda\ln x)}}{c_1e^{c(\ln t-\lambda\ln x)}-1}=\ln\frac{\lambda c_1\left(\frac{t}{x^{\lambda}}\right)^c}{c_1\left(\frac{t}{x^{\lambda}}\right)^c-1}$, отсюда $u(x,y)=e^{\ln\frac{\lambda c_1\left(\frac{t}{x^{\lambda}}\right)^c}{c_1\left(\frac{t}{x^{\lambda}}\right)^c-1}}=\frac{\lambda c_1\left(\frac{t}{x^{\lambda}}\right)^c}{c_1\left(\frac{t}{x^{\lambda}}\right)^c-1}$.

Пример . $L_{tx}''u(x,t)+\delta L_t'u(x,t)=u(x,t)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $x\left(\frac{u_{tx}''}{u_t'}-\frac{u_x'}{u}\right)+\delta\frac{tu_t'}{u}=u$.

Аналогично получим уравнение $f_{\gamma\gamma}''f-\left(f_{\gamma}'\right)^2\left(\frac{\delta}{\lambda}+1\right)=-\frac{f_{\gamma}'f^2}{\lambda}$. Это уравнение можно решить аналитически только при некоторых значениях параметров δ , λ .

Пример . $L_{t^2}''u(x,t)=a^2L_{x^2}''u(x,t)\Leftrightarrow\frac{uu_t'+tuu_{t^2}''-t\left(u_t'\right)^2}{uu_t'}=a^2\frac{uu_x'+xuu_{x^2}''-x\left(u_x'\right)^2}{uu_x'}$, $u+tu\frac{u_{t^2}''}{u_t'}-tu_t'=a^2\left(u+xu\frac{u_{x^2}''}{u_x'}-xu_x'\right)$.

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, значит $1+t\frac{\omega_{t^2}''}{\omega_t'}=a^2\left(1+x\frac{\omega_{x^2}''}{\omega_x'}\right)$. Пусть $x=e^{\eta}$, $\eta=\ln x$, $\xi=\ln t$, $t=e^{\xi}$, $\omega_t'=\frac{\omega_{\xi}'}{e^{\xi}}$, $\omega_x'=\frac{\omega_{\eta}'}{e^{\eta}}$,

$\omega_{x^2}''=\frac{\omega_{\eta^2}''-\omega_{\eta}'}{e^{2\eta}}$, $\omega_{t^2}''=\frac{\omega_{\xi^2}''-\omega_{\xi}'}{e^{2\xi}}$, тогда $1+e^{\eta}\frac{\frac{\omega_{\eta^2}''-\omega_{\eta}'}{e^{2\eta}}}{\frac{\omega_{\eta}'}{e^{\eta}}}=a^2\left(1+e^{\xi}\frac{\frac{\omega_{\xi^2}''-\omega_{\xi}'}{e^{2\xi}}}{\frac{\omega_{\xi}'}{e^{\xi}}}\right)$, $\frac{\omega_{\eta^2}''}{\omega_{\eta}'}=a^2\frac{\omega_{\xi^2}''}{\omega_{\xi}'}$. Пусть $\omega(\eta,\xi)=F(\eta)G(\xi)$, $\frac{F(\eta)G''(\xi)}{G'(\xi)}=a^2\frac{F''(\eta)G(\xi)}{F'(\eta)}$, Другое решение . $L''_{t^2}\, u(x,t) = a^2 L''_{x^2}\, u(x,t)$. Рассмотрим функцию $v(x,t)$, такую что $L'_t\, v(x,t) = a^2 L'_x\, u(x,t)$, поэтому $L_x'\left(L_t' v(x,t)\right) = L_x'\left(a^2 L_x' u(x,t)\right)$, $L_{tx}'' v(x,t) = L_{x^2}'' u(x,t)$, тогда $L''_{t^2}\, u(x,t) = a^2 L''_{tx}\, v(x,t)$, найдем L интеграл по переменой t ,

тогда $L\int L_{t^2}'' u(x,t)\, dt = L\int a^2 L_{tx}'' v(x,t)\, dt$, $L\int L_t'\left(L_t' u(x,t)\right) dt = L\int a^2 L_x'\left(L_t' v(x,t)\right) dt$, тогда найдем $L_t' u(x,t) = \left(L\int L_x'\left(L_t' v(x,t)\right) dt\right)^{a^2}$.

$L\int L_{x^2}'' u(x,t)\, dx = L\int L_x'\left(L_x' u(x,t)\right) dx = L_x' u(x,t)$, $L\int L_{tx}'' u(x,t)\, dx = L\int L_x'\left(L_t' u(x,t)\right) dx = L_t' u(x,t)$.

Пример . $L_{yx}'' u(x,y) + p(y) L_y' u(x,y) = g(y)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $x\left(\dfrac{u_{yx}''}{u_y'} - \dfrac{u_x'}{u}\right) + p(y)\dfrac{y u_y'}{u} = g(y)$.

Пусть $L_y' u(x,y) = v(x,y)$, значит $L_{yx}'' u(x,y) = L_x' u(x,y)$, откуда $L_x' v + p(y) v = g(y)$, решение этого уравнения $v(x,y) = \dfrac{x^{g(y)}}{\dfrac{p(y)\, x^{g(y)}}{g(y)} + c(y)}$,

отсюда $L_y' u(x,y) = \dfrac{x^{g(y)}}{\dfrac{p(y)\, x^{g(y)}}{g(y)} + c(y)}$, $\dfrac{y u_y'}{u} = \dfrac{x^{g(x)}}{\dfrac{p(y)\, x^{g(y)}}{g(y)} + c(y)}$, $\dfrac{du}{u} = \dfrac{x^{g(y)}\, dy}{y\left(\dfrac{p(y)\, x^{g(y)}}{g(y)} + c(y)\right)}$, тогда $u(x,y) = e^{\int \frac{x^{g(y)} dy}{y\left(\frac{p(y) x^{g(y)}}{g(y)} + c(y)\right)} + \phi(x)} = e^{\int \frac{x^{g(y)} dy}{y\left(\frac{p(y) x^{g(y)}}{g(y)} + c(y)\right)}} \rho(x)$, где $\rho(x) = e^{\phi(x)}$.

отсюда $L_y'u(x,y)=\dfrac{x^{g(y)}}{\dfrac{p(y)x^{g(y)}}{g(y)}+c(y)}$, $\dfrac{yu_y'}{u}=\dfrac{x^{g(y)}}{\dfrac{p(y)x^{g(x)}}{g(y)}+c(y)}$, $\dfrac{du}{u}=\dfrac{x^{g(y)}dy}{y\left(\dfrac{p(y)x^{g(y)}}{g(y)}+c(y)\right)}$, тогда $u(x,y)=e^{\int\frac{x^{g(y)}dy}{y\left(\frac{p(y)x^{g(y)}}{g(y)}+c(y)\right)}+\phi(x)}=e^{\int\frac{x^{g(y)}dy}{y\left(\frac{p(y)x^{g(y)}}{g(y)}+c(y)\right)}}\mu(x)$, где $\mu(x)=e^{\phi(x)}$.

Пример . $L_{yx}''u(x,y)+\delta L_x'u(x,y)+\gamma L_y'u(x,y)+L_y'u(x,y)L_x'u(x,y)=0$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению

$\dfrac{x(u_{yx}''u-u_x'u_y')}{u_y'}+\delta xu_x'+\gamma yu_y'+\dfrac{xyu_y'u_x'}{u}=0$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y)=e^{w(x,y)}$, тогда $u_y'=e^w w_y'$, $u_x'=e^w w_x'$,

$u_{xy}''=\left(e^w w_x'\right)_y'=e^w\left(w_x'w_y'+w_{xy}''\right)$, $u_{yx}''=\left(e^w w_y'\right)_x'=e^w\left(w_y'w_x'+w_{yx}''\right)$. После подстановки этих выражений в уравнение найдем $\dfrac{xw_{xy}''}{w_y'}+\delta xw_x'+\gamma yw_y'+yxw_y'w_x'=0$.

Пусть $x=e^\eta$, $\eta=\ln x$, $\xi=\ln y$, $y=e^\xi$, $w_x'=\dfrac{w_\eta'}{e^\eta}$, $w_y'=\dfrac{w_\xi'}{e^\xi}$, $w_{yx}''=\dfrac{w_{\xi\eta}''}{e^\xi e^\eta}$, $w_{xy}''=\dfrac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi}$. После подстановки этих выражений в уравнение найдем $w_{\eta\xi}''+\delta w_\eta'+\gamma w_\xi'+w_\eta'w_\xi'=0$ это уравнение Томаса .

Пример . $u(x,t)+aL_x'u(x,t)+bL_t'u(x,t)+cL_{tx}''u(x,t)+dL_{xt}''u(x,t)+eL_{xx}''u(x,t)+fL_{tt}''u(x,t)+gL_{xxx}'''u(x,t)+qL_{ttt}'''u(x,t)+nL_{ttx}'''u(x,t)+rL_{xxt}'''u(x,t)=0$,
где a , b , c , d , e , f , g , q , n , r это постоянные .

$L_x'u=\dfrac{xu_x'}{u}$, $L_t'u=\dfrac{tu_t'}{u}$,

$L_{tx}''u=\dfrac{x\left(u_{tx}''u-u_x'u_t'\right)}{uu_t'}$, $L_{xt}''u=\dfrac{t\left(u_{xt}''-u_t'u_x'\right)}{uu_x'}$,

$L_{xx}''u=\dfrac{uu_x'+xu_{xx}''u-x\left(u_x'\right)^2}{uu_x'}$, $L_{tt}''u=\dfrac{uu_t'+tu_{tt}''u-t\left(u_t'\right)^2}{uu_t'}$,

$$L_{ttt}'''u=\left(L_{tt}''u\right)_t'=\frac{t\left(u^2u_t'u_{tt}''+tu^2u_t'u_{ttt}'''-u\left(u_t'\right)^3-tu\left(u_t'\right)^2u_{tt}''-tu^2\left(u_{tt}\right)^2+t\left(u_t'\right)^4\right)}{uu_t'\left(uu_t'+tuu_{tt}''-t\left(u_t'\right)^2\right)},$$

$$L_{xxx}'''u=\left(L_{xx}''u\right)_x'=\frac{x\left(u^2u_x'u_{xx}''+xu^2u_x'u_{xxx}'''-u\left(u_x'\right)^3-xu\left(u_x'\right)^2u_{xx}''-xu^2\left(u_{xx}''\right)^2+x\left(u_x'\right)^4\right)}{uu_x'\left(uu_x'+xuu_{xx}''-x\left(u_x'\right)^2\right)},$$

$$L_{xxt}'''u=\left(L_{xx}''u\right)_t'=\frac{tx\left(u^2\left(u_{xxt}'''u_x'-u_{xx}''u_{xt}''\right)-\left(u_x'\right)^2\left(u_{xt}''u-u_x'u_t'\right)\right)}{uu_x'\left(u_x'u+xuu_{xx}''-x\left(u_x'\right)^2\right)},$$

$$L_{ttx}'''u=\left(L_{tt}''u\right)_x'=\frac{xt\left(u^2\left(u_{ttx}'''u_t'-u_{tt}''u_{tx}''\right)-\left(u_t'\right)^2\left(u_{tx}''u-u_t'u_x'\right)\right)}{uu_t'\left(u_t'u+tuu_{tt}''-t\left(u_t'\right)^2\right)}.$$

Пусть $u(x,t)=e^{w(x,t)}$, тогда $u_x'=e^w w_x'$, $u_t'=e^w w_t'$,

$u_{tt}''=e^w\left(w_t'\right)^2+e^w w_{tt}''=e^w\left(\left(w_t'\right)^2+w_{tt}''\right)$, $u_{xx}''=e^w\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)$, $u_{xt}''=\left(e^w w_x'\right)_t'=e^w w_t' w_x'+e^w w_{xt}''=e^w\left(w_t'w_x'+w_{xt}''\right)$, $u_{tx}''=e^w\left(w_x'w_t'+w_{tx}''\right)$,

$u_{xxx}'''=\left(e^w\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)\right)_x'=e^w w_x'\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)+e^w\left(2w_x'w_{xx}''+w_{xxx}'''\right)=e^w\left(\left(w_x'\right)^3+3w_x'w_{xx}''+w_{xxx}'''\right)$, $u_{ttt}'''=e^w\left(\left(w_t'\right)^3+3w_t'w_{tt}''+w_{ttt}'''\right)$,

$u_{ttx}'''=e^w\left(w_x'\left(w_t'\right)^2+w_{tt}''w_x'+2w_t'w_{tx}''+w_{ttx}'''\right)$, $u_{xxt}'''=\left(e^w\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)\right)_t'=e^w w_t'\left(\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''\right)+e^w\left(2w_x'w_{xt}''+w_{xxt}'''\right)=e^w\left(w_t'\left(w_x'\right)^2+w_{xx}''w_t'+2w_x'w_{xt}''+w_{xxt}'''\right)$,

тогда $L_x'u=x\dfrac{e^w w_x'}{e^w}=xw_x'$, $L_t'u=t\dfrac{e^w w_t'}{e^w}=tw_t'$,

$$L_{tx}''u = x\frac{e^{2w}\left(w_x'w_t' + w_{tx}'' - w_x'w_t'\right)}{e^{2w}w_t'} = \frac{xw_{tx}''}{w_t'}\ ,\ L_{xt}''u = t\frac{e^{2w}\left(w_t'w_x' + w_{xt}'' - w_t'w_x'\right)}{e^{2w}w_x'} = \frac{tw_{xt}''}{w_x'}\ ,$$

$$L_{xx}''u = \frac{e^{2w}\left(w_x' + x\left(w_x'\right)^2 + xw_{xx}'' - x\left(w_x'\right)^2\right)}{e^{2w}w_x'} = \frac{w_x' + xw_{xx}''}{w_x'}\ ,\ L_{tt}''u = \frac{e^{2w}\left(w_t' + t\left(w_t'\right)^2 + tw_{tt}'' - t\left(w_t'\right)^2\right)}{e^{2w}w_t'} = \frac{w_t' + tw_{tt}''}{w_t'}\ ,$$

$$L_{ttt}'''u = t\frac{e^{4w}\left(w_t'\left(\left(w_t'\right)^2 + w_{tt}''\right) + tw_t'\left(\left(w_t'\right) + 3w_t'w_{tt}'' + w_{ttt}'''\right) - \left(w_t'\right)^3 - t\left(w_t'\right)^2\left(\left(w_t'\right)^2 + w_{tt}''\right) - t\left(\left(w_t\right)^2 + w_{tt}''\right)^2 + t\left(w_t'\right)^4\right)}{e^{4w}w_t'\left(w_t' + t\left(\left(w_t'\right)^2 + w_{tt}''\right) - t\left(w_t'\right)^2\right)} =$$

$$= t\frac{\left(w_t'\right)^3 + w_t'w_{tt}'' + t\left(w_t'\right)^4 + 3t\left(w_t'\right)^2 w_{tt}'' + tw_t'w_{ttt}''' - \left(w_t'\right)^3 - t\left(w_t'\right)^4 - t\left(w_t'\right)^2 w_{tt}'' - t\left(w_t'\right)^4 - 2t\left(w_t'\right)^2 w_{tt}'' - t\left(w_{tt}''\right)^2 + t\left(w_t'\right)^4}{w_t'\left(w_t' + tw_{tt}''\right)} = t\frac{w_t'w_{tt}'' + tw_t'w_{ttt}''' - t\left(w_{tt}''\right)^2}{w_t'\left(w_t' + tw_{tt}''\right)}\ ,$$

$$L_{xxx}'''u = x\frac{w_x'w_{xx}'' + xw_x'w_{xxx}''' - x\left(w_{xx}''\right)^2}{w_x'\left(w_x' + xw_{xx}''\right)}\ ,$$

$$L_{xxt}'''u = tx\frac{w_{xxt}'''w_x' - w_{xx}''w_{xt}''}{w_x'\left(w_x' + xw_{xx}''\right)}\ ,$$

$$L_{ttx}'''u = xt\frac{e^{4w}\left(w_t'\left(w_x'\left(w_t'\right)^2 + w_{tt}''w_x' + 2w_t'w_{tx}'' + w_{ttx}'''\right) - \left(\left(w_t'\right)^2 + w_{tt}''\right)\left(w_t'w_x' + w_{xt}''\right)\right)}{e^{4w}w_t'\left(w_t' + t\left(\left(w_t'\right)^2 + w_{tt}''\right) - t\left(w_t'\right)^2\right)} = xt\frac{w_{ttx}'''w_t' - w_{tt}''w_{xt}''}{w_t'\left(w_t' + tw_{tt}''\right)}\ .$$

Пусть $x = e^{\eta}$, $\eta = \ln x$, $\xi = \ln t$, $t = e^{\xi}$, откуда $w_x' = w_\eta'\eta_x' = w_\eta'\dfrac{1}{x} = \dfrac{w_\eta'}{e^{\eta}}$, $w_t' = w_\xi'\xi_t' = w_\xi'\dfrac{1}{t} = \dfrac{w_\xi'}{e^{\xi}}$, Пусть $x = e^{\eta}$, $\eta = \ln x$, $\xi = \ln t$, $t = e^{\xi}$, откуда $w_x' = w_\eta' \eta_x' = w_\eta' \dfrac{1}{x} = \dfrac{w_\eta'}{e^\eta}$, $w_t' = w_\xi' \xi_t' = w_\xi' \dfrac{1}{t} = \dfrac{w_\xi'}{e^\xi}$,

$$w_{xt}'' = \left(w_x'\right)_t' = \left(\frac{w_\eta'}{e^\eta}\right)_t' = \frac{\left(w_\eta'\right)_t' e^\eta - w_\eta' \left(e^\eta\right)_t'}{e^{2\eta}} = \frac{w_{\eta\xi}'' \xi_t' e^\eta - 0}{e^{2\eta}} = \frac{w_{\eta\xi}'' \frac{1}{t}}{e^\eta} = \frac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi} , \quad w_{tx}'' = \left(w_t'\right)_x' = \left(\frac{w_\xi'}{e^\xi}\right)_x' = \frac{\left(w_\xi'\right)_x' e^\xi - w_\xi' \left(e^\xi\right)_x'}{e^{2\xi}} = \frac{w_{\xi\eta}'' \eta_x' e^\xi - 0}{e^{2\xi}} = \frac{w_{\xi\eta}'' \frac{1}{x}}{e^\xi} = \frac{w_{\xi\eta}''}{e^\xi e^\eta}$$

$$w_{tt}'' = \left(w_t'\right)_t' = \left(\frac{w_\xi'}{e^\xi}\right)_t' = \frac{\left(w_\xi'\right)_t' e^\xi - w_\xi' \left(e^\xi\right)_t'}{e^{2\xi}} = \frac{w_{\xi\xi}'' \xi_t' e^\xi - w_\xi' e^\xi \frac{1}{t}}{e^{2\xi}} = \frac{w_{\xi\xi}'' \frac{1}{t} e^\xi - w_\xi' \frac{1}{t} e^\xi}{e^{2\xi}} = \frac{\frac{1}{e^\xi}\left(w_{\xi\xi}'' - w_\xi'\right)}{e^\xi} = \frac{w_{\xi\xi}'' - w_\xi'}{e^{2\xi}} ,$$

$$w_{xx}'' = \left(w_x'\right)_x' = \left(\frac{w_\eta'}{e^\eta}\right)_x' = \frac{\left(w_\eta'\right)_x' e^\eta - w_\eta' \left(e^\eta\right)_x'}{e^{2\eta}} = \frac{w_{\eta\eta}'' \eta_x' e^\eta - w_\eta' e^\eta \frac{1}{x}}{e^{2\eta}} = \frac{w_{\eta\eta}'' \frac{1}{x} e^\eta - w_\eta' \frac{1}{x} e^\eta}{e^{2\eta}} = \frac{\frac{1}{e^\eta}\left(w_{\eta\eta}'' - w_\eta'\right)}{e^\eta} = \frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}}$$

$$w_{xxx}''' = \left(w_{xx}''\right)_x' = \left(\frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}}\right)_x' = \frac{\left(\left(w_{\eta\eta}''\right)_x' - \left(w_\eta'\right)_x'\right) e^{2\eta} - \left(w_{\eta\eta}'' - w_\eta'\right)\left(e^{2\eta}\right)_x'}{e^{4\eta}} = \frac{\left(w_{\eta\eta\eta}''' \eta_x' - w_{\eta\eta}'' \eta_x'\right) e^{2\eta} - \left(w_{\eta\eta}'' - w_\eta'\right) 2e^{2\eta} \eta_x'}{e^{4\eta}} = \frac{\eta_x' \left(w_{\eta\eta\eta}''' - w_{\eta\eta}'' - 2w_{\eta\eta}'' + 2w_\eta'\right)}{e^{2\eta}} = \frac{w_{\eta\eta\eta}''' - 3w_{\eta\eta}'' + 2w_\eta'}{e^{3\eta}} ,$$

$$w_{ttt}''' = \left(w_{tt}''\right)_t' = \frac{w_{\xi\xi\xi}''' - 3w_{\xi\xi}'' + 2w_\xi'}{e^{3\xi}} ,$$

$$w_{ttx}''' = \left(w_{tt}''\right)_x' = \frac{w_{\xi\xi\eta}''' - w_{\xi\eta}''}{e^\eta e^{2\xi}} ,$$

$$w_{xxt}''' = \left(w_{xx}''\right)_t' = \left(\frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}}\right)_t' = \frac{w_{\eta\eta\xi}''' \xi_t' - \xi_t' w_{\eta\xi}''}{e^{2\eta}} = \frac{w_{\eta\eta\xi}''' - w_{\eta\xi}''}{e^\xi e^{2\eta}} .$$

Значит $L_x'u = xw_x' = e^\eta \frac{w_\eta'}{e^\eta} = w_\eta'$, $L_t'u = tw_t' = e^\xi \frac{w_\xi'}{e^\xi} = w_\xi'$, $L_{xt}''u = t\frac{w_{xt}''}{w_x'} = e^\xi \frac{\frac{w_{\xi\eta}''}{e^\xi e^\eta}}{\frac{w_\eta'}{e^\eta}} = \frac{w_{\xi\eta}''}{w_\eta'}$, $L_{tx}''u = x\frac{w_{tx}''}{w_t'} = e^\eta \frac{\frac{w_{\eta\xi}''}{e^\eta e^\xi}}{\frac{w_\xi'}{e^\xi}} = \frac{w_{\eta\xi}''}{w_\xi'}$,

$$L_{tt}''u = \frac{w_t' + tw_{tt}''}{w_t'} = \frac{\frac{w_\xi'}{e^\xi} + e^\xi \frac{w_{\xi\xi}'' - w_\xi'}{e^{2\xi}}}{\frac{w_\xi'}{e^\xi}} = \frac{w_{\xi\xi}''}{w_\xi'} \ , \ L_{xx}''u = \frac{w_x' + xw_{xx}''}{w_x'} = \frac{\frac{w_\eta'}{e^\eta} + e^\eta \frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}}}{\frac{w_\eta'}{e^\eta}} = \frac{w_{\eta\eta}''}{w_\eta'} \ ,$$

$$L_{xxx}'''u = x\frac{w_x' w_{xx}'' + xw_x' w_{xxx}''' - x\left(w_{xx}''\right)^2}{w_x'\left(w_x' + xw_{xx}''\right)} = e^\eta \frac{\frac{w_\eta'}{e^\eta}\frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}} + e^\eta \frac{w_\eta'}{e^\eta}\frac{w_{\eta\eta\eta}''' - 3w_{\eta\eta}'' + 2w_\eta'}{e^{3\eta}} - e^\eta \frac{\left(w_{\eta\eta}'' - w_\eta'\right)^2}{e^{4\eta}}}{\frac{w_\eta'}{e^\eta}\left(\frac{w_\eta'}{e^\eta} + e^\eta \frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}}\right)} =$$

$$\frac{w_\eta' w_{\eta\eta}'' - \left(w_\eta'\right)^2 + w_{\eta\eta\eta}''' w_\eta' - 3w_\eta' w_{\eta\eta}'' + 2\left(w_\eta'\right)^2 - \left(w_{\eta\eta}''\right)^2 + 2w_\eta' w_{\eta\eta}'' - \left(w_\eta'\right)^2}{w_\eta' w_{\eta\eta}''} = \frac{w_{\eta\eta\eta}'''}{w_{\eta\eta}''} - \frac{w_{\eta\eta}''}{w_\eta'} \ ,$$

$$L_{ttt}'''u = \frac{w_{\xi\xi\xi}'''}{w_{\xi\xi}''} - \frac{w_{\xi\xi}''}{w_\xi'} \ ,$$

$$L_{ttx}'''u = \frac{w_{\xi\xi\eta}'''}{w_{\xi\xi}''} - \frac{w_{\eta\xi}''}{w_\xi'} \ ,$$

$$L_{xxt}'''u = tx\frac{\frac{w_{\eta\eta\xi}''' - w_{\eta\xi}''}{e^\xi e^{2\eta}}\frac{w_\eta'}{e^\eta} - \frac{w_{\eta\xi}''}{e^\xi e^\eta}\frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}}}{\frac{w_\eta'}{e^\eta}\left(\frac{w_\eta'}{e^\eta} + x\frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{e^{2\eta}}\right)} = \frac{w_{\eta\eta\xi}'''}{w_{\eta\eta}''} - \frac{w_{\eta\xi}''}{w_\eta'} \ .$$

Подставим эти выражения в уравнение получим уравнение

$$e^{w}+aw_{\eta}'+bw_{\xi}'+c\frac{w_{\xi\eta}''}{w_{\xi}'}+d\frac{w_{\eta\xi}''}{w_{\eta}'}+f\frac{w_{\eta\eta}''}{w_{\eta}'}+g\frac{w_{\xi\xi}''}{w_{\xi}'}+p\left(\frac{w_{\eta\eta\eta}'''}{w_{\eta\eta}''}-\frac{w_{\eta\eta}''}{w_{\eta}'}\right)+q\left(\frac{w_{\xi\xi\xi}'''}{w_{\xi\xi}''}-\frac{w_{\xi\xi}''}{w_{\xi}'}\right)+n\left(\frac{w_{\xi\xi\eta}'''}{w_{\xi\xi}''}-\frac{w_{\eta\xi}''}{w_{\xi}'}\right)+r\left(\frac{w_{\eta\eta\xi}'''}{w_{\eta\eta}''}-\frac{w_{\eta\xi}''}{w_{\eta}'}\right)=0,$$

это уравнение не содержит в явном виде переменных η , ξ .

Найдем волновое решение этого уравнения . Пусть $w(\xi,\eta)=v(\alpha)$, где $\alpha=\xi-\lambda\eta$ отсюда $w_{\xi}'=v_{\alpha}'\alpha_{\xi}'=v_{\alpha}'$, $w_{\eta}'=v_{\alpha}'\alpha_{\eta}'=-\lambda v_{\alpha}'$,

$$w_{\eta\xi}''=\left(w_{\eta}'\right)_{\xi}'=\left(-\lambda v_{\alpha}'\right)_{\xi}'=-\lambda v_{\alpha\alpha}''\alpha_{\xi}'=-\lambda v_{\alpha\alpha}'',\ w_{\xi\eta}''=\left(w_{\xi}'\right)_{\eta}'=\left(v_{\alpha}'\right)_{\eta}'=v_{\alpha\alpha}''\alpha_{\eta}'=-\lambda v_{\alpha\alpha}'',\ w_{\xi\xi}''=\left(w_{\xi}'\right)_{\xi}'=\left(v_{\alpha}'\right)_{\xi}'=v_{\alpha\alpha}''\alpha_{\xi}'=v_{\alpha\alpha}'',\ w_{\eta\eta}''=\left(w_{\eta}'\right)_{\eta}'=\left(-\lambda v_{\alpha}'\right)_{\eta}'=-\lambda v_{\alpha\alpha}''\alpha_{\eta}'=\lambda^{2}v_{\alpha\alpha}'',$$

$$w_{\eta\eta\eta}'''=\left(w_{\eta\eta}''\right)_{\eta}'=\left(\lambda^{2}v_{\alpha\alpha}''\right)_{\eta}'=\lambda^{2}v_{\alpha\alpha\alpha}'''\alpha_{\eta}'=-\lambda^{3}v_{\alpha\alpha\alpha}''',\ w_{\xi\xi\xi}'''=\left(w_{\xi\xi}''\right)_{\xi}'=\left(v_{\alpha\alpha}''\right)_{\xi}'=v_{\alpha\alpha\alpha}'''\alpha_{\xi}'=v_{\alpha\alpha\alpha}''',$$

$$w_{\xi\xi\eta}'''=\left(w_{\xi\xi}''\right)_{\eta}'=\left(v_{\alpha\alpha}''\right)_{\eta}'=v_{\alpha\alpha\alpha}'''\alpha_{\eta}'=-\lambda v_{\alpha\alpha\alpha}''',\ w_{\eta\eta\xi}'''=\left(w_{\eta\eta}''\right)_{\xi}'=\left(\lambda^{2}v_{\alpha\alpha}''\right)_{\xi}'=\lambda^{2}v_{\alpha\alpha\alpha}'''\alpha_{\xi}'=\lambda^{2}v_{\alpha\alpha\alpha}'''.$$

Подставим эти вырахения в уравнение найдем уравнение

$$e^{v}-\lambda av'+bv'-c\frac{v''}{v'}+\lambda d\frac{v''}{v'}-\lambda f\frac{v''}{v'}+g\frac{v''}{v'}+p\left(-\lambda\frac{v'''}{v''}+\lambda\frac{v''}{v'}\right)+q\left(\frac{v'''}{v''}-\frac{v''}{v'}\right)+n\left(-\lambda\frac{v'''}{v''}+\lambda\frac{v''}{v'}\right)+r\left(\frac{v'''}{v''}-\frac{v''}{v'}\right)=0,$$

$$e^{v}+(b-\lambda a)v'+(\lambda d+\lambda p+\lambda n+g-c-q-\lambda f-\lambda r)\frac{v''}{v'}+(q+r-\lambda p-\lambda n)\frac{v'''}{v''}=0,\ Av'+B\frac{v''}{v'}+C\frac{v'''}{v''}+e^{v}=0,$$

где $A=b-\lambda a$, $B=\lambda d+\lambda p+\lambda n+g-c-q-\lambda f-\lambda r,$ $C=q+r-\lambda p-\lambda n$, это уравнение можно решить численно .

Пусть $v'(\alpha)=\mu(v)$, откуда $v''(\alpha)=\mu(v)\mu_{v}'(v)$, $v'''(\alpha)=\mu(v)^{2}\mu_{\alpha\alpha}''(v)+\left(\mu_{v}'(v)\right)^{2}\mu(v)$, после подстановки найдем уравнение $e^{v}+A\mu+(B+C)\mu'+C\mu\dfrac{\mu''}{\mu'}=0$,

это уравнение имеет частное решение $\mu=\rho e^{v}$, где $\rho=-\dfrac{1}{A+B+2C}$, можно проверить подстановкой , значит $v'=\lambda v$, $v(\alpha)=\ln\dfrac{1}{r-\rho\alpha}$, где r постаянная .

Поэтому $w(\xi,\eta)=\ln\dfrac{1}{r-\rho(\xi-\lambda\eta)}$, $w(x,t)=\ln\dfrac{1}{r-\rho\ln\dfrac{x}{t^{\lambda}}}$, $u(x,t)=e^{\ln\frac{1}{r-\rho\ln\frac{x}{t^{\lambda}}}}=\dfrac{1}{r-\rho\ln\dfrac{x}{t^{\lambda}}}$.

Другое решение . $Av' + B\frac{v''}{v'} + C\frac{v'''}{v''} + e^v = 0$, умножим на v' , тогда интегрируем $Av'v' + B\frac{v''}{v'}v' + C\frac{v'''}{v''}v' + e^v v' = 0$, $\int v'v'd\alpha = \int v'dv = v$, $\int \frac{v''}{v'}v'd\alpha = \int \frac{v''}{v'}dv = \int \frac{dv'}{v'} = \ln|v'|$, $\int \frac{v'''}{v''}v'd\alpha = \int \frac{v'''}{v''}dv = \int \frac{dv''}{v''} = \ln|v''|$, $\int e^v v'd\alpha = \int e^v dv = e^v$, после подстановки получим уравнение $Av + B\ln|v'| + C\ln|v''| + e^v = C_1$, это первый интеграл данного уравнения . Пусть $v'(\alpha) = p(v)$, отсюда $v''(\alpha) = p\frac{dp}{dv}$, откуда $Av + B\ln|p(v)| + C\ln\left|p(v)\frac{dp}{dv}\right| + e^v = C_1$. Рассмотрим уравнение $A\mu + B\mu' + C\frac{\mu''\mu + (\mu')^2}{\mu'} = 0$. Пусть $\mu'(v) = \sigma(\mu)$, значит $\mu''(v) = \frac{d\mu(v)}{dv} = \frac{d\sigma(\phi)}{d\mu}\frac{d\mu(v)}{dv} = \sigma'(\mu)\sigma(\mu)$, тогда $A\mu + B\sigma + C(\sigma' + \sigma) = 0$, $A\mu + (B + C)\sigma + C\sigma' = 0$, это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $\sigma(\mu) = \frac{A}{(B + C)^2}(C - (B + C)\mu) + e^{-\frac{(C+B)}{C}\mu}C_1$. Рассмотрим уравнение $Av' + B\frac{v''}{v'} + C\frac{v'''}{v''} = 0$. Пусть $v'(\alpha) = z(\alpha)$ поэтому $v''(\alpha) = z'(\alpha)$, $v'''(\alpha) = z''(\alpha)$, отсюда $Az + B\frac{z'}{z} + C\frac{z''}{z'} = 0$. Пусть $z'(\alpha) = \mu(z)$, откуда $z''(\alpha) = \frac{dz'(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d\mu(z)}{dz}\frac{dz(\alpha)}{d\alpha} = \mu'(z)\mu(z)$, значит $Az + B\frac{\mu}{z} + C\frac{\mu'\mu}{\mu} = 0$, $Az + B\frac{\mu}{z} + C\mu' = 0$, это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $\mu(z) = -\frac{Az^2}{2C + B} + z^{-\frac{B}{C}}C_1$.

Пример . $L_t'u(x,t) + aL_{xx}''u(x,t) = bL_{xxx}'''u(x,t)$. Делая аналогичные преобразования получим уравнение $w_\zeta' + \frac{w_{\eta\eta}''}{w_\eta'}a = b\left(\frac{w_{\eta\eta\eta}'''}{w_{\eta\eta}''} - \frac{w_{\eta\eta}''}{w_\eta'}\right)$. Это уравнение можно написать в виде $\frac{\partial}{\partial\zeta}w = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(b\bullet\ln w_{\eta\eta}'' - (b + a)\bullet\ln w_\eta'\right)$, получили закон сохранения какой физический смысл этого закона . $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial\zeta}(\ln t)_t' \Rightarrow t\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial\zeta}$, $w_\zeta' = w_t'e^\zeta = tw_t'$, $w_\eta' = w_x'e^\eta = xw_x'$, $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial\eta}(\ln x)_x' \Rightarrow x\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial\eta}$, пусть $\frac{\partial w}{\partial\eta} = \phi(\zeta,\eta) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} = \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = x\frac{\partial\phi}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}\right) = x\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}x\right)$, $w_{xx}'' = \frac{w_{\eta\eta}'' - w_\eta'}{x^2} \Rightarrow w_{\eta\eta}'' = w_\eta' + w_{xx}''x^2 = xw_x' + w_{xx}''x^2$. Подставим эти выражения в закон сохранения $t\bullet\frac{\partial}{\partial t}(\ln u) = x\bullet\frac{\partial}{\partial x}\left(b\bullet\ln\left(x\bullet\frac{\partial}{\partial x}(\ln u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln u)\bullet x^2\right) - (b + a)\bullet\ln\left(x\bullet\frac{\partial}{\partial x}(\ln u)\right)\right)$.

Пример . $L_t'u(x,t) = aL_{xx}''u(x,t)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $\frac{tu_t'}{u} = a\frac{uu_x' + xuu_{xx}'' - x(u_x')^2}{uu_x'}$, $tu_t'u_x' = a\left(uu_x' + xuu_{xx}'' - x(u_x')^2\right)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$, отсюда $L_x'u = L'X(x)$, $L_t'u = L'T(t)$, $L_{tt}''u = L''T(t)$, $L_{xx}'' = L''X(x)$, тогда $L'T = aL''X \Rightarrow L'T = \lambda$, $T(t) = At^\lambda, L''X = \frac{\lambda}{a}$, $X(x) = A_1e^{aBx^{\frac{\lambda}{a}}}$, откуда $u(x,t) = At^\lambda A_1e^{aBx^{\frac{\lambda}{a}}} = At^\lambda e^{aBx^{\frac{\lambda}{a}}}$.

Другое решение . $L_t'u(x,t) = aL_{xx}''u(x,t)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t) = e^{\omega(x,t)}$, значит $u_t' = e^\omega\omega_t', u_x' = e^\omega\omega_x'$, $u_{x^2}'' = e^\omega(\omega_x')^2 + e^\omega\omega_{x^2}'', u_{t^2}'' = e^\omega(\omega_t')^2 + e^\omega\omega_{t^2}''$, тогда $te^{2\omega}\omega_x'\omega_t' = a\left(e^{2\omega}\omega_x' + xe^{2\omega}\left((\omega_x')^2 + \omega_{xx}'' - (\omega_x')^2\right)\right)$, $t\omega_t' = a\left(1 + x\frac{\omega_{xx}''}{\omega_x'}\right)$.

Пусть $x=e^{\eta}$, $\eta=\ln x$, $\xi=\ln t$, $t=e^{\xi}$, $\omega_t'=\dfrac{\omega_{\xi}'}{e^{\xi}}$, $\omega_x'=\dfrac{\omega_{\eta}'}{e^{\eta}}$, $\omega_{x^2}''=\dfrac{\omega_{\eta^2}''-\omega_{\eta}'}{e^{2\eta}}$, $\omega_{t^2}''=\dfrac{\omega_{\xi^2}''-\omega_{\xi}'}{e^{2\xi}}$, тогда $e^{\xi}\dfrac{\omega_{\xi}'}{e^{\xi}}=a\left(1+e^{\eta}\dfrac{\dfrac{\omega_{\eta\eta}''-\omega_{\eta}'}{e^{2\eta}}}{\dfrac{\omega_{\eta}'}{e^{\eta}}}\right)$, $\omega_{\xi}'\omega_{\eta}'=a\omega_{\eta\eta}''$.

Пусть $u(x,t)=t^{\lambda}e^{ax^{\frac{\lambda}{a}}}$, тогда $\omega(x,t)=\ln u(x,t)=\lambda\ln t+ax^{\frac{\lambda}{a}}$, $x=e^{\eta}$, $t=e^{\xi}$, отсюда $\omega(\eta,\xi)=\lambda\xi+ae^{\frac{\lambda}{a}\eta}$, можно проверить что эта функция частное решение уравнения

$\omega_{\xi}'\omega_{\eta}'=a\omega_{\eta\eta}''$, $\omega_{\xi}'=\lambda$, $\omega_{\eta}'=a\dfrac{\lambda}{a}e^{\frac{\lambda}{a}\eta}=\lambda e^{\frac{\lambda}{a}\eta}$, $\omega_{\eta\eta}''=\dfrac{\lambda^2}{a}e^{\frac{\lambda}{a}\eta}$, $\lambda\lambda e^{\frac{\lambda}{a}\eta}=a\dfrac{\lambda^2}{a}e^{\frac{\lambda}{a}\eta}$.

Другое решение . Пусть $\omega(\eta,\xi)=F(\eta)G(\xi)$, откуда получим уравнение $F'(\eta)G(\xi)F(\eta)G'(\xi)=aF''(\eta)G(\xi)$, $F'(\eta)F(\eta)G'(\xi)=aF''(\eta)$,

значит $G'(\xi)=a\dfrac{F''(\eta)}{F(\eta)F'(\eta)}=\lambda$, поэтому $G'(\xi)=\lambda$, $G(\xi)=\lambda\xi+c_1(\eta)$, $\dfrac{F''(\eta)}{F(\eta)F'(\eta)}=\dfrac{\lambda}{a}$, $F''(\eta)=\dfrac{\lambda}{a}F'(\eta)F(\eta)$.

Пусть $F'(\eta)=Z(F)$, отсюда $F''(\eta)=\dfrac{dZ}{dF}Z$, тогда найдем уравнение $\dfrac{dZ}{dF}=\dfrac{\lambda}{a}FZ$, $\dfrac{dZ}{Z}=\dfrac{\lambda}{a}FdF$, $\ln Z=\dfrac{\lambda}{a}\dfrac{F^2}{2}+c_2$, $Z=e^{\frac{\lambda}{a}\frac{F^2}{2}}c_2$,

$F'(\eta)=e^{\frac{\lambda}{a}\frac{F}{2}}c_2$, $\dfrac{dF}{d\eta}=e^{\frac{\lambda}{a}\frac{F^2}{2}}c_2$, $e^{-\frac{\lambda}{2a}F^2}dF=c_2d\eta$, $\int e^{-\frac{\lambda}{2a}F^2}dF=\int c_2d\eta$, тогда $\dfrac{\sqrt{\pi}\bullet erf\left(\sqrt{r}\bullet F\right)}{2\sqrt{r}}=c_2\eta+c$, где $r=\dfrac{\lambda}{2a}$, $\int e^{-rx^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}\bullet erf\left(\sqrt{r}\bullet x\right)}{2\sqrt{r}}$.

Найдем волновое решение этого уравнения Пусть $\omega(\eta,\xi)=f(\rho)$, где $\rho=\eta-v\xi$, откуда $w_{\eta}'=f_{\rho}'$, $w_{\xi}'=-vf_{\rho}'$, $w_{\xi\eta}''=-vf_{\rho\rho}''$, $w_{\xi^2}''=\left(w_{\xi}'\right)_{\xi}'=\left(-vf_{\rho}'\right)_{\xi}'=-vf_{\rho\rho}''\alpha_{\xi}'=v^2f_{\rho\rho}''$.

Значит $-vf_{\mu}'f_{\mu}'=av^2f_{\rho\rho}''$, пусть $f_{\rho}'(\rho)=g(\rho)$, тогда $f_{\rho\rho}''(\rho)=gg_{\rho}'(\rho)$, тогда $-vg=av^2g_{\rho}'$. Решение этого уравнения $g(\rho)=re^{-\frac{\rho}{av}}$, $f(\rho)=\int re^{-\frac{\rho}{av}}d\mu=-\dfrac{r}{av}e^{-\frac{\rho}{av}}+r_1$,

поэтому $w(\eta,\xi)=-\dfrac{r}{av}e^{-\frac{\eta-v\xi}{a^2v}}+r_1$, отсюда $u(x,t)=e^{-\frac{r}{av}e^{-\frac{\ln x-v\ln t}{av}}+r_1}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $F(x,t,u,u_x,u_t,u_{tt},u_{xx},u_{xt})=0$. Дифференциальное уравнение в частных производных имеет автономное решение ,

если существуют функции $A(t),g(t)$ что решение уравнения может быть найденно в виде $u(x,t)=A(t)f\left(\dfrac{x}{g(t)}\right)$, тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение . Обычно решение представляется в виде $u(x,t)=t^{\alpha}v(\xi)$, где $\xi = xt^{\beta}$. Профили этих решений в разные моменты времени получаются друг из друга преобразованиями подобия сжатия растяжения . Автомодельные решения существуют если если растяжение зависимой независимой переменных делают по правилам $x=c^k\overline{x}$, $t=c\overline{t}$, $u(x,t)=c^m\overline{u}(\overline{x},\overline{t})$, где $c>0$ произвольная постоянная . При соответсевующем выборе k , m это преобразование эквивалентно тождественному преобразованию то есть данное уравнение в результате этого преобразования переходит в такое же уравнение $F(\overline{x},\overline{t},\overline{u},\overline{u}_x,\overline{u}_t,\overline{u}_{tt},\overline{u}_{xx},\overline{u}_{xt})=0$.

Пример . $L_x'u(x,t)=aL_{t^2}''u(x,t)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $\frac{xu_x'}{u}=a\frac{uu_t'+tuu_{t^2}''-t(u_t')^2}{uu_t'}$, $xu_x'=a\left(u+tu\frac{u_{t^2}''}{u_t'}-tu_t'\right)$

Найдем автономное решение этого уравнения . Пусть $u(x,t)$ решение этого уравнения , $\overline{u}(\overline{x},\overline{t})$ решение этого уравнения в переменных $\overline{x},\overline{t}$. Найдем связь между

$u(x,t)=t^{\alpha}v(\mu)=t^{\alpha}v(xt^{\beta})$, $\overline{u}(\overline{x},\overline{t})=\overline{t}^{\alpha}v(\overline{\mu})=\overline{t}^{\alpha}v(\overline{x}\overline{t}^{\beta})$, тогда $\frac{u(x,t)}{c^m}=\left(\frac{t}{c}\right)^{\alpha}v\left(\frac{x}{c^k}\left(\frac{t}{c}\right)^{\beta}\right)=c^{-\alpha}t^{\alpha}v\left(c^{-k-\beta}xt^{\beta}\right)$, тогда $u(x,t)=c^{m-\alpha}t^{\alpha}v\left(c^{-k-\beta}xt^{\beta}\right)$, чтобы эта функция удовлетворяла данному уравнению нужно чтобы решение совпадало с решением $u(x,t)=t^{\alpha}v(\mu)$ должно выполняться условие $m-\alpha=0$, $-k-\beta=0$, $\alpha=m$, $\beta=-k$.

Найдем производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial\left(c^m\overline{u}(\overline{x},\overline{t})\right)}{\partial(c\overline{t})}=\frac{c^m\partial\overline{u}}{c\partial\overline{t}}=c^{m-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial\left(c^m\overline{u}(\overline{x},\overline{t})\right)}{\partial(c^k\overline{x})}=\frac{c^m\partial\overline{u}}{c^k\partial\overline{x}}=c^{m-k}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}$,

$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\left(c^k\overline{x}\right)}\left(c^{m-k}\frac{\partial\overline{u}(\overline{x},\overline{t})}{\partial\overline{x}}\right)=\frac{c^{m-k}}{c^k}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x}^2}=c^{m-2k}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x}^2}$, $\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial(c\overline{t})}\left(c^{m-1}\frac{\partial\overline{u}(\overline{x},\overline{t})}{\partial\overline{t}}\right)=\frac{c^{m-1}}{c}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}=c^{m-2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}$.

Подставим эти выражения в уравнение $c^k\overline{x}c^{m-k}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}=a\left(c^m\overline{u}+c\overline{t}c^m\overline{u}\frac{c^{m-2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}}{c^{m-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}}-c\overline{t}c^{m-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}\right)$, $\overline{x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}=a\left(\overline{u}+\overline{t}\overline{u}\frac{\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}}{\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}}-\overline{t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}\right)$, тогда k,m любые числа ,

автономное решение имеет вид $u(x,t)=t^{\alpha}v(\mu)=t^{m}v(\mu)$, $\mu=xt^{\beta}=xt^{-k}$,

отсюда $\frac{\partial u}{\partial t}=mt^{m-1}v(\mu)+t^m\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}=mt^{m-1}v(\mu)+t^m\frac{dv}{d\mu}\left(-kxt^{-k-1}\right)=mt^{m-1}v(\mu)+t^{m-1}\frac{dv}{d\mu}\left(-kxt^{-k}\right)=t^{m-1}\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=t^m\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}=$

$=t^m\frac{dv}{d\mu}t^{-k}=t^{m-k}\frac{dv}{d\mu}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(t^{m-k}\frac{dv}{d\mu}\right)=t^{m-k}\frac{d^2v}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dx}=t^{m-k}\frac{d^2v}{d\mu^2}t^{-k}=t^{m-2k}\frac{d^2v}{d\mu^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{m-1}\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)\right)=(m-1)t^{m-2}\left(mv(\mu)-k\xi\frac{dv}{d\mu}\right)+$

$+t^{m-1}\left(m\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}-k\left(\frac{d\mu}{dt}\frac{dv}{d\mu}+\mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dt}\right)\right)=(m-1)t^{m-2}\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)+t^{m-1}\left(m\frac{dv}{d\mu}\left(-kxt^{-k-1}\right)-k\left(\left(-kxt^{-k-1}\right)\frac{dv}{d\mu}+\mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\left(-kxt^{-k-1}\right)\right)\right)=$

$=t^{m-2}\left((m-1)m\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)-kxt^{-k}\left(m\frac{dv}{d\mu}-k\frac{dv}{d\mu}+\mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)\right)=t^{m-2}\left((m-1)m\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)-k\mu\left(m\frac{dv}{d\mu}-k\frac{dv}{d\mu}+\mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)\right)=$

$=t^{m-2}\left((m-1)m^2v(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}(1+m-k)+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)$. Подставим эти выражения в уравнение $xt^{m-k}\frac{dv}{d\mu}=$

$$=a\left(t^m v(\mu)+tt^m v(\mu)\frac{t^{m-2}\left((m-1)m^2 v(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}(1+m-k)+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)}{t^{m-1}\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)}-tt^{m-1}\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)\right)=xt^{-k}t^m\frac{dv}{d\mu}=$$

$$=at^m\left(v(\mu)+v(\mu)\frac{(m-1)m^2 v(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}(1+m-k)+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}}{mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}}-\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)\right),$$

$$\mu\frac{dv}{d\mu}=a\left(v(\mu)+v(\mu)\frac{(m-1)m^2 v(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}(1+m-k)+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}}{mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}}-\left(mv(\mu)-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)\right)$$, это уравнение можно решить численно .

Пусть $\mu=e^\rho$, отсюда $\frac{dv}{d\mu}=\frac{1}{e^\rho}\frac{dv}{d\rho}$, $\frac{d^2v}{d\mu^2}=\frac{1}{e^{2\rho}}\left(\frac{d^2v}{d\rho^2}-\frac{dv}{d\rho}\right)$, тогда получим уравнение $\frac{dv}{d\rho}=a\left(v(\rho)+v(\rho)\frac{(m-1)m^2 v(\rho)-k\frac{dv}{d\rho}(1+m-k)+k\left(\frac{d^2v}{d\rho^2}-\frac{dv}{d\rho}\right)}{mv(\rho)-k\frac{dv}{d\rho}}-\left(mv(\rho)-k\frac{dv}{d\rho}\right)\right)$

это уравнение можно решить численно . Пусть $\frac{dv}{d\rho}=w(v)$, тогда $\frac{d^2v}{d\rho^2}=\frac{dw}{dv}w(v)$, получим уравнение

$$w(v)=a\left(v+v\frac{(m-1)m^2v-kw(v)(1+m-k)+k\left(\frac{dw}{dv}w(v)-w(v)\right)}{mv-kw(v)}-(mv-kw(v))\right)$$ это уравнение можно решить численно .

Пусть $m=0$, отсюда $u(x,t)=v\left(xt^{-k}\right)$, это дает $(1-ak)\,w(v)=a\left((2+k)\,v+k\left(1-w'(v)\right)\right)$ линейное дифференциальное уравнение первого порядка .

Найдем автомодельное решение уравнения $x\omega_x' = a\left(1 + t\dfrac{\omega_{t^2}''}{\omega_t'}\right)$, подставим выражения в данное уравнение $c^k c^{m-k}\bar{x}\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{x}} = a\left(1 + c\bar{t}\dfrac{c^{m-2}\dfrac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\bar{t}^2}}{c^{m-1}\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{t}}}\right)$, $c^m\bar{x} = a\left(1 + \bar{t}\dfrac{\dfrac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\bar{t}^2}}{\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{t}}}\right)$,

поэтому $m = 0$, отсюда $\omega(x,t) = v(\mu)$, где $\mu = xt^{-k}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial t} = \dfrac{dv}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dt} = -kxt^{-k-1}\dfrac{dv}{d\mu} = -kt^{-1}\mu\dfrac{dv}{d\mu}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial x} = \dfrac{d\omega}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dx} = t^{-k}\dfrac{dv}{d\mu}$, $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(t^{-k}\dfrac{dv}{d\mu}\right) = t^{-k}\dfrac{d^2v}{d\mu^2}\dfrac{d\mu}{dx} = t^{-2k}\dfrac{d^2v}{d\mu^2}$,

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-kt^{-1}\mu\frac{dv}{d\mu}\right) = -k\left(-t^{-2}\mu\frac{dv}{d\mu} + t^{-1}\left(\frac{d\mu}{dt}\frac{dv}{d\mu} + \mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)\right) = kt^{-1}\left(t^{-1}\mu\frac{dv}{d\mu} - \left(-xkt^{-k-1}\frac{dv}{d\mu} + \mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)\right) = kt^{-2}\left(\mu\frac{dv}{d\mu} + k\mu\frac{dv}{d\mu} - \mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\right) = kt^{-2}\left((1+k)\mu\frac{dv}{d\mu} - \mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\right),$$

$xt^{-k}\dfrac{dv}{d\mu} = a\left(1 + t\dfrac{kt^{-2}\left((1+k)\mu\dfrac{dv}{d\mu} - \mu\dfrac{d^2v}{d\mu^2}\right)}{-kt^{-1}\mu\dfrac{dv}{d\mu}}\right)$, $\mu\dfrac{dv}{d\mu} = -a\left(k + \dfrac{d^2v}{d\mu^2}\right)$, $\dfrac{dv}{d\mu} = z(\mu)$, $a\dfrac{dz}{d\mu} - z\mu + ka = 0$, решение этого уравнения $z(\mu) = -k\mu^2 erf\left(\dfrac{x}{\sqrt{2a}}\right)\sqrt{\dfrac{\pi}{8a}}$.

Найдем автомодельное решение уравнения $\omega_\eta'\omega_\xi' = a\omega_{\xi\xi}''$, подставим выражения в данное уравнение.

$\dfrac{\partial\omega}{\partial\xi} = c^{m-1}\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{\xi}}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial\eta} = c^{m-k}\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{\eta}}$, $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} = c^{m-2k}\dfrac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\bar{\eta}^2}$, $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} = c^{m-2}\dfrac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\bar{\xi}^2}$, $c^{m-k}c^{m-1}\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{\mu}}\dfrac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{\eta}} = c^{m-2}\dfrac{\partial^2\bar{\omega}}{\partial\bar{\xi}^2}a$, откуда $2m - k - 1 = m - 2$, $m = k - 1$, k произвольное число,

$\alpha = m = k - 1$, $\beta = -k$. Значит $\omega(\eta,\xi) = \xi^\alpha v(\mu) = \xi^{k-1}v(\mu)$, где $\mu = \eta\xi^\beta = \eta\xi^{-k}$. Получим производные

$$\frac{\partial\omega}{\partial\eta} = \xi^{k-1}\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{d\eta} = \xi^{k-1}\frac{dv}{d\mu}\xi^{-k} = \xi^{-1}\frac{dv}{d\mu},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = (k-1)\xi^{k-2}v + \xi^{k-1}\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{d\xi} = (k-1)\xi^{k-2}v + \xi\frac{dv}{d\mu}(-k)\eta\xi^{-k-1} = (k-1)\xi^{k-2}v - k\eta\xi^{-2}\frac{dv}{d\mu},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left((k-1)\xi^{k-2}v - k\eta\xi^{-2}\frac{dv}{d\mu}\right) = (k-1)\left((k-2)\xi^{k-3}v + \xi^{k-2}\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{d\xi}\right) - k\eta\left(-2\xi^{-3}\frac{dv}{d\mu} + \xi^{-2}\frac{d^2v}{d\mu^2}\frac{d\mu}{d\xi}\right) = (k-1)\left((k-2)\xi^{k-3}v + \xi^{k-2}\frac{dv}{d\mu}(-k)\eta\xi^{-k-1}\right) -$$

$$-k\eta\left(-2\xi^{-3}\frac{dv}{d\mu} + \xi^{-2}\frac{d^2v}{d\mu^2}(-k)\eta\xi^{-k-1}\right) = (k-1)\left((k-2)\xi^{k-3}v - k\eta\xi^{-3}\frac{dv}{d\mu}\right) + k\eta\left(2\xi^{-3}\frac{dv}{d\mu} + k\eta\xi^{-k-3}\frac{d^2v}{d\mu^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}=\frac{d}{d\eta}\left(\xi^{-1}\frac{dv}{d\mu}\right)=\xi^{-1}\xi^{-k}\frac{d^2v}{d\mu^2}=\xi^{-1-k}\frac{d^2v}{d\mu^2}\ .$$

Подставим эти выражения в уравнение $\xi^{-1}\frac{dv}{d\mu}\left((k-1)\xi^{k-2}v-k\eta\xi^{-2}\frac{dv}{d\mu}\right)=a\left((k-1)\left((k-2)\xi^{k-3}v-k\eta\xi^{-3}\frac{dv}{d\mu}\right)+k\eta\left(2\xi^{-3}\frac{dv}{d\mu}+k\eta\xi^{-k-3}\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)\right)$,

$\xi^{k-3}\frac{dv}{d\mu}\left((k-1)v-k\eta\xi^{-k}\frac{dv}{d\mu}\right)=a\xi^{k-3}\left((k-1)\left((k-2)v-k\eta\xi^{-k}\frac{dv}{d\mu}\right)+k\left(2\eta\xi^{-k}\frac{dv}{d\mu}+k\left(\eta\xi^{-k}\right)^2\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)\right)$,

$\frac{dv}{d\mu}\left((k-1)v-\mu k\frac{dv}{d\mu}\right)=a\left((k-1)\left((k-2)v-k\mu\frac{dv}{d\mu}\right)+k\left(2\mu\frac{dv}{d\mu}+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)\right)$, это уравнение можно решить численно .

Пример . $L_{t^2}{}''u(x,t)=aL_x{}'u(x,t)+bu^n(x,t)$. Это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $\frac{uu_t'+tuu_{t^2}''-t\left(u_t'\right)^2}{uu_t'}=a\frac{xu_x'}{u}+bu^n$.

Подставим выражения производных в данное уравнение $\frac{c^m\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}c^{m-1}+\bar{t}cc^m\bar{u}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2}c^{m-2}-c\bar{t}\left(c^{m-1}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}\right)^2}{c^m\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}c^{m-1}}=a\frac{\bar{x}c^kc^{m-k}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}}{c^m\bar{u}}+b\left(c^m\bar{u}\right)^n$, $\frac{\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}+\bar{t}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2}-\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}\right)^2}{\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}}=a\bar{x}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+bc^{mn}\left(\bar{u}\right)^n$,

поэтому $mn=0$, откуда $m=0$, k любое число . Получаем $u(x,t)=t^\alpha v(\mu)=v(\mu)$, $\mu=xt^\beta=xt^{-k}$, найдем производные

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}=\frac{dv}{d\mu}\left(-kxt^{-k-1}\right)=-kt^{-1}\mu\frac{dv}{d\mu}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{dv}{d\mu}t^{-k}$, $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv}{d\mu}t^{-k}\right)=t^{-k}\frac{d^2v}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dx}=t^{-2k}\frac{d^2v}{d\mu^2}$, $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(-kt^{-1}\mu\frac{dv}{d\mu}\right)=-k\left(-t^{-2}\mu\frac{dv}{d\mu}+t^{-1}\left(\frac{d\mu}{dt}\frac{dv}{d\mu}+\mu\frac{d^2v}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dt}\right)\right)=$

$=kt^{-2}\mu\frac{dv}{d\mu}-kt^{-1}\left(-kxt^{-k-1}\frac{dv}{d\mu}+\mu\frac{d^2v}{d\mu^2}x(-k)t^{-k-1}\right)=kt^{-2}\left((1+k)\mu\frac{dv}{d\mu}+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)$. Подставим производные в данное уравнение

$1+t\frac{kt^{-2}\left((1+k)\mu\frac{dv}{d\mu}+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}\right)}{-kt^{-1}\mu\frac{dv}{d\mu}}-t\frac{-kt^{-1}\mu\frac{dv}{d\mu}}{v}=a\frac{xt^{-k}\frac{dv}{d\mu}}{v}+bv^n$, $1+\frac{(1+k)\mu\frac{dv}{d\mu}+k\mu^2\frac{d^2v}{d\mu^2}}{-\mu\frac{dv}{d\mu}}+\frac{k\mu\frac{dv}{d\mu}}{v}=a\frac{\mu\frac{dv}{d\mu}}{v}+bv^n$, $k\mu\frac{\frac{d^2v}{d\mu^2}}{\frac{dv}{d\mu}}-(k-a)\frac{\mu\frac{dv}{d\mu}}{v}+bv^n-k=0$.

Пусть $\mu = e^{\rho}$, отсюда $\frac{dv}{d\mu} = \frac{1}{e^{\rho}}\frac{dv}{d\rho}$, $\frac{d^2v}{d\mu^2} = \frac{1}{e^{2\rho}}\left(\frac{d^2v}{d\rho^2} - \frac{dv}{d\rho}\right)$, тогда получим уравнение $k\frac{\frac{d^2v}{d\rho^2}}{\frac{dv}{d\rho}} - (k-a)\frac{\frac{dv}{d\rho}}{v} + bv^n - 2k = 0$.

Пусть $\frac{dv}{d\rho} = w(v)$, тогда $\frac{d^2v}{d\rho^2} = \frac{dw}{dv}w(v)$, получим уравнение $k\frac{dw}{dv} - (k-a)\frac{w}{v} + bv^n - 2k = 0$.

Пример . Найдем собственные значения нелинейного оператора $L_{tx}''u(x,t) = \lambda u(x,t)$, краевые условия $u(x,0) = 0$, $x > 0$, $u(0,t) = u_1$, $t > 0$

Это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $x\left(\frac{u_{tx}''(x,t)}{u_t'(x,t)} - \frac{u_x'(x,t)}{u(x,t)}\right) = \lambda u(x,t)$, если $u_1 = 0$, то $u(x,t) = 0$. Пусть $u_1 \neq 0$, тогда

решение имеет разрыв в точке $(0,0)$. Подставим в уравнение выражения для производных получим $c^{-k}\overline{x}\left(\frac{c^{m-1-k}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}\,\partial\overline{x}}}{c^{m-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}} - \frac{c^{m-k}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}}{c^m\overline{u}}\right) = \lambda c^m\overline{u}$, $\overline{x}\left(\frac{\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}\,\partial\overline{x}}}{\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}} - \frac{\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}}{\overline{u}}\right) = \lambda c^m\overline{u}$,

чтобы уравнение не изменилось должно выполняться условие $m = 0$ тогда $\alpha = 0$, $\beta = -k$, автономное решение имеет вид

$u(x,t) = t^{\alpha}v(\mu) = v(xt^{\beta})$. Пусть $\beta = -\frac{1}{2}$, откуда $u(x,t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = v_{\mu}'(\mu)\mu_t' = v_{\mu}'(\mu)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = v_{\mu}'(\mu)\mu_x' = v_{\mu}'(\mu)\frac{1}{\sqrt{t}}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_{\mu}'(\mu)\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = v_{\mu^2}''(\mu)\frac{1}{\sqrt{t}}\mu_x' = \frac{1}{t}v_{\mu^2}''(\mu)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v_{\mu}'(\mu)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = v_{\mu^2}''(\mu)\mu_t'\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)_t' v_{\mu}'(\mu) =$

$= v_{\mu^2}''(\mu)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{3x}{4t^{\frac{5}{2}}}v_{\mu}'(\mu) = v_{\mu^2}''(\mu)\frac{x^2}{4t^3} + \frac{3x}{4t^{\frac{5}{2}}}v_{\mu}'(\mu)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v_{\mu}'(\mu)\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = v_{\mu^2}''(\mu)\frac{1}{\sqrt{t}}\mu_t' + \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)_t'\mu_t' =$

$$= v_{\mu^2}''(\mu)\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)v_\mu'(\mu) = -\left(v_{\mu^2}''(\mu)\frac{x}{2t^2} + \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}v_\mu'(\mu)\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_\mu'(\mu)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = v_{\mu^2}''(\mu)\,\mu_x'\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)_x' v_\mu'(\mu) = v_{\mu^2}''(\mu)\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}v_\mu'(\mu) =$$

$$= -\left(v_{\mu^2}''(\mu)\frac{x}{2t^2} + \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}v_\mu'(\mu)\right),\ x\left(\frac{-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}v_{\mu^2}'' + v_\mu'\right)}{-v_\mu'\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}} - \frac{\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}v_\mu'}{v}\right) = \frac{\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}v_{\mu^2}'' + v_\mu'}{v_\mu'} - \frac{\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}v_\mu'}{v} = \frac{\mu v_{\mu^2}'' + v_\mu'}{v_\mu'} - \frac{\mu v_\mu'}{v} = \lambda v,\ \frac{\xi v_{\mu^2}''}{v_\mu'} - \frac{\xi v_\mu'}{v} = \lambda v - 1$$

Пусть $\mu = e^\eta$, $\eta = \ln\mu$, тогда $v_\mu' = v_\eta'\eta_\mu' = v_\eta'\frac{1}{\mu} = \frac{v_\eta'}{e^\eta}$, $v_{\mu^2}'' = \left(v_\mu'\right)_\mu' = \left(\frac{v_\eta'}{e^\eta}\right)_\mu' = \frac{\left(v_\eta'\right)_\mu' e^\eta - v_\eta'\left(e^\eta\right)_\mu'}{e^{2\eta}} = \frac{v_{\eta^2}''\eta_\mu' e^\eta - v_\eta' e^\eta \eta_\mu'}{e^{2\eta}} = \frac{v_{\eta^2}''\frac{1}{\mu}e^\eta - v_\eta' e^\eta\frac{1}{\mu}}{e^{2\eta}} = \frac{v_{\eta^2}'' - v_\eta'}{e^{2\eta}}$.

подставим эти выражения в найденное уравнение $\dfrac{\frac{v_{\eta^2}'' - v_\eta'}{e^{2\eta}}e^\eta}{\frac{v_\eta'}{e^\eta}} - \dfrac{\frac{v_\eta'}{e^\eta}e^\eta}{v} = \lambda v - 1$, $\dfrac{v_{\eta^2}'' - v_\eta'}{v_\eta'} - \dfrac{v_\eta'}{v} = \lambda v - 1$, $\dfrac{v_{\eta^2}''}{v_\eta'} - \dfrac{v_\eta'}{v} = \lambda v$.

$\int \frac{dv}{(\lambda v + c)v} = \eta + c_1$, $\frac{1}{c}\ln\left|\frac{v}{\lambda v + c}\right| = \eta + c_1$, $\frac{v}{\lambda v + c} = e^{\eta c + c c_1}$, $v = \frac{c e^{\eta c + c c_1}}{1 - \lambda e^{\eta c + c c_1}} = \frac{c e^{c \ln z + c c_1}}{1 - \lambda e^{c \ln z + c c_1}} = \frac{c_1 c z^c}{1 - \lambda c_1 z^c} = \frac{c_1 c}{z^{-c} - \lambda c_1} = \frac{c_1 c}{\lambda c_1 - z^c}$, где c переобозначенно на $-c$, $u(x,t) = \frac{c_1 c}{c_1 \lambda - \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^c}$.

Другое решение . $L_{tx}'' u(x,t) = \lambda u(x,t)$, $x\left(\frac{u_{tx}''(x,t)}{u_t'(x,t)} - \frac{u_x'(x,t)}{u(x,t)}\right) = \lambda u(x,t)$, $u(x,t) = e^{w(x,t)}$, $u_x'(x,t) = e^{w(x,t)} w_x'(x,t)$, $u_t'(x,t) = e^{w(x,t)} w_t'(x,t)$,

$u_{tx}''(x,t) = e^{w(x,t)}\left(w_t'(x,t) w_x'(x,t) + w_{xt}''(x,t)\right)$, $x\frac{w_{tx}''(x,t)}{w_t'(x,t)} = \lambda e^{w(x,t)}$, $x = e^\eta$, $\eta = \ln x$, $\xi = \ln t$, $t = e^\xi$, $w_x' = \frac{w_\eta'}{e^\eta}$, $w_t' = \frac{w_\xi'}{e^\xi}$, $w_{tx}'' = \frac{w_{\eta\xi}''}{e^\xi e^\eta}$, $\frac{w_{\xi\eta}''}{w_\xi'} = \lambda e^w$.

Пусть $w(\eta,\xi) = f(\mu)$, где $\mu = \eta - v\xi$, so $w_\eta' = f_\mu'$, $w_\xi' = -v f_\mu'$, $w_{\xi\eta}'' = -v f_{\mu\mu}''$, отсюда $f'' = \lambda f' e^f$. Пусть $f' = p(f)$, это дает $f'' = pp'$, получим $pp' = \lambda p e^f$, $dp = \lambda e^f df$,

$p(f) = \lambda e^f + c$, $\frac{df}{d\mu} = \lambda e^f + c$, решение этого уравнения $\frac{e^f}{(e^f + c)^\lambda} = e^f c_1$. Пусть $\lambda = 1$, тогда $f(\mu) = \ln\frac{c_1 c e^{\mu c}}{1 - e^{\mu c} c_1}$, найдем $w(\xi,\eta) = \ln\frac{c_1 c e^{(\eta - v\xi)c}}{1 - e^{(\eta - v\xi)c} c_1}$, тогда $u(x,t) = \frac{c_1 c x^c}{(vt)^c - x^c c_1}$.

Пример . Найдем собственные значения оператора $L_{xxt}''' u(x,t) = \lambda u(x,t)$, граничные условия $u(x,0) = 0$, $x > 0$, $u(0,t) = u_1$, $t > 0$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $\frac{tx\left(u^2\left(u_{xxt}''' u_x' - u_{xx}'' u_{xt}''\right)\right) - \left(u_x'\right)^2\left(u_{xt}'' u - u_t' u_x'\right)}{u u_x'\left(u_x' u + x u u_{xx}'' - x\left(u_x'\right)^2\right)} = \lambda u(x,t)$. Пусть $u_1 = 0$, тогда функция $u(x,t)$ имеет разрыв в точке $(0,0)$. Это уравнение эквивалентно следующему уравнению $\frac{w_{\eta\eta\xi}'''}{w_{\eta\eta}''} - \frac{w_{\eta\xi}''}{w_\eta'} = \lambda w(\eta,\xi)$. Пусть $w(\eta,\xi) = f(\mu)$, где $\mu = \eta - v\xi$, тогда $w_\eta' = f'$, $w_\xi' = -vf'$, $w_{\xi\xi}'' = v^2 f''$, $w_{\eta\eta}'' = f''$, $w_{\eta\xi}'' = -vf''$, $w_{\eta\eta\xi}''' = -vf'''$,

тогда $\frac{f'''}{f''} - \frac{f''}{f'} = -\frac{\lambda}{v} f$. Пусть $f'(\mu) = p(f)$, $f''(\mu) = p(f)\, p_f'(f)$, $f'''(\mu) = p(f)^2\, p_{ff}''(f) + \left(p_f'(f)\right)^2 p(f)$ откуда $\frac{p^2 p'' + (p')^2 p}{pp'} - \frac{pp'}{p} = -\frac{\lambda}{v} f$, $p\frac{p''}{p'} = -\frac{\lambda}{v} f$,

это уравнение можно решить численно .

Другое решение . $\frac{f'''}{f''} - \frac{f''}{f'} = -\frac{\lambda}{v} f$, умножим на f' , интегрируем $\frac{f'''}{f''} f' - f'\frac{f''}{f'} = -\frac{\lambda}{v} ff'$, $\int ff' d\mu = \int f df = \frac{f^2}{2}$, $\int \frac{f''}{f'} f' d\mu = \int \frac{f''}{f'} df = \int \frac{df'}{f'} = \ln|f'|$, Пусть $v_\eta{}' = \rho(v)$, тогда $v_{\eta^2}{}'' = \frac{dv_\eta{}'}{d\eta} = \frac{d\rho}{dv}\frac{dv}{d\eta} = \rho'\rho$, $\frac{\rho'\rho}{\rho} - \frac{\rho}{v} = \lambda v$, $\rho' - \frac{\rho}{v} = \lambda v$. Пусть $\rho = \phi\gamma$, so $\rho' = \phi'\gamma + \gamma'\phi$, $\phi'\gamma + \gamma'\phi - \frac{\phi\gamma}{v} = \lambda v$, $\phi'\gamma + \phi\left(\gamma' - \frac{\gamma}{v}\right) = \lambda v$, $\gamma' - \frac{\gamma}{v} = 0$,

$\frac{d\gamma}{dv} - \frac{\gamma}{v} = 0$, $\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dv}{v}$, $\gamma = v$, $\phi' v = \lambda v$, $\phi' = \lambda$, $\phi = \lambda v + c$, $\rho = (\lambda v + c)v$, $\frac{dv}{d\eta} = (\lambda v + c)v$, $\frac{dv}{(\lambda v + c)v} = d\eta$, $\int \frac{dv}{(\lambda v + c)v} = \eta + c_1$, $\frac{1}{c}\ln\left|\frac{v}{\lambda v + c}\right| = \eta + c_1$, $\frac{v}{\lambda v + c} = e^{\eta c + cc_1}$,

$v = \frac{ce^{\eta c + cc_1}}{1 - \lambda e^{\eta c + cc_1}} = \frac{ce^{c\ln\mu + cc_1}}{1 - \lambda e^{c\ln\mu + cc_1}} = \frac{c_1 c\mu^c}{1 - \lambda c_1\mu^c} = \frac{c_1 c}{\mu^{-c} - \lambda c_1} = \frac{c_1 c}{\lambda c_1 - \mu^c}$, где c переобозначенно на $-c$, значит $u(x,t) = \frac{c_1 c}{c_1\lambda - \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^c}$. Пусть $\mu \to 0$ это дает $\frac{x}{\sqrt{t}} \to 0$, $x \to 0$, поэтому

$u(x,t)_{x=0} = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)_{x=0} = v(0) = u_1$. Пусть $t \to 0$ значит $\frac{x}{\sqrt{t}} \to +\infty$, $\mu \to +\infty$, поэтому $u(x,t)_{t=0} = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)_{t=0} = v(+\infty) = 0$,

$v(0) = \frac{c_1 c}{\lambda c_1 - 0} = \frac{c}{\lambda} = u_1$, $c = \lambda u_1$, отсюда $v(\mu) = \frac{c_1\lambda\mu}{\lambda c_1 - \mu^{\lambda u_1}}$, $v(+\infty) = \frac{c_1 u_1\lambda}{\lambda c_1 - \infty} = 0$, тогда $c_1 \neq 0$ любое число , тогда $u(x,t) = \frac{c_1 u_1\lambda}{\lambda c_1 - \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^{\lambda u_1}}$.

Другое решение . $x_1 = kx$, $t_1 = k^2 t$, $u(x_1, t_1) = u(kx, k^2 t)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t} = k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} = k\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}\frac{\partial x_1}{\partial x} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial t_1{}^2}\frac{\partial t_1}{\partial t} = k^4\frac{\partial^2 u}{\partial t_1{}^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} = k^3\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial x_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t} = k^3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial t_1}$, $\frac{x_1}{k}\left(\frac{k^3\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial t_1}}{k^2\frac{\partial u}{\partial t_1}} - \frac{k\frac{\partial u}{\partial x_1}}{u}\right) = \lambda u$, $x_1\left(\frac{u_{x_1t_1}{}''}{u_{t_1}{}'} - \frac{u_{x_1}{}'}{u}\right) = \lambda u$.

Пусть $k = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $u(x_1, y_1) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$, $u(x_1, t_1) = v(z)$, $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = v_z{}'(z)z_t{}' = v_z{}'(z)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = v_z{}'(z)z_x{}' = v_z{}'(z)\frac{1}{\sqrt{t}}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_z{}'(z)\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = v_{z^2}{}''(z)\frac{1}{\sqrt{t}}z_x{}' = \frac{1}{t}v_{z^2}{}''(z)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v_z{}'(z)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = v_{z^2}{}''(z)z_t{}'\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)_t{}' v_z{}'(z) =$

$$= v_{z^2}''(z)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)+\frac{3x}{4t^{\frac{5}{2}}}v_z'(z) = v_{z^2}''(z)\frac{x^2}{4t^3}+\frac{3x}{4t^{\frac{5}{2}}}v_z'(z)\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(v_z'(z)\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = v_{z^2}''(z)\frac{1}{\sqrt{t}}z_t' + \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)_t' v_z' =$$

$$= v_{z^2}''(z)\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)+\left(-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)v_z'(z) = -\left(v_{z^2}''(z)\frac{x}{2t^2}+\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}v_z'(z)\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(v_z'(z)\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = v_{z^2}''(z)z_x'\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)+\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)_x' v_z'(z)=$$

$$= v_{z^2}''(z)\frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}v_z'(z) = -\left(v_{z^2}''(z)\frac{x}{2t^2}+\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}v_z'(z)\right),$$

$$x\left(\frac{-\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}v_{z^2}''+v_z'\right)}{-v_z'\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}} - \frac{\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}v_z'}{v}\right) = \frac{\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}v_{z^2}''+v_z'}{v_z'} - \frac{\frac{x}{t^{\frac{1}{2}}}v_z'}{v} = \frac{zv_{z^2}''+v_z'}{v_z'}-\frac{zv_z'}{v}=\lambda v,\ \frac{zv_{z^2}''}{v_z'}-\frac{zv_z'}{v}=\lambda v-1\ .$$

$$z=e^\eta,\ \eta=\ln z,\ v_z' = v_\eta'\eta_z' = v_\eta'\frac{1}{z} = \frac{v_\eta'}{e^\eta},\ v_{z^2}'' = \left(v_z'\right)_z' = \left(\frac{v_\eta'}{e^\eta}\right)_z' = \frac{\left(v_\eta'\right)_z' e^\eta - v_\eta'\left(e^\eta\right)_z'}{e^{2\eta}} = \frac{v_{\eta^2}''\eta_z' e^\eta - v_\eta' e^\eta \eta_z'}{e^{2\eta}} = \frac{v_{\eta^2}''\frac{1}{z} e^\eta - v_\eta' e^\eta\frac{1}{z}}{e^{2\eta}} = \frac{v_{\eta^2}''-v_\eta'}{e^{2\eta}}\ ,$$

$$\frac{\frac{v_{\eta^2}''-v_\eta'}{e^{2\eta}}e^\eta}{\frac{v_\eta'}{e^\eta}} - \frac{\frac{v_\eta'}{e^\eta}e^\eta}{v} = \lambda v-1,\ \frac{v_{\eta^2}''-v_\eta'}{v_\eta'}-\frac{v_\eta'}{v}=\lambda v-1,\ \frac{v_{\eta^2}''}{v_\eta'}-\frac{v_\eta'}{v}=\lambda v,\ v_\eta'=\mu(v),\ v_{\eta^2}''=\frac{dv_\eta'}{d\eta}=\frac{d\mu}{dv}\frac{dv}{d\eta}=\mu'\mu,\ \frac{\mu'\mu}{\mu}-\frac{\mu}{v}=\lambda v,\ \mu'-\frac{\mu}{v}=\lambda v,\ \mu=\phi\gamma,\ \mu'=\phi'\gamma+\gamma'\phi\ ,$$

$$\phi'\gamma+\gamma'\phi-\frac{\phi\gamma}{v}=\lambda v,\ \phi'\gamma+\phi\left(\gamma'-\frac{\gamma}{v}\right)=\lambda v,\ \gamma'-\frac{\gamma}{v}=0,\ \frac{d\gamma}{dv}-\frac{\gamma}{v}=0,\ \frac{d\gamma}{\gamma}=\frac{dv}{v},\ \gamma=v,\ \phi'v=\lambda v,\ \phi'=\lambda,\ \phi=\lambda v+c,\ \mu=(\lambda v+c)v,\ \frac{dv}{d\eta}=(\lambda v+c)v,\ \frac{dv}{(\lambda v+c)v}=d\eta\ ,$$

$\int \frac{f'''}{f''} f' d\mu = \int \frac{f'''}{f''} df = \int \frac{df''}{f''} = \ln|f''|$, после подстановки получим уравнение $\ln\left|\frac{f''}{f'}\right| + \frac{\lambda}{\nu}\frac{f^2}{2} = c$, это первый интеграл данного уравнения .

Пример . $\begin{cases} L_x' u + L_x' \rho = a L_{tt}'' \rho \\ L_t' \rho + L_t' u = b L_{xx}'' u \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x u_x'}{u} + \frac{x \rho_x'}{\rho} = a \frac{\rho \rho_t' + t \rho \rho_{tt}'' - t\left(\rho_t'\right)^2}{\rho \rho_t'} \\ \frac{t \rho_t'}{\rho} + \frac{t u_t'}{u} = b \frac{u u_x' + x u u_{xx}'' - x\left(u_x'\right)^2}{u u_x'} \end{cases}$ Найдем автономное решение этой системы дифференциальных уравнений

Обычно решение представляют в виде $u(x,t) = t^\alpha v(\mu)$, $\rho(x,t) = t^\delta r(\mu)$, где $\mu = x t^\beta$. Профили этих решений в разные моменты времени получаются друг из друга преобразованием сдвига . Решение существует если изменение зависимой независимой переменных происходит по формулам

$x = c^k \bar{x}$, $t = c\bar{t}$, $\rho(x,t) = c^n \bar{\rho}(\bar{x},\bar{t})$, $u(x,t) = c^m \bar{u}(\bar{x},\bar{t})$, где $c > 0$ произвольные постоянные .

Пусть $u(x,t)$, $\rho(x,t)$ решение данного уравнения , $\bar{u}(\bar{x},\bar{t})$, $\bar{\rho}(\bar{x},\bar{t})$ решение уравнения с перемеными $\bar{x},\bar{t}$. Поэтому $\rho(x,t) = t^\delta r(\mu) = t^\delta r\left(x t^\beta\right)$,

$\bar{\rho}(\bar{x},\bar{t}) = \bar{t}^\delta r(\bar{\mu}) = \bar{t}^\delta r\left(\bar{x}\bar{t}^\beta\right)$, $u(x,t) = t^\alpha v(\mu) = t^\alpha v\left(x t^\beta\right)$, $\bar{u}(\bar{x},\bar{t}) = \bar{t}^\alpha v(\bar{\mu}) = \bar{t}^\alpha v\left(\bar{x}\bar{t}^\beta\right)$, тогда $\frac{\rho(x,t)}{c^n} = \left(\frac{t}{c}\right)^\delta r\left(\frac{x}{c^k}\left(\frac{t}{c}\right)^\beta\right) = c^{-\delta} t^\delta r\left(c^{-k-\beta} x t^\beta\right)$, тогда $\rho(x,t) = c^{n-\delta} t^\delta r\left(c^{-k-\beta} x t^\beta\right)$.

Решение которое соответсвует решению $\rho(x,t) = t^\delta r(\mu)$ должно удовлетворять условиям $\begin{cases} n - \delta = 0 \\ -k - \beta = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} n = \delta \\ k = -\beta \end{cases}$. Автономное решение

$\frac{u(x,t)}{c^m} = \left(\frac{t}{c}\right)^\alpha v\left(\frac{x}{c^k}\left(\frac{t}{c}\right)^\beta\right) = c^{-\alpha} t^\alpha v\left(c^{-k-\beta} x t^\beta\right)$, $u(x,t) = c^{m-\alpha} t^\alpha v\left(c^{-k-\beta} x t^\beta\right)$. Решение соответствующее решению $u(x,t) = t^\alpha v(\mu)$ должно удовлетворять условиям

$\begin{cases} m - \alpha = 0 \\ -k - \beta = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} m = \alpha \\ k = -\beta \end{cases}$. Найдем производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial\left(c^m \bar{u}(\bar{x},\bar{t})\right)}{\partial(c\bar{t})} = \frac{c^m \partial\bar{u}}{c\partial\bar{t}} = c^{m-1}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial\left(c^m \bar{u}(\bar{x},\bar{t})\right)}{\partial\left(c^k \bar{x}\right)} = \frac{c^m \partial\bar{u}}{c^k \partial\bar{x}} = c^{m-k}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial\left(c^k\bar{x}\right)}\left(c^{m-k}\frac{\partial\bar{u}(\bar{x},\bar{t})}{\partial\bar{x}}\right) = \frac{c^{m-k}}{c^k}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} = c^{m-2k}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial(c\bar{t})}\left(c^{m-1}\frac{\partial\bar{u}(\bar{x},\bar{t})}{\partial\bar{t}}\right) = \frac{c^{m-1}}{c}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}^2} = c^{m-2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2}$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial\left(c^{n}\overline{\rho}\left(\overline{x},\overline{t}\right)\right)}{\partial\left(c\overline{t}\right)}=\frac{c^{n}}{c}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}=c^{n-1}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}\ ,\ \frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial\left(c^{n}\overline{\rho}\left(\overline{x},\overline{t}\right)\right)}{\partial\left(c^{k}\overline{x}\right)}=\frac{c^{n}}{c^{k}}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{x}}=c^{n-k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{x}}\ ,$$

$$\frac{\partial^{2}\rho}{\partial x^{2}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\left(c^{k}\overline{x}\right)}\left(c^{n-k}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{x}}\right)=\frac{c^{n-k}}{c^{k}}\frac{\partial^{2}\overline{\rho}}{\partial\overline{x}^{2}}\ ,\ \frac{\partial^{2}\rho}{\partial t^{2}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial\left(c\overline{t}\right)}\left(c^{n-1}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}\right)=\frac{c^{n-1}}{c}\frac{\partial^{2}\overline{\rho}}{\partial\overline{t}^{2}}=c^{n-2}\frac{\partial^{2}\overline{\rho}}{\partial\overline{t}^{2}}$$

Подставим эти выражения в систему уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{c^{k}\overline{x}}{c^{m}\overline{u}}c^{m-k}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\dfrac{c^{k}\overline{x}}{c^{n}\overline{u}}c^{n-k}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{x}}=a\dfrac{c^{n}\overline{\rho}c^{n-1}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}+c\overline{t}c^{n}\overline{\rho}c^{n-2}\dfrac{\partial^{2}\overline{\rho}}{\partial\overline{t}^{2}}-c\overline{t}\left(c^{n-1}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}\right)^{2}}{c^{n}\overline{\rho}c^{n-1}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}}\\[2ex]\dfrac{c\overline{t}}{c^{n}\overline{\rho}}c^{n-1}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}+\dfrac{c\overline{t}}{c^{m}\overline{u}}c^{m-1}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}=b\dfrac{c^{m}\overline{u}c^{m-k}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+c^{k}\overline{x}c^{m}\overline{u}c^{m-2k}\dfrac{\partial^{2}\overline{u}}{\partial\overline{x}^{2}}-c^{k}\overline{x}\left(c^{m-k}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}\right)^{2}}{c^{m}\overline{u}c^{m-k}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}}\end{cases},$$

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{x}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}}{\overline{u}}+\dfrac{\overline{x}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{x}}}{\overline{\rho}}=a\dfrac{\overline{\rho}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}+\overline{t}\,\overline{\rho}\dfrac{\partial^{2}\overline{\rho}}{\partial\overline{t}^{2}}-\overline{t}\left(\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}\right)^{2}}{\overline{\rho}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}}\\[2ex]\dfrac{\overline{t}\dfrac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}}{\overline{\rho}}+\dfrac{\overline{t}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}}{\overline{u}}=b\dfrac{\overline{u}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\overline{x}\overline{u}\dfrac{\partial^{2}\overline{u}}{\partial\overline{x}^{2}}-\overline{x}\left(\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}\right)^{2}}{\overline{u}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}}\end{cases}$$
, поэтому k , m , n любые числа .

Значит автономное решение имеет вид $u(x,t)=t^m v(\mu)$, $\rho(x,t)=t^n r(\mu)$, $\mu = xt^k$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=t^n\frac{dr}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}=t^n\frac{dr}{d\mu}t^k=t^{n+k}\frac{dr}{d\mu}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}=t^m\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}=t^m\frac{dv}{d\mu}t^k=t^{m+k}\frac{dv}{d\mu}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(t^{m+k}\frac{dv}{d\mu}\right)=t^{m+k}\frac{d^2v}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dx}=t^{m+k}\frac{d^2v}{d\mu^2}t^k=t^{m+2k}\frac{d^2v}{d\mu^2}\ ,\ \frac{\partial \rho}{\partial t}=nt^{n-1}r+t^n\frac{dr}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}=nt^{n-1}r+t^n\frac{dr}{d\mu}kxt^{k-1}=$$

$$=nt^{n-1}r+kt^{n-1}xt^k\frac{dr}{d\mu}=t^{n-1}\left(nr+k\mu\frac{dr}{d\mu}\right)\ ,\ \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{n-1}\left(nr+k\mu\frac{dr}{d\mu}\right)\right)=(n-1)\,t^{n-2}\left(nr+k\mu\frac{dr}{d\mu}\right)+$$

$$+t^{n-1}\left(n\frac{dr}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}+k\frac{d\mu}{dt}\frac{dr}{d\mu}+k\mu\frac{d^2r}{d\mu^2}\frac{d\mu}{dt}\right)=(n-1)\,t^{n-2}\left(nr+k\mu\frac{dr}{d\mu}\right)+t^{n-1}\left(n\frac{dr}{d\mu}kxt^{k-1}+k\frac{dr}{d\mu}kxt^{k-1}+k\xi\frac{d^2r}{d\mu^2}kxt^{k-1}\right)=(n-1)\,t^{n-2}\left(nr+k\mu\frac{dr}{d\mu}\right)+$$

$$+t^{n-2}\left(kn\frac{dr}{d\mu}\mu+k^2\frac{dr}{d\mu}\mu+k^2\mu^2\frac{d^2r}{d\mu^2}\right)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}=mt^{m-1}v+t^m\frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dt}=mt^{m-1}v+t^m\frac{dv}{d\mu}kxt^{k-1}=mt^{m-1}v+kt^{m-1}\frac{dv}{d\mu}xt^k=t^{m-1}\left(mv+k\mu\frac{dv}{d\mu}\right).$$

Подставим эти выражения в систему

$$\begin{cases}\dfrac{xt^{m+k}\dfrac{dv}{d\mu}}{t^m v}+\dfrac{xt^{n+k}\dfrac{dr}{d\mu}}{t^n r}=a\dfrac{t^n r t^{n-1}\left(nr+k\mu\dfrac{dr}{d\mu}\right)+tt^n r\left((n-1)\,t^{n-2}\left(nr+k\mu\dfrac{dr}{d\mu}\right)+t^{n-2}\left(kn\dfrac{dr}{d\mu}\mu+k^2\dfrac{dr}{d\mu}\mu+k^2\mu^2\dfrac{d^2r}{d\mu^2}\right)\right)-tt^{2(n-1)}\left(nr+k\mu\dfrac{dr}{d\mu}\right)^2}{t^n r t^{n-1}\left(nr+k\mu\dfrac{dr}{d\mu}\right)}\\[2ex] \dfrac{tt^{n-1}\left(nr+k\mu\dfrac{dr}{d\mu}\right)}{t^n r}+\dfrac{tt^{m-1}\left(mv+k\mu\dfrac{dv}{d\mu}\right)}{t^m v}=b\dfrac{t^m v t^{m+k}\dfrac{dv}{d\mu}+xt^m v t^{m+2k}\dfrac{d^2v}{d\mu^2}-xt^{2m+2k}\left(\dfrac{dv}{d\mu}\right)^2}{t^m v t^{m+k}\dfrac{dv}{d\mu}}\end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mu \dfrac{dv}{d\mu}}{v} + \dfrac{\mu \dfrac{dr}{d\mu}}{r} = a \dfrac{r\left(nr + k\mu \dfrac{dr}{d\mu}\right) + r\left((n-1)\left(nr + k\mu \dfrac{dr}{d\mu}\right) + kn\dfrac{dr}{d\mu}\mu + k^2 \dfrac{dr}{d\mu}\mu + k^2\mu^2 \dfrac{d^2r}{d\mu^2}\right) - \left(nr + k\mu \dfrac{dr}{d\mu}\right)^2}{r\left(nr + k\mu \dfrac{dr}{d\mu}\right)} \\ \dfrac{nr + k\mu \dfrac{dr}{d\mu}}{r} + \dfrac{mv + k\mu \dfrac{dv}{d\mu}}{v} = b \dfrac{v\dfrac{dv}{d\mu} + v\mu \dfrac{d^2v}{d\mu^2} - \mu\left(\dfrac{dv}{d\mu}\right)^2}{v\dfrac{dv}{d\mu}} \end{cases}$$

эту систему можно решить численно .

Пусть $\mu = e^{\sigma}$, поэтому $\dfrac{dv}{d\mu} = \dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dv}{d\sigma}$, $\dfrac{dr}{d\mu} = \dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dr}{d\sigma}$, $\dfrac{d^2r}{d\mu^2} = \dfrac{1}{e^{2\sigma}}\left(\dfrac{d^2r}{d\sigma^2} - \dfrac{dr}{d\sigma}\right)$, $\dfrac{d^2v}{d\mu^2} = \dfrac{1}{e^{2\sigma}}\left(\dfrac{d^2v}{d\sigma^2} - \dfrac{dv}{d\sigma}\right)$. Подставим эти выражения в систему

$$\begin{cases} \dfrac{e^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dv}{d\sigma}}{v} + \dfrac{e^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dr}{d\sigma}}{r} = a \dfrac{r\left(nr + ke^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dr}{d\sigma}\right) + r\left((n-1)\left(nr + ke^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dr}{d\sigma}\right) + k^2e^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dr}{d\sigma} + k^2e^{2\sigma}\dfrac{1}{e^{2\sigma}}\left(\dfrac{d^2r}{d\sigma^2} - \dfrac{dr}{d\sigma}\right)\right) - \left(nr + ke^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dr}{d\sigma}\right)^2}{r\left(nr + ke^{\mu}\dfrac{1}{e^{\mu}}\dfrac{dr}{d\mu}\right)} \\ \dfrac{nr + ke^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dr}{d\sigma}}{r} + \dfrac{mv + ke^{\sigma}\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dv}{d\sigma}}{v} = b \dfrac{v\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dv}{d\sigma} + ve^{\sigma}\dfrac{1}{e^{2\sigma}}\left(\dfrac{d^2v}{d\sigma^2} - \dfrac{dv}{d\sigma}\right) - e^{\sigma}\dfrac{1}{e^{2\sigma}}\left(\dfrac{dv}{d\sigma}\right)^2}{v\dfrac{1}{e^{\sigma}}\dfrac{dv}{d\sigma}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{dv}{d\sigma}}{v}+\dfrac{\frac{dr}{d\sigma}}{r}=a\dfrac{r\left(nr+k\frac{dr}{d\sigma}\right)+r\left((n-1)\left(nr+k\frac{dr}{d\sigma}\right)+k^2\frac{dr}{d\sigma}+k^2\left(\frac{d^2r}{d\sigma^2}-\frac{dr}{d\sigma}\right)\right)-\left(nr+k\frac{dr}{d\sigma}\right)^2}{r\left(nr+k\frac{dr}{d\sigma}\right)} \\ \dfrac{nr+k\frac{dr}{d\sigma}}{r}+\dfrac{mv+k\frac{dv}{d\sigma}}{v}=b\dfrac{v\frac{dv}{d\sigma}+v\left(\frac{d^2v}{d\sigma^2}-\frac{dv}{d\sigma}\right)-\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2}{v\frac{dv}{d\sigma}} \end{cases}$$

Эту систему можно решить численным методом .

Пусть $\dfrac{dv}{d\sigma}=w(v)$, $\dfrac{dr}{d\sigma}=h(r)$, тогда $\dfrac{d^2r}{d\sigma^2}=\dfrac{dh}{dr}h(r)$, $\dfrac{d^2v}{d\sigma^2}=\dfrac{dw}{dv}w(v)$. Подставим эти выражения в систему

$$\begin{cases} \dfrac{w}{v}+\dfrac{h}{r}=a\dfrac{r(nr+kh)+r\left((n-1)(nr+kh)+k^2\frac{dh}{dr}h+k^2\left(\frac{dh}{dr}h-h\right)\right)-(nr+kh)^2}{r(nr+kh)} \\ \dfrac{nr+kh}{r}+\dfrac{mv+kw}{v}=b\dfrac{vw+v\left(\frac{dw}{dv}w-w\right)-w^2}{vw} \end{cases}, \begin{cases} \dfrac{w}{v}+\dfrac{h}{r}=a\dfrac{r(nr+kh)+r\left((n-1)(nr+kh)+2k^2\frac{dh}{dr}-k^2h\right)-(nr+kh)^2}{r(nr+kh)} \\ \dfrac{nr+kh}{r}+\dfrac{mv+kw}{v}=b\dfrac{v\frac{dw}{dv}-w}{v} \end{cases}$$

Эту систему можно решить численным методом

Другое решение . $u(x,t)=e^{\phi(x,t)}$, $\rho(x,t)=e^{\gamma(x,t)}$, тогда $u_x'=e^{\phi}\phi_x'$, $u_t'=e^{\phi}\phi_t'$, $u_{tt}''=e^{\phi}\left(\left(\phi_t'\right)^2+\phi_{tt}''\right)$, $u_{xx}''=e^{\phi}\left(\left(\phi_x'\right)^2+\phi_{xx}''\right)$,

$\rho_x'=e^{\gamma}\gamma_x'$, $\rho_t'=e^{\gamma}\gamma_t'$, $\rho_{tt}''=e^{\gamma}\left(\left(\gamma_t'\right)^2+\gamma_{tt}''\right)$, $\rho_{xx}''=e^{\gamma}\left(\left(\gamma_x'\right)^2+\gamma_{xx}''\right)$,

$L_x'\rho=x\gamma_x'$, $L_t'\rho=t\gamma_t'$, $L_{tt}''\rho=1+t\dfrac{\gamma_{tt}''}{\gamma_t'}$, $L_{xx}''\rho=1+x\dfrac{\gamma_{xx}''}{\gamma_x'}$, $L_x'u=x\phi_x'$, $L_t'u=t\phi_t'$, $L_{tt}''u=1+t\dfrac{\phi_{tt}''}{\phi_t'}$, $L_{xx}''u=1+x\dfrac{\phi_{xx}''}{\phi_x'}$, получим систему

$$\begin{cases} x\left(\phi_x' + \gamma_x'\right) = a\left(1 + t\dfrac{\gamma_{tt}''}{\gamma_t'}\right) \\ t\left(\gamma_t' + \phi_t'\right) = b\left(1 + x\dfrac{\phi_{xx}''}{\phi_x'}\right) \end{cases}$$
. Пусть $x = e^{\eta}$, $\eta = \ln x$, $\xi = \ln t$, $t = e^{\xi}$, so $\phi_x' = \dfrac{\phi_\eta'}{e^{\eta}}$, $\gamma_x' = \dfrac{\gamma_\eta'}{e^{\eta}}$, $\gamma_t' = \dfrac{\gamma_\xi'}{e^{\xi}}$, $\phi_t' = \dfrac{\phi_\xi'}{e^{\xi}}$, $\gamma_{tt}'' = \dfrac{\gamma_{\xi\xi}'' - \gamma_\xi'}{e^{2\xi}}$, $\phi_{xx}'' = \dfrac{\phi_{\eta\eta}'' - \phi_\eta'}{e^{2\eta}}$, отсюда

$$\begin{cases} \phi_\eta' + \gamma_\eta' = a\dfrac{\gamma_{\xi\xi}''}{\gamma_\xi'} \\ \gamma_\xi' + \phi_\xi' = b\dfrac{\phi_{\eta\eta}''}{\phi_\eta'} \end{cases}$$
. Пусть $\sigma = \eta - \mu\xi$, $\phi(\eta,\xi) = f(\sigma)$, $\gamma(\eta,\xi) = g(\sigma)$, откуда $\phi_\eta' = f_\sigma'$, $\phi_\xi' = -\mu f_\sigma'$, $\phi_{\xi\xi}'' = \mu^2 f_{\sigma\sigma}''$, $\phi_{\eta\eta}'' = f_{\sigma\sigma}''$, $\gamma_\eta' = g_\sigma'$, $\gamma_\xi' = -\mu g_\sigma'$, $\gamma_{\xi\xi}'' = \mu^2 g_{\sigma\sigma}''$, $\gamma_{\eta\eta}'' = g_{\sigma\sigma}''$

значит $\begin{cases} f_\sigma' + g_\sigma' = -a\mu\dfrac{g_{\sigma\sigma}''}{g_\sigma'} \\ g_\sigma' + f_\sigma' = b\dfrac{f_{\sigma\sigma}''}{f_\sigma'} \end{cases}$. Это дает $-a\mu\dfrac{g_{\sigma\sigma}''}{g_\sigma'} = b\dfrac{f_{\sigma\sigma}''}{f_\sigma'}$, $-\dfrac{a\mu}{b}\displaystyle\int\dfrac{g_{\sigma\sigma}''}{g_\sigma'}d\sigma = \int\dfrac{f_{\sigma\sigma}''}{f_\sigma'}d\sigma$, поэтому $r\left(g_\sigma'\right)^{-\frac{a\mu}{b}} = f_\sigma'$, где r постоянная .

Отсюда $\begin{cases} r\left(g_\sigma'\right)^{-\frac{a\mu}{b}} + g_\sigma' = -a\mu\dfrac{g_{\sigma\sigma}''}{g_\sigma'} \\ r_1\left(f_\sigma'\right)^{-\frac{b}{a\mu}} + f_\sigma' = b\dfrac{f_{\sigma\sigma}''}{f_\sigma'} \end{cases}$, эту систему можно решить численно .

Пример . $L_y^{(n)}u(x,y) = aL_x'\left(u(x,y)L_x^{(m)}u(x,y)\right) \Leftrightarrow L_y^{(n)}u = a\left(L_x'u + L_x^{(m+1)}u\right)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$,

отсюда $L_x^{(m+1)}u = L^{(m+1)}X, L_y^{(n)}u = L^{(n)}Y$, then $L^{(n)}Y = a\left(L'X + L^{(m+1)}X\right) = \lambda$. Решая эти два уравнения найдем функции $X(x), Y(y)$.

Пример . $L_y{}^{(n)}u(x, y) = aL_x{}'\left(u(x, y)L_x{}^{(m)}u(x, y)\right) \Leftrightarrow L_y{}^{(n)}u = a\left(L_x{}'u + L_x{}^{(m+1)}u\right)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$,

отсюда $L_x{}^{(m+1)}u = L^{(m+1)}X, L_y{}^{(n)}u = L^{(n)}Y$, then $L^{(n)}Y = a\left(L'X + L^{(m+1)}X\right) = \lambda$. Решая эти два уравнения найдем функции $X(x), Y(y)$.

Пример . $L_x{}'\left(f(x)L_x{}^{(m)}u(x, y)\right) + L_y{}'\left(g(y)L_y{}^{(n)}u(x, y)\right) = a\ln u(x, y) \Rightarrow L_x{}'f(x) + L_x{}^{(m+1)}u(x, y) + L_y{}'g(y) + L_y{}^{(n+1)}u(x, y) = a\ln u(x, y)$.

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow L_x{}^{(m+1)}u = L^{(m+1)}X, L_y{}^{(n+1)}u = L_y{}^{(n+1)}Y$, поэтому

$L'f + L^{(m+1)}X + L'g + L^{(n+1)}Y = a(\ln X + \ln Y), L'f + L^{(m+1)}X - a\ln X = a\ln Y - L'g - L^{(n+1)}Y = \lambda$. Решая эти два уравнения найдем функции $X(x), Y(y)$

Пример . $\left(L_{xx}{}''u(x, y)\right)^n + \left(L_{yy}{}''u(x, y)\right)^n = 1$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\left(u_x' + xu_{xx}''\right)u - x\left(u_x'\right)^2}{uu_x'}\right)^n + \left(\frac{\left(u_y' + yu_{yy}''\right)u - y\left(u_y'\right)^2}{uu_y'}\right)^n = 1 .$$

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$, тогда $L_{xx}{}''u = L_{xx}{}''X$, $L_{yy}{}''u = L_{yy}{}''Y$, тогда получим уравнение $\left(L_{xx}{}''X\right)^n + \left(L_{yy}{}''Y\right)^n = 1$, это возможно только если

$\left(L_{xx}{}''X\right)^n = 1 - \left(L_{yy}{}''Y\right)^n = \lambda^n$, so $\left(L_{xx}{}''X\right)^n = \lambda^n$, $L_{xx}{}''X = \lambda$ решение этого уравнения рассмотрено раньше $X = c_2e^{c_1\frac{x^\lambda}{\lambda}}$, $1 - \left(L_{yy}{}''Y\right)^n = \lambda^n$, $L_{yy}{}''Y = \sqrt[n]{1 - \lambda^n}$, $Y = r_2e^{r_1\frac{y^\eta}{\eta}}$,

где $\eta = \sqrt[n]{1 - \lambda^n}$. Откуда $u = r_2c_2e^{c_1\frac{x^\lambda}{\lambda} + r_1\frac{y^\eta}{\eta}}$.

Пример . $L_y{}'u(x, y)L_{x^2}{}''u(x, y) + L_x{}'u(x, y)L_{y^2}{}''u(x, y) = aL_x{}'u(x, y)L_y{}'u(x, y)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x, y) = X(x)Y(y) \Rightarrow$

$L'YL''X + L'XL''Y = aL'XL'Y, \dfrac{L''X}{L'X} + \dfrac{L''Y}{L'Y} = a$, отсюда $\dfrac{L''X}{L'X} = a - \dfrac{L''Y}{L'Y} = \lambda$. Решение уравнения $L''X - \lambda L'X = 0$ функция $X(x) = (\ln x + c)^{\frac{1}{\lambda}} + c_1$,

решение уравнения $L''Y - (a - \lambda)L'Y = 0$ функция $Y(y) = (\ln y + r)^{\frac{1}{a-\lambda}} + r_1$, тогда $u(x, y) = \left((\ln x + c)^{\frac{1}{\lambda}} + c_1\right)\left((\ln y + r)^{\frac{1}{a-\lambda}} + r_1\right)$.

Другое решение . $L_y{}'u(x,y)L_{x^2}{}''u(x,y)+L_x{}'u(x,y)L_{y^2}{}''u(x,y)=aL_x{}'u(x,y)L_y{}'u(x,y)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $\omega_x{}'+x\omega_{x^2}{}''+y\omega_{y^2}{}''+\omega_y{}'=a$.

$\frac{\omega_\eta{}'}{e^\eta}+e^\eta\frac{\omega_{\eta^2}{}''-\omega_\eta{}'}{e^{2\eta}}+e^\xi\frac{\omega_{\xi^2}{}''-\omega_\xi{}'}{e^{2\xi}}+\frac{\omega_\xi{}'}{e^\xi}=a$, $\omega_{\eta^2}{}''+\omega_{\xi^2}{}''=e^{\eta+\xi}$, это уравнение Пуассона , решение этого уравнения $w(\eta,\xi)=F(\eta-j\xi)+G(\eta+j\xi)+\frac{1}{2}e^{\eta+\xi}$,

где $j=\sqrt{-1}$, $w(x,y)=F(\ln x-j\ln y)+G(\ln x+j\ln y)+\frac{1}{2}xy$, откуда $u(x,y)=e^{F(x-j\ln x)+G(x+j\ln y)+\frac{1}{2}xy}$.

Пример . $L_{xy}{}''u(x,y)=L_y{}'u(x,y)L_x{}'u(x,y)\Leftrightarrow\frac{y\left(u_{xy}{}''u-u_y{}'u_x{}'\right)}{uu_x{}'}=\frac{xu_x{}'}{u}\frac{u_y{}'y}{u}$. Пусть $u(x,y)=f(z)$, где $z=xy$, значит $u_x{}'(x,y)=f_x{}'(x,y)=f_z{}'(z)z_x{}'=f_z{}'(z)y$,

$u_y{}'(x,y)=f_y{}'(x,y)=f_z{}'(z)z_y{}'=f_z{}'(z)x, u_{yy}{}''(x,y)=\left(f_z{}'(z)x\right)_y{}'=f_{zz}{}''(z)z_y{}'x=f_{zz}{}''(z)x^2,\ u_{xx}{}''(x,y)=\left(f_z{}'(z)y\right)_x{}'=f_{zz}{}''(z)z_x{}'y=f_{zz}{}''(z)y^2,$

$u_{xy}{}''(x,y)=\left(f_z{}'(z)y\right)_y{}'=f_{zz}{}''(z)z_y{}'y+f_z{}'(z)y=f_{zz}{}''(z)xy+f_z{}'(z)1=f_{zz}{}''(z)z+f_z{}'(z)$, тогда $\frac{\left(f''(z)z+f'(z)\right)f(z)-\left(f'(z)\right)^2}{f(z)f'(z)}=\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^2$.

Другое решение . $u(x,y)=e^{\omega(x,y)}$, тогда $u_y{}'=e^\omega\omega_y{}'$, $u_x{}'=e^\omega\omega_x{}'$, $u_{xy}{}''=e^\omega\omega_y{}'\omega_x{}'+e^\omega\omega_{xy}{}''=e^\omega\left(\omega_y{}'\omega_x{}'+\omega_{xy}{}''\right)$, получим уравнение $\frac{\omega_{xy}{}''}{\omega_x{}'}=ax\omega_y{}'\omega_x{}'$.

Пусть $x=e^\eta$, $\eta=\ln x$, $\xi=\ln y$, $y=e^\xi$, $\omega_y{}'=\frac{\omega_\xi{}'}{e^\xi}$, $\omega_x{}'=\frac{\omega_\eta{}'}{e^\eta}$, $\omega_{xy}{}''=\frac{\omega_{\eta\xi}{}''}{e^\eta e^\xi}$, это дает $\frac{\omega_{\eta\xi}{}''}{\omega_\eta{}'}=a\omega_\eta{}'\omega_\xi{}'$, $\omega_{\eta\xi}{}''=a\omega_\xi{}'\left(\omega_\eta{}'\right)^2$.

Решение этого уравнения найдем в виде $\omega(\eta,\xi)=F(\eta)G(\xi)$, поэтому $F'(\eta)G'(\xi)=aF(\eta)G'(\xi)\left(G(\xi)\right)^2\left(F'(\eta)\right)^2$, $F'(\eta)F(\eta)=\frac{1}{aG(\xi)}=\lambda$, отсюда $G(\xi)=\frac{1}{\sqrt{a\lambda}}$,

$F'(\eta)F(\eta)=\lambda$, $F(\eta)=\pm\sqrt{2\left(\lambda\eta+c(\xi)\right)}$, откуда $\omega(\eta,\xi)=\frac{\pm\sqrt{2\left(\lambda\eta+c(\xi)\right)}}{\sqrt{a\lambda}}$, $\omega(x,y)=\frac{\pm\sqrt{2\left(\lambda\ln x+c(\ln y)\right)}}{\sqrt{a\lambda}}$, $u(x,y)=e^{\frac{\pm\sqrt{2\left(\lambda\ln x+c(\ln y)\right)}}{\sqrt{a\lambda}}}$.

Найдем волновое решение уравнения $\omega_{\eta\xi}{}''=a\omega_\xi{}'\left(\omega_\eta{}'\right)^2$. Пусть $\omega(\eta,\xi)=g(\mu)$, где $\mu=\eta-\rho\xi$, ρ постоянные , значит $\omega_\eta{}'=g'$, $\omega_\xi{}'=-\rho g'$, $\omega_{\xi\eta}{}''=-\rho g''$, это дает

$-\rho g''=-a\rho(g')^3$, то есть $g''=a(g')^3$. Let $\frac{dg}{d\mu}=g'(\mu)=p(g)$, поэтому $\frac{d^2g}{d\mu^2}=g''(\mu)=p\frac{dp}{dg}$, отсюда $p\frac{dp}{dg}=ap^3$, $\frac{dp}{ap^2}=dg$, тогда $p(g)=\frac{1}{r-ag}$ где r постоянная , тогда $\frac{dg}{d\mu}=\frac{1}{r-ag}$, $(r-ag)dg=d\mu$, so $rg-\frac{a}{2}g^2=\mu+r_1$, откуда $g(\mu)=\frac{r\pm\sqrt{r^2-2a(\mu+r_1)}}{a}$, значит $\omega(\eta,\xi)=\frac{r\pm\sqrt{r^2-2a(-\rho\xi+\eta+r_1)}}{a}$, $\omega(x,y)=\frac{r\pm\sqrt{r^2-2a(\ln x-\rho\ln y+r_1)}}{a}$, $u=e^{\frac{r\pm\sqrt{r^2-2a(\ln x-\rho\ln y+r_1)}}{a}}$.

Пример . $L_{xy}''u(x,y)=a\left(-\frac{1}{\ln u(x,y)}\right)$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $\frac{y(u_{xy}''u-u_y'u_x')}{uu_x'}=a\left(-\frac{1}{\ln u}\right)$, найдем L_x' производную от обеих частей данного уравнения $L_{x^2y}'''u=L_x'\left(a\left(-\frac{1}{\ln u}\right)\right)=-\frac{1}{\ln u}L_x'u$, поскольку $L_x'\left(-\frac{1}{\ln x}\right)=-\frac{1}{\ln x}$, тогда $L_{x^2y}'''u=\frac{L_{xy}''u}{a}L_x'u$. Пусть $L_x'u(x,y)=z(x,y)$, тогда $L_{xy}u=L_yz$, $L_{x^2}''u=L_x'u$, $L_{x^2y}'''u=L_{xy}''z$, получим уравнение $L_{xy}''z=\frac{L_y'z}{a}z$, значит $\frac{y(z_{xy}''z-z_y'z_x')}{zz_x'}=\frac{yz_y'}{az}z$, $z_{xy}''z-z_y'z_x'=\frac{z_x'z_y'}{a}z$. Решение уравнения найдем в виде $z(x,y)=e^{\omega(x,y)}$, это дает $z_y'=e^{\omega}\omega_y'$, $z_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $z_{xy}''=e^{\omega}\omega_y'\omega_x'+e^{\omega}\omega_{xy}''=e^{\omega}(\omega_y'\omega_x'+\omega_{xy}'')$, поэтому $e^{2\omega}(\omega_y'\omega_x'+\omega_{xy}'')-e^{2\omega}\omega_y'\omega_x'=\frac{\omega_x'\omega_y'}{a}e^{3\omega}$, $\omega_{xy}''=\omega_x'\omega_y'e^{\omega}$.

Пример . $L_{xy}''z(x,y)=2\sqrt{\lambda(x,y)L_y'z(x,y)L_x'(x,y)}$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $\frac{y(z_{xy}''z-z_y'z_x')}{zz_x'}=2\sqrt{\lambda\frac{xz_x'}{z}\frac{yz_y'}{z}}$, $\frac{y(z_{xy}''z-z_y'z_x')}{z_x'}=2\sqrt{\lambda xyz_y'z_x'}$, потому что $L_{xy}''z=L_y'(L_x'z)=\frac{y(z_{xy}''z-z_y'z_x')}{zz_x'}$, $L_{yx}''z=L_x'(L_y'z)=\frac{x(z_{yx}''-z_x'z_y')}{zz_y'}$, $\frac{L_{xy}''z}{L_{yx}''z}=\frac{L_y'z}{L_x'z}=\frac{yz_y'}{xz_x'}$. Пусть $u(x,y)=\sqrt{L_x'z(x,y)}$, $v(x,y)=\sqrt{L_y'z(x,y)}$, отсюда $L_y'u=\frac{1}{2}L_y'(L_z'z)=\frac{1}{2}L_{xy}''z=\frac{1}{2}2\sqrt{\lambda L_x'zL_y'z}=\sqrt{\lambda}uv$, тогда $v=\frac{L_y'u}{\sqrt{\lambda}u}$, $L_x'v=\frac{1}{2}L_x'(L_y'z)=\frac{1}{2}L_{yx}''z=\frac{1}{2}\frac{L_x'z}{L_y'z}L_{xy}''z=\frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2}2\sqrt{\lambda L_x'zL_y'z}=\frac{u^2}{v^2}\sqrt{\lambda}uv=\frac{u^3}{v}\sqrt{\lambda}$.

$L_{yx}''u = L_x'\left(L_y'u\right) = L_x'\left(\sqrt{\lambda}uv\right) = L_x'\lambda + L_x'u + L_x'v = L_x'\lambda + L_x'u + \frac{u^3}{v}\sqrt{\lambda} = L_x'\lambda + L_x'u + \frac{u^3}{\frac{L_y'u}{\sqrt{\lambda}u}}\sqrt{\lambda} = L_x'\lambda + L_x'u + \frac{u^4}{L_y'u}\lambda$, это уравнение эквивалентно следующему

дифференциальному уравнению $\frac{x\left(u_{xy}''u - u_y'u_x'\right)}{uu_y'} = \frac{x\lambda_x'}{\lambda} + \frac{xu_x'}{u} + \frac{u^4}{\frac{yu_y'}{u}}$, тогда $\frac{xu_{xy}''}{u_y'} - \frac{xu_x'}{u} = \frac{x\lambda_x'}{\lambda} + \frac{xu_x'}{u} + \frac{u^5}{yu_y'}\lambda$, если решение этого уравнения найденно , тогда функцию

$z(x, y)$ можно найти из уравнения $L_x'z(x, y) = u^2(x, y)$.

Рассмотрим систему $\begin{cases} L_t'x(t) = f_1\left(x(t), y(t)\right) \\ L_t y(t) = f_2\left(x(t), y(t)\right) \end{cases}$. Пусть $x(t) = \phi_1(t), y(t) = \phi_2(t)$ решение этой системы , $u(x, y)$ произвольная непрерывная функция

Поэтому $\omega(t) = u(x, y)_{x=\phi_1(t), y=\phi_2(t)} = u\left(\phi_1(t), \phi_2(t)\right)$, тогда $L_t'\omega(t) = \frac{t\omega_t'(t)}{\omega(t)} = \frac{t\left(u_x'x_t' + u_y'y_t'\right)}{u} = \frac{xu_x'}{u}\frac{tx_t'}{x} + \frac{yu_y'}{u}\frac{ty_t'}{y} = L_x'u(x, y)L_t'x(t) + L_y'u(x, y)L_t'y(t) =$

$= \left(L_x'u(x, y)\right)f_1\left(x(t), y(t)\right) + \left(L_y'u(x, y)\right)f_2\left(x(t), y(t)\right)$. Назовем это выражение LN производной векторного поля $F\left(f_1\left(x(t), y(t)\right), f_2\left(x(t), y(t)\right)\right)$.

Пусть $u(x, y)$ первый интеграл этой системы , тогда $\omega(t) = u\left(\phi_1(t), \phi_2(t)\right) = c \Rightarrow L_t'\omega(t) = L_t'u\left(\phi_1(t), \phi_2(t)\right) = L_t'c = 0$.Значит для того чтобы функция была первым интегралом необходимо достаточно $\left(L_x'u\right)f_1 + \left(L_y'u\right)f_2 = 0$, то есть LN производная векторного поля $F\left(f_1, f_2\right)$ была равна 0 .

Пример . $\begin{cases} L_t'x(t) = -L_y'H(x, y) \\ L_t'y(t) = L_x'H(x, y) \end{cases}$ где $H(x, y)$ непрерывная функция . Поэтому функция $H(x, y)$ первый интеграл этой системы .

Доказательство . $L_x'H\left(-L_y'H\right)+\left(L_y'H\right)L_x'H=0$, $\begin{cases} \dfrac{tx_t'(t)}{x(t)}=-\dfrac{yH_y'(x,y)}{H(x,y)} \\ \dfrac{ty_t'(t)}{y(t)}=\dfrac{xH_x'(x,y)}{H(x,y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t)=\dfrac{xy}{t}\left(-\dfrac{H_y'}{H}\right) \\ y'(t)=\dfrac{xy}{t}\left(\dfrac{H_x'}{H}\right) \end{cases}$ эта система дифференциальных уравнений не автономная , тогда нужно добавить новую функцию $z(t)=t$. Отсюда $\begin{cases} x'(t)=-\dfrac{xy}{t}\dfrac{H_y'}{H} \\ y'(t)=\dfrac{xy}{t}\dfrac{H_x'}{H} \\ z'(t)=1 \end{cases}$. Производная функции $H(x,y)$ вдоль векторного поля

$$H_t'\left(x(t),y(t)\right)=H_x'(x,y)\left(-\frac{xy}{t}\frac{H_y'}{H}\right)+H_y'(x,y)\left(\frac{xy}{t}\frac{H_x'}{H}\right)+H_z'(x,y)1=0 .$$

Пример . $\begin{cases} L_t'x(t)=L_y'H(x,y) \\ L_t'y(t)=-L_x'H(x,y) \end{cases}$, эта система уравнений эквивалентна следующей системе $\begin{cases} \dfrac{t\dot{x}(t)}{x(t)}=\dfrac{yH_y'(x,y)}{H(x,y)} \\ \dfrac{t\dot{y}(t)}{y(t)}=-\dfrac{xH_x'(x,y)}{H(x,y)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t)=\dfrac{xy}{t}\left(\dfrac{H_y'}{H}\right) \\ \dot{y}(t)=\dfrac{xy}{t}\left(-\dfrac{H_x'}{H}\right) \end{cases}$.

Пусть $H=\dfrac{x^2}{2}+w^2\dfrac{y^2}{2}$, это гармонический осцилятор , тогда получим систему $\begin{cases} \dot{x}(t)=\dfrac{2xy^2w^2}{t\left(x^2+w^2y^2\right)} \\ \dot{y}(t)=-\dfrac{2x^2y}{t\left(x^2+w^2y^2\right)} \end{cases}$. Решение этой системы $x(t)=\pm\dfrac{t^2}{\sqrt{c_1-ct^4}}$, $y(t)=\mp\dfrac{\sqrt{(2x-\dot{x}t)t\dot{x}x}}{w(\dot{x}t-2x)}$

Пример . $\begin{cases} L_t' x_1(t) = L_{y_1}' H(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ L_t' x_2(t) = L_{y_2}' H(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ L_t' y_1(t) = -L_{x_1}' H(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ L_t' y_2(t) = -L_{x_2}' H(x_1, x_2, y_1, y_2) \end{cases}$, где $H(x, y)$ непрерывная функция . Отсюда $H(x, y)$ первый интеграл этой системы .

Доказательство . Найдем LN функции $H(x_1, x_2, y_1, y_2)$ вдоль векторного поля системы $L_{x_1}'H(L_{y_1}'H) + (L_{x_2}'H)(L_{y_2}'H) + L_{y_1}'H(-L_{x_1}'H) + L_{y_2}'H(-L_{x_2}'H) = 0$,

эта система эквивалентна следующей системе $\begin{cases} \dfrac{t\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} = \dfrac{y_1 H_{y_1}'(x_1, x_2, y_1, y_2)}{H(x_1, x_2, y_1, y_2)} \\ \dfrac{t\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} = \dfrac{y_2 H_{y_2}'(x_1, x_2, y_1, y_2)}{H(x_1, x_2, y_1, y_2)} \\ \dfrac{t\dot{y}_1(t)}{y_1(t)} = -\dfrac{x_1 H_{x_1}'(x_1, x_2, y_1, y_2)}{H(x_1, x_2, y_1, y_2)} \\ \dfrac{t\dot{y}_2(t)}{y_2(t)} = -\dfrac{x_2 H_{x_2}'(x_1, x_2, y_1, y_2)}{H(x_1, x_2, y_1, y_2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{x_1 y_1}{t}\left(\dfrac{H_{y_1}'}{H}\right) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{x_2 y_2}{t}\left(\dfrac{H_{y_2}'}{H}\right) \\ \dot{y}_1(t) = -\dfrac{x_1 y_1}{t}\left(\dfrac{H_{x_1}'}{H}\right) \\ \dot{y}_2(t) = -\dfrac{x_2 y_2}{t}\left(\dfrac{H_{x_2}'}{H}\right) \end{cases}$, эта система не автономная , тогда добавим новую функцию $z(t) = t$. Откуда $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{x_1 y_1}{t}\left(\frac{H_{y_1}'}{H}\right) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{x_2 y_2}{t}\left(\frac{H_{y_2}'}{H}\right) \\ \dot{y}_1(t) = -\frac{x_1 y_1}{t}\left(\frac{H_{x_1}'}{H}\right) \\ \dot{y}_2(t) = -\frac{x_2 y_2}{t}\left(\frac{H_{x_2}'}{H}\right) \\ \dot{z}(t) = 1 \end{cases}$.

Производная функции $H(x_1, x_2, y_1, y_2)$ вдоль векторного поля этой системы , производная Ли это

$H_t' = H_{x_1}'\left(\frac{x_1 y_1}{t}\frac{H_{y_1}'}{H}\right) + H_{x_2}'\left(\frac{x_2 y_2}{t}\frac{H_{y_2}'}{H}\right) + H_{y_1}'\left(-\frac{x_1 y_1}{t}\frac{H_{x_1}'}{H}\right) + H_{y_2}'\left(-\frac{x_2 y_2}{t}\frac{H_{x_2}'}{H}\right) + H_z'(x, y)1 = 0$, тогда функция $H(x_1, x_2, y_1, y_2)$ первый интеграл этой системы .

Пусть $G(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ произвольная функция . Найдем полную L производную функции $G(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$, то есть

$L_t'G = L_{x_1}'G \bullet L_t'x_1 + L_{x_2}'G \bullet L_t'x_2 + L_{y_1}'G \bullet L_t'y_1 + L_{y_2}'G \bullet L_t'y_2 = L_{x_1}'G \bullet L_{y_1}'H + L_{x_2}'G \bullet L_{y_2}'H - L_{y_1}'G \bullet L_{x_1}'H - L_{y_2}'G \bullet L_{x_2}'H$.

$\frac{x_j F_{x_j}'}{F}\frac{y_j H_{y_j}'}{H} - \frac{y_j F_{y_j}'}{F}\frac{x_j H_{x_j}'}{H} = \frac{x_j y_j}{FH}\left(F_{x_j}'H_{y_j}' - F_{y_j}'H_{x_j}'\right) = \frac{x_j y_j}{FH}\{F, H\}$, где $\{F, H\}$ скобки Пуассона .

Эта система интегрируема первого порядка , поскольку функция $H(x, y)$ первый интеграл , система n порядка $\begin{cases} L_t'x_j(t) = L_{y_j}'H(x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) \\ L_t'y_j(t) = -L_{x_j}'H(x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) \end{cases}$ не всегда интегрируема .

Пример . $\begin{cases} L_x'u(x,y)+aL_y'v(x,y)=0 \\ L_y'u(x,y)+bL_x'v(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_x'u+aL_y'v=0 \\ \sqrt{\frac{a}{b}}L_y'u+\sqrt{\frac{a}{b}}bL_x'v=0 \end{cases}$ значит $\begin{cases} L_x'u+aL_y'v=0 \\ L_y'(u)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}+L_x'(v)^{\sqrt{ab}}=0 \end{cases}$ сложим , вычтем эти два уравнения $\begin{cases} L_x'uv^{\sqrt{ab}}+L_y'u^{\sqrt{\frac{a}{b}}}v^a=0 \\ L_x'\frac{v^{\sqrt{ab}}}{u}+L_y'\frac{u^{\sqrt{\frac{a}{b}}}}{v^a}=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} L_x'uv^{\sqrt{ab}}+L_y'\left(uv^{\sqrt{ab}}\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}=0 \\ L_x'\frac{u_2^{\sqrt{ab}}}{u_1}+L_y'\left(\frac{u}{v^{\sqrt{ab}}}\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}=0 \end{cases}$ это дает $\begin{cases} L_x'uv^{\sqrt{ab}}+\sqrt{\frac{a}{b}}L_y'uv^{\sqrt{ab}}=0 \\ L_x'\frac{v^{\sqrt{ab}}}{u}+\sqrt{\frac{a}{b}}L_y'\frac{u}{v^{\sqrt{ab}}}=0 \end{cases}$. Пусть $uv^{\sqrt{ab}}=g(x,y), \frac{v^{\sqrt{ab}}}{u}=q(x,y)$, тогда $\begin{cases} L_x'g+\sqrt{\frac{a}{b}}L_y'g=0 \\ L_x'q-\sqrt{\frac{a}{b}}L_y'q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xg_x'}{g}+\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{yg_y'}{g}=0 \\ \frac{xq_x'}{q}-\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{yq_y'}{q}=0 \end{cases}$, $\begin{cases} xg_x'+\sqrt{\frac{a}{b}}yg_y'=0 \\ xq_x'-\sqrt{\frac{a}{b}}yq_y'=0 \end{cases}$.

Решение этой системы уравнений $g(x,y)=G\left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$, $q(x,y)=Q\left(xy\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, где $Q(z)$, $G(z)$ непрерывные функции.

Другое решение . Решение этой системы найдем в виде $u(x,y)=X_1(x)Y_1(y)$, $v(x,y)=X_2(x)Y_2(y)$, тогда $L_x'u(x,y)=L_x'X_1(x)$, $L_y'u(x,y)=L_y'Y_1(y)$,

$L_y'v(x,y)=L_y'Y_2(y)$, $L_x'v(x,y)=L_x'X_2(x)$, получим систему уравнений $\begin{cases} L_x'X_1(x)+aL_y'Y_2(y)=0 \\ L_y'Y_1(y)+bL_x'X_2(x)=0 \end{cases}$, это дает $\begin{cases} L_x'X_1(x)=-aL_y'Y_2(y)=\lambda \\ L_y'Y_1(y)=-bL_x'X_2(x)=\lambda \end{cases}$,

поэтому $X_1(x)=x^{\lambda}$, $Y_2(y)=c_2(x)y^{-\frac{\lambda}{a}}$, $Y_1(y)=c_1(x)y^{\lambda}$, $X_2(x)=x^{-\frac{\lambda}{b}}$, отсюда $u(x,y)=c_1(x)x^{\lambda}y^{\lambda}$, $v(x,y)=c_2(x)x^{-\frac{\lambda}{b}}y^{-\frac{\lambda}{a}}$.

Функции $c_2(x)$, $c_1(x)$ можно найти из начальных условий .

Пример . $\begin{cases} L_x'u(x,y)L_y'v(x,y)=f_1(x)g_1(y) \\ L_y'u(x,y)L_x'v(x,y)=f_2(x)g_2(y) \end{cases}$, эта система уравнений эквивалентна следующей системе $\begin{cases} \frac{xu_x'(x,y)}{u(x,y)}\frac{yv_y'(x,y)}{v(x,y)}=f_1(x)g_1(y) \\ \frac{yu_y'(x,y)}{u(x,y)}\frac{xv_x'(x,y)}{v(x,y)}=f_2(x)g_2(y) \end{cases}$

найдем L_x' производную из первого уравнения , L_y' производную из второго уравнения $\begin{cases} L_{x^2}''u(x,y)+L_{yx}''v(x,y)=L_x'f_1(x) \\ L_{y^2}''u(x,y)+L_{xy}''v(x,y)=L_y'g_2(y) \end{cases}$, откуда

$$\begin{cases} L_{x^2}''u(x,y)+L_{xy}''v(x,y)\dfrac{L_x'v(x,y)}{L_yv(x,y)}=L_x'f_1(x) \\ L_{xy}''v(x,y)=L_y'g_2(y)-L_{y^2}''u(x,y) \end{cases}$$, значит

$L_{x^2}''u(x,y)+\left(L_y'g_2(y)-L_{y^2}''u(x,y)\right)\dfrac{L_x'v(x,y)}{L_y'v(x,y)}=L_x'f_1(x)$, $L_2''u(x,y)+\left(L_y'g_2(y)-L_{y^2}''u(x,y)\right)\dfrac{L_x'u(x,y)}{L_y'u(x,y)}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}=L_x'f_1(x)$,

$\dfrac{L_{x^2}''u(x,y)-L_x'f_1(x)}{L_x'u(x,y)}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{L_{y^2}''u(x,y)-L_y'g_2(y)}{L_y'u(x,y)}\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}$. Let $u(x,y)=X_1(x)Y_1(y)$, это дает $L_x'u(x,y)=L_x'X_1(x)$, $L_y'u(x,y)=L_y'Y_1(y)$,

$L_{y^2}''u(x,y)=L_{y^2}''Y_1(y)$, $L_{x^2}''u(x,y)=L_{x^2}''X_1(x)$, тогда $\dfrac{L_{x^2}''X_1(x)-L_x'f_1(x)}{L_x'X_1(x)}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lambda$, $\dfrac{L_{y^2}''Y_1(y)-L_y'g_2(y)}{L_y'Y_1(y)}\dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}=\lambda$, решая эти обыкновенные дифференциальные уравнения найдем функции $Y_1(y)$, $X_1(x)$. Аналогично найдем функцию $v(x,y)$.

Пример . $\begin{cases} L_x'u(x,y)+L_y'u(x,y)=0 \\ \left(L_x'u(x,y)\right)^2+\left(L_y'u(x,y)\right)=1 \end{cases}$, эта система дифференциальных уравнений эквивалентна следующей системе $\begin{cases} xu_x'+yu_y'=0 \\ x^2\left(u_x'\right)^2+y^2\left(u_y'\right)^2=u^2 \end{cases}$

L интегральные уравнения .

Пример . $\phi(x)=\lambda L\int_a^b\left(a_1(x)b_1(t)+b_2(t)a_2(x)\right)\phi(t)\,dt+f(x)$ поэтому $\phi(x)=\lambda\left(L\int_a^b a_1(x)b_1(t)\phi(t)\,dt\right)\left(L\int_a^b b_2(t)a_2(x)\phi(t)\,dt\right)+f(x)$

тогда $\phi(x)=\lambda\left(L\int\limits_a^b b_1(t)\,y(t)\,dt\right)^{a_1(x)}\left(L\int\limits_a^b b_2(t)\,y(t)\,dt\right)^{a_2(x)}+f(x)$. Пусть $C_1=L\int\limits_a^b b_1(t)\,y(t)\,dt, C_2=L\int\limits_a^b b_2(t)\,y(t)\,dt \Rightarrow \phi(x)=\lambda C_1^{a_1(x)}C_2^{a_2(x)}+f(x)$. Подставим эти выражения в $C_1, C_2 \Rightarrow C_1=L\int\limits_a^b b_1(t)\left(\lambda C_1^{a_1(x)}C_2^{a_2(x)}+f(x)\right)dt, C_1=e^{\int_a^b \frac{\lambda b_1 C_1^{a_1}C_2^{a_2}}{t}dt}e^{\int_a^b \frac{b_1 f}{t}dt}$, аналогично найдем $C_2=e^{\int_a^b \frac{\lambda b_2 C_1^{a_1}C_2^{a_2}}{t}dt}e^{\int_a^b \frac{b_2 f}{t}dt}$. Отсюда $\begin{cases}\ln C_1=\lambda C_1^{a_1}C_2^{a_2}\int\limits_a^b \frac{b_1}{t}dt+\int\limits_a^b \frac{b_1 f}{t}dt\\ \ln C_2=\lambda C_1^{a_1}C_2^{a_2}\int\limits_a^b \frac{b_2}{t}dt+\int\limits_a^b \frac{b_2 f}{t}dt\end{cases}$,

$\begin{cases}\ln C_1=\lambda C_1^{a_1}C_2^{a_2}\int\limits_a^b \frac{b_1}{t}dt+R_1\\ \ln C_2=\lambda C_1^{a_1}C_2^{a_2}\int\limits_a^b \frac{b_2}{t}dt+R_2\end{cases}$ это алгебраическая система для переменных C_1, C_2 .

Пример . $y(x)=\lambda L\int\limits_a^b k(x,t)\,f\left(y(t)\right)dt$. Откуда $y(x)=\lambda e^{\int_a^b k(x,t)f(\phi(t))dt}$, тогда $\ln y(x)=\lambda_1+\int\limits_a^b k(x,t)\,f\left(y(t)\right)dt$.

Пример . $y(x)=\lambda L\int\limits_0^e\left(\ln x+e^t y^2(t)\right)dt$, значит $y(x)=\lambda e^{\int_0^e \frac{\left(\ln x+e^t y^2(t)\right)}{t}dt}$, это уравнение напишем так $y(x)=\lambda\left(L\int\limits_0^e \ln x dt\right)\cdot\left(L\int\limits_0^e e^t y^2(t)\,dt\right)=\lambda\gamma x$, где $L\int\limits_0^e \ln x dt=e^{\int_0^e \frac{\ln x}{t}dt}=0$, $\gamma=L\int\limits_0^e e^t y^2(t)\,dt$. Подставим $y(x)=\lambda\gamma x$ в уравнение $\lambda\gamma x=\lambda x L\int\limits_0^e e^t t^2(\lambda\gamma)^2\,dt$, тогда $\gamma=e^{\int_0^e \frac{e^t t^2(\lambda\gamma)^2}{t}dt}=e^{(\lambda\gamma)^2\int_0^e te^t dt}$, тогда $\gamma=e^{(\lambda\gamma)^2 27}$, $\gamma=e^{-0.5 LambertW\left(-54\lambda^2\right)}$, это дает $y(x)=\lambda x e^{-0.5 LambertW\left(-54\lambda^2\right)}$.

Пример . $y(x)=\left(L\int\limits_0^1 x^m t^n y(t)\,dt\right)^{\lambda}$, значит $y(x)=\left(e^{\int_0^1 \frac{x^m t^n y(t)}{t}dt}\right)^{\lambda}=e^{\lambda\int_0^1 x^m t^{n-1}y(t)dt}$. Пусть $m=1, n=2$, тогда $y(x)=e^{\lambda\int_0^1 xty(t)dt}=e^{\lambda x\int_0^1 ty(t)dt}$.

Пусть $C=\lambda\int\limits_0^1 ty(t)\,dt \Rightarrow y(x)=e^{Cx}$, найдем $C=\lambda\int\limits_0^1 te^{Ct}dt$, поэтому $C=\lambda\frac{Ce^C-e^C+1}{C^2}$ это уравнение имеет решение $C=1, \lambda=1$, отсюда найдем $y=e^x$.

Уравнение $y(x)=e^{x\int_0^1 ty(t)dt}$ имеет решение $y=e^x$.

Пример . $y(x)=\left(L\int\limits_0^{\pi} xty(t)(\sin t+\cos t)\,dt\right)^{\lambda}$, значит $y(x)=\left(e^{x\int\limits_0^{\pi}\frac{ty(t)(\sin t+\cos t)}{t}dt}\right)^{\lambda}=e^{\lambda x\int\limits_0^{\pi} y(t)(\sin t+\cos t)dt}$ это уравнение решается аналогично .

Пример . $y(x)=L\int\limits_0^{x} xy(t)\,dt \quad y(x)=e^{\int\limits_0^{x}\frac{xy(t)}{t}dt}$, это дает $\ln y(x)=\int\limits_0^{x}\frac{xy(t)}{t}dt$, дифференцируем по x $y'(x)=\left(e^{\int\limits_0^{x}\frac{xy(t)}{t}dt}\right)'_x=e^{\int\limits_0^{x}\frac{xy(t)}{t}dt}\left(\int\limits_0^{x}\frac{xy(t)}{t}dt\right)'_x$, $\left(\int\limits_0^{x}\frac{xy(t)}{t}\right)'_x=$

$=\left((uv)'=u'v+v'u\ ,\ u=x\ ,\ v=\int\limits_0^{x}\frac{y(t)}{t}dt\right)=1\cdot\int\limits_0^{x}\frac{y(t)}{t}dt+\left(\int\limits_0^{x}\frac{y(t)}{t}dt\right)'_x\cdot x=\int\limits_0^{x}\frac{y(t)}{t}dt+\frac{y(x)}{x}x=\frac{1}{x}x\cdot\int\limits_0^{x}\frac{y(t)}{t}dt+y(x)=\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^{x}\frac{xy(t)}{t}dt+y(x)=\frac{1}{x}\ln y(x)+y(x)$,

поэтому $y'(x)=y(x)\left(y(x)+\frac{1}{x}\ln y(x)\right)$.

Пример . $y(x)+a_1L'y(x)+a_2L''y(x)=f(x)$. Пусть $y_1(x)=y(x), y_2(x)=L'y(x)$, поэтому $L'y_1(x)=L'y(x)=y_2(x), L''y(x)=\frac{f(x)-a_1L'y(x)-y(x)}{a_2}=\frac{f(x)-a_1y_2(x)-y_1(x)}{a_2}$,

получим систему дифференциальных уравнений первого порядка $\begin{cases} L'y_1(x)=y_2(x) \\ L'y_2(x)=\dfrac{f(x)-a_1y_2(x)-y_1(x)}{a_2}\end{cases}$, эта система эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} y_1(x)=C_1L\int\limits_0^{x} y_2(t)\,dt \\ y_2(x)=C_2L\int\limits_0^{x}\dfrac{f(t)-a_1y_2(t)-y_1(t)}{a_2}\end{cases}.$$

Пример . $y(x) = aL\int_b^x xa^t y(t)\,dt$ Пусть $u(x) = L\int_b^x a^t y(t)\,dt$ значит $y(x) = a\left(L\int_b^x a^t y(t)\,dt\right)^x = a(u(x))^x$, $L_x'\left(L\int_b^x a^t y(t)\,dt\right) = a^x y(x)$,

тогда $L'u(x) = a^x a(u(x))^x$, это дает $\dfrac{xu'(x)}{u(x)} = a^{x+1}(u(x))^x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{(au(x))^{x+1}}{x}$.

Пример . $y(x) = L\int_0^\infty \left(-xt^2e^{-t}y(t)\right)dt$, это дает $y(x) = e^{\lambda\int_0^\infty \frac{-xt^2e^{-t}y(t)}{t}dt}$. Пусть $C = \lambda\int_0^\infty te^{-t}y(t)dt$, тогда $y(x) = e^{-xC}$, отсюда $C = \lambda\int_0^\infty te^{-t}e^{-tC}dt = \lambda\int_0^\infty te^{-t(C+1)}dt$,

откуда $C = \lambda\dfrac{1}{(C+1)^2}$, $C^3 + 2C^2 + C - \lambda = 0$, это уравнение имеет действительное решение , если $\dfrac{\lambda^2}{4} + \dfrac{\lambda}{27} \ge 0$ откуда $\lambda \le -\dfrac{4}{27}$, $\lambda \ge 0$.

Пример . Интегро дифференциальное уравнение $(L'y(x))^n = y(x)^r L\int_1^e ty(t)\,dt$, $y(1) = y_0$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению

$\left(\dfrac{xy'(x)}{y(x)}\right)^n = y(x)^r e^{\int_1^e \frac{ty(t)}{t}dt} = y(x)^r e^{\int_1^e y(t)dt}$. Найдем от этого уравнения L производную $L'(L'y)^n = L'y^r + 0$, $\mu L''y = rL'y$, $\left(1 + \dfrac{xy''}{y'} - \dfrac{xy'}{y}\right)n = r\dfrac{xy'}{y}$, $1 + \dfrac{xy''}{y'} - \dfrac{xy'}{y}(a+1) = 0$,

где $a = \dfrac{r}{n}$, решение этого уравнения получим в виде $y(x) = e^{g(x)}$, $y' = e^g g'$, $y'' = e^g\left((g')^2 + g''\right)$, поэтому $1 + \dfrac{x\left((g')^2 + g''\right)}{g'} - xg'(a+1) = 0$, $g'(x) = u(x)$, отсюда

$1 + \dfrac{x(u^2 + u')}{u} - xu(a+1) = 0$, $u + xu' - xau^2 = 0$, $u(x) = \alpha(x)\beta(x)$, тогда $\beta\left(\alpha' + \dfrac{\alpha}{x}\right) + \beta'\alpha - a\alpha^2\beta^2 = 0$, тогда $\alpha' + \dfrac{\alpha}{x} = 0$, $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$, $\beta' - \dfrac{a}{x}\beta^2 = 0$, итак $\beta(x) = \dfrac{-1}{c_1 + a\ln x}$,

$u(x) = \dfrac{1}{x(c_1 + a\ln x)}$, $g'(x) = \dfrac{-1}{x(c_1 + a\ln x)}$, $g(x) = -\dfrac{\ln(a\ln x + c_1)}{a} + c_2$, $y(x) = e^{-\frac{\ln(a\ln x + c_1)}{a} + c_2} = c_2(a\ln x + c_1)^{-\frac{1}{a}} = c_2\left(\dfrac{r}{n}\ln x + c_1\right)^{-\frac{n}{r}}$, $y_0 = c_2c_1^{-\frac{n}{r}}$, $L'y(x) = -\dfrac{1}{\frac{r}{n}\ln x + c_1}$,

$(L'y(1))^n = \left(-\dfrac{1}{c_1}\right)^n$, $(L'y(1))^n = y(1)^r L\int_1^e ty(t)\,dt = y_0^r e^{c_2\int_1^e \left(\frac{r}{n}\ln t + c_1\right)^{-\frac{r}{n}}dt}$, $\left(-\dfrac{1}{c_1}\right)^n = y_0^r e^{c_2\int_1^e \left(\frac{r}{n}\ln t + c_1\right)^{-\frac{r}{n}}dt}$.