Доказательство . $L_y'F(y)=\dfrac{yF_y'(y)}{F(y)}=\dfrac{y\left(e^{\int_a^b \frac{f(x,y)}{x}dx}\right)_y'}{e^{\int_a^b \frac{f(x,y)}{x}dx}}=y\int_a^b \dfrac{\dfrac{f(x,y)L_y'f(x,y)}{y}}{x}dx=\int_a^b \dfrac{f(x,y)L_y'f(x,y)}{x}dx=\ln\left(L\int_a^b f(x,y)L_y'f(x,y)\right)dx$.

Пример . $F(n)=L\int_1^2 x^n dx=\left(e^{\frac{x^n}{n}}\right)_1^2=\dfrac{e^{\frac{2^n}{n}}}{e^{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{2^n-1}{n}}$, отсюда $L_n'F(n)=L_n'\left(e^{\frac{2^n-1}{n}}\right)=\dfrac{n\left(e^{\frac{2^n-1}{n}}\right)_n'}{e^{\frac{2^n-1}{n}}}=n\dfrac{n2^n\ln 2-(2^n-1)}{n^2}=\dfrac{n2^n\ln 2-2^n+1}{n}$

$$L_n'F(n)=n\int_1^2\frac{(x^n)_n'}{x}=n\int_1^2\frac{x^n\ln x}{x}dx=n\int_1^2 x^{n-1}\ln x dx=n\left(\left(\frac{x^n}{n}\ln x\right)_1^2-\frac{1}{n}\int_1^2 x^{n-1}dx\right)=\frac{n2^n\ln 2-2^n+1}{n}\ .$$

Пример . Пусть нужно найти функцию $f(x)$ такую что $\sin\left(L\int_0^x f(u)du\right)=g(x)$, где $g(x)$ данная функция , найдем L производную

$$L_x'\left(\sin\left(L\int_0^x f(u)du\right)\right)=\frac{L\int_0^x f(u)du}{\tan\left(L\int_0^x f(u)du\right)}L_x'\left(L\int_0^x f(u)du\right)=L_x'g(x)\ ,\ L'f(\varphi(x))=L_\varphi'f(\varphi)L_x'\varphi(x)\ ,\ L\int_0^x f(u)du=\arcsin g(x)\ ,\ \tan\left(L\int_0^x f(u)du\right)=\frac{\sin\left(L\int_0^x f(u)du\right)}{\cos\left(L\int_0^x f(u)du\right)}=\frac{g(x)}{\pm\sqrt{1-g^2(x)}}\ ,$$

$L_x'\left(L\int_o^x f(u)du\right)=f(x)$, откуда $\dfrac{\pm\sqrt{1-g^2(x)}}{g(x)}\arcsin g(x) f(x)=\dfrac{xg'(x)}{g(x)}$, тогда $f(x)=\dfrac{xg'(x)}{\pm\sqrt{1-g^2(x)}\arcsin g(x)}$.

Обыкновенные L дифференциальные уравнения первого порядка .

Пример . $L'y = f(x) \Rightarrow y = cL\int f(x)\,dx = ce^{\int \frac{f(x)}{x}dx}$.

Другое решение . $\frac{xy'}{y} = f(x)$ Пусть $y = e^{\phi(x)} \Rightarrow \frac{xe^{\phi(x)}\phi'(x)}{e^{\phi(x)}} = f(x)$ $x\phi'(x) = f(x)$ $\frac{d\phi}{dx} = \frac{f(x)}{x}$ $d\phi = \frac{f(x)}{x}dx \Rightarrow \phi(x) = \int \frac{f(x)}{x}dx + c$,$y = e^{\int \frac{f(x)}{x}dx + c} = ce^{\int \frac{f(x)}{x}dx}$.

Пример . $L'y = y$ $\frac{xy'}{y} = y$ $xy' = y^2$ $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} = -(\ln x + c)$, значит $y = -\frac{1}{\ln x + c}$.

Пример . $L'y + p(x)y = g(x)$ Пусть $y = \frac{\ln u}{\ln v} \Rightarrow L'y = \frac{L'u}{\ln u} - \frac{L'v}{\ln v}$ найдем функцию $u(x)$ такую что $\frac{L'u}{\ln u} = g(x)$, поэтому $\frac{1}{\ln u}\frac{xu'(x)}{u} = g(x)$ $\frac{xu'(x)}{u\ln u} = g(x)$ $\frac{u'(x)}{u\ln u} = \frac{g(x)}{x} \Rightarrow$ $\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{g(x)dx}{x}$ $\ln\ln u = \int \frac{g(x)dx}{x}$ $\ln u(x) = e^{\int \frac{g(x)dx}{x}}$, отсюда $g(x) - \frac{L'v}{\ln v} + p(x)y = g(x) \Rightarrow -\frac{L'v}{\ln v} + p(x)\frac{e^{\int \frac{g(x)dx}{x}}}{\ln v} = 0$ $L'v = p(x)e^{\int \frac{g(x)dx}{x}} \Rightarrow v = ce^{\int \frac{p(x)e^{\int \frac{g(x)dx}{x}}}{x}dx}$,

если $p(x) = p$ $g(x) = g$ получим $\ln u = e^{g\int \frac{dx}{x}} = e^{g\ln x} = x^g$ $L'v = pe^{\int \frac{gdx}{x}} = pe^{g\ln x} = px^g \Rightarrow v = ce^{\int \frac{px^g}{x}dx} = ce^{\frac{px^g}{g}} \Rightarrow \ln v = \frac{px^g}{g} + \ln c = \frac{px^g}{g} + c$, откуда $y = \frac{x^g}{\frac{px^g}{g} + c}$.

Другое решение . $\frac{xy'}{y} + py = g$. Пусть $x = e^t$ $t = \ln x$ $y = y(x(t)) \Rightarrow y_t' = y_x' x_t'$, $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = y_t' t_x'$, $y_x' = \frac{y_t'}{e^t} \Rightarrow$ $\frac{x\frac{y_t'}{e^t}}{y} + py = g$, $\frac{e^t\frac{y_t'}{e^t}}{y} + py = g$, $\frac{y_t'}{y} + p = g$,

$y(t) = \alpha(t)\beta(t) \Rightarrow \alpha'\beta + \beta'\alpha - g\alpha\beta = -p\alpha^2\beta^2$, $\alpha'\beta + \alpha(\beta' - g\beta) = -p\alpha^2\beta^2$, $\beta' - \beta g = 0$, $\frac{d\beta}{dt} = \beta g$, $\frac{d\beta}{\beta} = gdt$, $\ln\beta = gt$, $\beta = e^{gt} \Rightarrow \alpha' e^{gt} = -p\alpha^2 e^{2gt}$,

$\alpha' = -p\alpha^2 e^{gt}$, $\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha^2 e^{gt}$, $\frac{d\alpha}{\alpha^2} = -pe^{gt}dt \Rightarrow -\frac{1}{\alpha} = -\frac{p}{g}e^{gt} + c$, $\alpha = \frac{1}{\frac{p}{g}e^{gt} + c}$, поэтому $y(t) = \frac{e^{gt}}{\frac{p}{g}e^{gt} + c}$ $y(x) = \frac{x^g}{\frac{p}{g}x^g + c}$.

Пример . $y\tan yL'y=\cos y-1$. Пусть $z(x)=\cos y(x)$, тогда $L_x'z(x)=L_y'\cos yL_x'y=-y\tan yL_x'y$, thus $L_x'z=1-z$, $\frac{xz'}{z}=1-z,\ z'=\frac{z-z^2}{x}$,

решение этого уравнения $z(x)=\frac{x}{c+x}$, итак $\cos y(x)=\frac{x}{c+x}$.

Другое решение $y\tan yL'y=\cos y-1$, $y\tan y\frac{xy'}{y}=\cos y-1$, $xy'\tan y=\cos y-1$, $\frac{xy'\sin y}{\cos y}=\cos y-1$. Пусть $z(x)=\cos y(x)$, отсюда

$z_x'(x)=-y'\sin y$, откуда $\frac{xz'}{z}=1-z$, $z'=\frac{z-z^2}{x}$.

L дифференциальные уравнения высшего порядка .

Пример . $L''y=F(x)\Rightarrow L'y=c_1L\int F(x)\,dx=c_1e^{\int\frac{F(x)}{x}dx}\Rightarrow y=c_2L\int\left(c_1L\int F(x)\,dx\right)dx=c_2e^{c_1\int\frac{e^{\int\frac{F(x)dx}{x}}}{x}dx}$.

Другое решение $L''y=f(x)\Leftrightarrow 1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}=F(x)$. Пусть $y=f(g(x))$, $g(x)=\ln x\Rightarrow$ $y_x'=\frac{f_g'(g)}{x}$, $y_{xx}''=\frac{\frac{f_{gg}''(g)}{x}x-x'\cdot f_g'(g)}{x^2}=\frac{f''-f'}{x^2}\Rightarrow$

$1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}=1+\frac{x\frac{f''-f'}{x^2}}{\frac{f'}{x}}-\frac{x\frac{f'}{x}}{f}=1+\frac{f''-f'}{f'}-\frac{f'}{f}=\frac{f''}{f'}-\frac{f'}{f}\Rightarrow\frac{f''}{f'}-\frac{f'}{f}=F(t)$, значит $(\ln f'-\ln f)'=F(t)$, $t=g(x)=\ln x$, $\ln f'-\ln f=\int F(t)\,dt+c_1$,

$\frac{f'}{f}=e^{\int F(t)dt+c_1}=c_1e^{\int F(t)dt}$, $\frac{df}{f}=c_1e^{\int F(t)dt}dt$, $\ln|f|=c_1\int e^{\int F(t)dt}dt+c_2$, $f(t)=c_2e^{c_1\int e^{\int F(t)dt}dt}$, $dt=\frac{dx}{x}$, $y=f(\ln x)=c_2e^{c_1\int\frac{e^{\int\frac{F(x)dx}{x}}}{x}dx}$.

Другое решение . Пусть $x=e^t$, $t=\ln x$, это дает $y=y(x(t))$, $y_t'=y_x'x_t'$, $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=y_t't_x'$, $y_x'=\frac{y_t'}{e^t}=y_t'e^{-t}$, $y_{tt}''=\left(y_x'x_t'\right)_t'=y_{xx}''x_t'x_t'+y_x'x_t''=y_{xx}''\left(x_t'\right)^2+y_x'x_{tt}''=y_{xx}''e^{2t}+y_t'e^{-t}e^t\Rightarrow$

$y_{xx}''=\left(y_{tt}''-y_t'\right)e^{-2t}$, тогда $1+\frac{e^t\left(y_{tt}''-y_t'\right)e^{-2t}}{y_t'e^{-t}}-\frac{e^ty_t'e^{-t}}{y}=F(t)$, тогда $\frac{y_{tt}''}{y_t'}-\frac{y_t'}{y}=F(t)$, $y(t)=c_2e^{c_1\int e^{\int F(t)dt}dt}$, $dt=\frac{dx}{x}$, $y(t)=c_2e^{c_1\int\frac{e^{\int\frac{F(x)dx}{x}}}{x}dx}$.

Другое решение . $1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}=F(x) \Leftrightarrow \frac{y''}{y'}-\frac{y'}{y}=G(x)$, где $G(x)=\frac{F(x)-1}{x}$. Пусть $\frac{y'(x)}{y(x)}=u(x)$, итак $u'=\frac{y''y-(y')^2}{y^2}=\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2$, получаем

$y''=y\left(\frac{y'}{y}\right)^2+u'y=yu^2+u'y$. Подставим эти выражения в уравнение , выводим $\frac{yu^2+u'y}{uy}-u=G(x)$, $\frac{u'}{u}=G(x)$. Решение этого уравнения $u(x)=c_1e^{\int G(x)dx}$, значит

$\frac{y'}{y}=c_1e^{\int G(x)dx}$. Решение этого уравнения $y(x)=c_2e^{c_1\int e^{\int G(x)dx}}=c_2e^{c_1\int\frac{e^{\int\frac{F(x)dx}{x}}}{x}dx}$.

Пусть $F(x)=a \Rightarrow y=c_2e^{\frac{c_1x^a}{a}}=c_2c_1^{x^a}$.

Пусть $F(x)=2-x \Rightarrow y=c_2e^{\frac{x+1}{e^x}c_1}$.

Пусть $F(x)=(2-e^x)x+1 \Rightarrow y=\frac{c_2}{e^{c_1e^{-e^x}+x}+xe^{-e^{e^x}}c_1}$.

Пусть $F(x)=x\cdot\tan x+1 \Rightarrow y=\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)^{c_2}c_1$.

Пример . $L''y=\lambda y$ это уравнение эквивалентно следующему уравнению $1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}=\lambda y$. Пусть $y=q(\ln x)$, отсюда $\frac{q''}{q'}-\frac{q'}{q}-\lambda q=0$, $q'=u(q)$,

откуда $q''=u'u$, уравнение трансформируется к уравнению $\frac{u'u}{u}-\frac{u}{q}-\lambda q=0$, $u'-\frac{u}{q}-\lambda q=0$. Пусть $u(q)=\alpha(q)\beta(q)$, значит $\alpha'\beta+\beta'\alpha-\frac{\alpha\beta}{g}-\lambda q=0$,

$\alpha'\beta+\alpha\left(\beta'-\frac{\beta}{q}\right)-\lambda q=0$, $\frac{d\beta}{dq}=\frac{\beta}{q}$ это дает $\beta=q$, получим $\alpha'q-\lambda q=0$, $q\neq 0$, $\alpha'=\lambda$, $\alpha=\lambda q+c \Rightarrow u=(\lambda q+c)q=\lambda q^2+qc$, находим $\frac{dq}{dt}=\lambda q^2+qc$, $\frac{dq}{\lambda q^2+qc}=dt$,

где $t=\ln x$, тогда $\frac{1}{c}\ln\frac{q}{\lambda q+c}=t+c_1$, $\ln\frac{q}{\lambda q+c}=ct+c_1$, тогда $\frac{q}{\lambda q+c}=e^{ct}c_1$, so $q=\frac{e^{ct}cc_1}{1-\lambda e^{ct}c_1}$, поэтому $y=\frac{e^{c\ln x}cc_1}{1-\lambda e^{c\ln x}c_1}=\frac{x^ccc_1}{1-\lambda x^cc_1}$.

Другое решение . $L''y=\lambda y$. Пусть $L'y=u(y)$, тогда $L''y=L'_yu(y)L'_xy(x)=L'u(y)u(y)$, тогда $L'u(y)u(y)=\lambda y$, $\frac{yu'}{u}u=\lambda y$,

$u' = \lambda$, $\dfrac{du}{dy} = \lambda$, $u = \lambda y + c$, $L'y = \lambda y + c$, $\dfrac{xy'}{y} = \lambda y + c$, поэтому $x\dfrac{dy}{dx} = \lambda y^2 + cy$, $\dfrac{dy}{y(\lambda y + c)} = \dfrac{dx}{x}$, откуда $\dfrac{1}{c}\ln\dfrac{y}{\lambda y + c} = \ln xc_1$, откуда $\dfrac{y}{\lambda y + c} = (xc_1)^c = x^c c_1$, $y = \dfrac{x^c cc_1}{1 - \lambda x^c c_1}$.

Граничные условия $y(1) = 1$, $y(R) = 2$, где $R > 1$ произвольное число если $\lambda = 0$, значит $y = x^c cc_1$, применение первого граничного условия дает $1 = cc_1$, применение второго граничного условия дает , $2 = R^c cc_1$, откуда $R^c = 2$, $c = \log_R 2$, тогда собственные функции $y = x^{\log_R 2}$.

Пусть $\lambda \neq 0$, тогда $\dfrac{cc_1}{1 - \lambda c_1} = 1$, $2 = \dfrac{R^c cc_1}{1 - \lambda R^c c_1}$, найдем уравнение $R^c(c + 2\lambda) - 2(\lambda + c) = 0$ это уравнение можно решить численно , $c_1 = \dfrac{1}{c + \lambda}$.

Собственные значения $\lambda = \dfrac{c(2 - R^c)}{2(R^c - 1)}$, собственные функции $y = \dfrac{x^c cc_1}{1 - \lambda x^c c_1}$. Найдем L от этих функций $L\int_1^R y(x)\,dx = e^{\int_1^R \frac{y(x)}{x}dx}$,

$$\int_1^R \frac{y(x)}{x}dx = \int_1^R \frac{x^{c-1}cc_1}{1 - \lambda x^c cc_1}dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^R \frac{d(1 - \lambda x^c cc_1)}{1 - \lambda x^c cc_1} = \frac{1}{\lambda}\ln(1 - \lambda x^c cc_1)\Big|_1^R = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1 - \lambda cc_1}{1 - \lambda R^c cc_1}\right),\ L\int_1^R y(x)\,dx = e^{\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1 - \lambda cc_1}{1 - \lambda R^c cc_1}\right)} = \left(\frac{1 - \lambda cc_1}{1 - \lambda R^c cc_1}\right)^{\frac{1}{\lambda}} .$$

Найдем решение уравнения $\dfrac{q''}{q'} - \dfrac{q'}{q} - \lambda q = 0$, $q''q - (q')^2 - \lambda q'q^2 = 0$, где $q = q(t)$ методом tanh . Рассмотрим однородный баланс между выражениями $q''q$, $(q')^2$, $q'q^2$ получим $(q''q)((2+n)+n) = ((q')^2)(1+n)^2 = (q'q^2)(1+n+2n)$, тогда $n = 1$. Рассмотрим новую независимую переменную в виде $\phi(t) = \tanh(t)$.

Решение данного уравнения можно представить в виде $q(t) = \Phi(\phi) = \sum_{j=0}^{n} a_j\phi^j = a_0 + a_1\phi$, что приводит к изменению переменной

$\dfrac{dq}{dt} = (1 - \phi^2)\dfrac{d\Phi}{d\phi}$, $\dfrac{d^2q}{dt^2} = -2(1 - \phi^2)\phi\dfrac{d\Phi}{d\phi} + (1 - \phi^2)^2\dfrac{d^2\Phi}{d\phi^2}$, $\dfrac{d\Phi}{d\phi} = a_1$, $\dfrac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$.

Подставим эти выражения в уравнение , тогда групперируя члены с одинаковыми степенями ϕ получим многочлен от ϕ , приравняем каждый коэффициент этого полинома к 0 получим переопределенную систему алгебраических уравнений $\left(-2(1 - \phi^2)\phi a_1 + (1 - \phi^2)^2 0\right)(a_0 + a_1\phi) - \left((1 - \phi^2)a_1\right)^2 - \lambda(1 - \phi^2)a_1(a_0 + a_1\phi)^2 = 0$,

$2\phi a_0 + 2\phi^2 a_1 + a_1 - a_1\phi^2 + \lambda a_0^2 + 2\lambda a_0 a_1\phi + \lambda a_1^2\phi^2 = 0$, $\begin{cases} a_1 + \lambda a_0^2 = 0 \\ 2a_0 + 2\lambda a_0 a_1 = 0 \\ 2a_1 - a_1 + \lambda a_1^2 = 0 \end{cases}$. Решение этой системы $a_0 = \pm\dfrac{1}{\lambda}$, $a_1 = -\dfrac{1}{\lambda}$, тогда $q(t)=\Phi(\phi)=-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\tanh t$, $q(t)=\Phi(\phi)=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\tanh t$. Проверка . $q=\frac{1}{\lambda}(1-\tanh t)$, $q'=\frac{1}{\lambda\cosh^2 t}$, $q''=\frac{2\sinh t}{\lambda\cosh^3 t}$,

$$\frac{2\sinh t}{\lambda\cosh^3 t}\frac{1}{\lambda}(1-\tanh t)-\left(\frac{-1}{\lambda\cosh^2 t}\right)^2-\lambda\left(\frac{-1}{\lambda\cosh^2 t}\right)\left(\frac{1}{\lambda}(1-\tanh t)\right)^2=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\left(\frac{2\sinh t}{\cosh t}(1-\tanh t)-\frac{1}{\cosh^2 t}+(1-\tanh t)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\left(\frac{2\sinh t}{\cosh t}-\frac{2\sinh^2 t}{\cosh^2 t}-\frac{1}{\cosh^2 t}+1-\frac{2\sinh t}{\cosh t}+\tanh^2 t\right)=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\left(-\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}-\frac{1}{\cosh^2 t}+1\right)=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\frac{\cosh^2 t-\sinh^2 t-1}{\cosh^2 t}=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\frac{1-1}{\cosh^2 t}=0 .$$

$q=-\frac{1}{\lambda}(1+\tanh t)$, $q'=-\frac{1}{\lambda\cosh^2 t}$, $q''=\frac{2\sinh t}{\lambda\cosh^3 t}$, $\frac{2\sinh t}{\lambda\cosh^3 t}\left(-\frac{1}{\lambda}(1+\tanh t)\right)-\left(\frac{1}{\lambda\cosh^2 t}\right)^2-\lambda\left(-\frac{1}{\lambda\cosh^2 t}\right)\left(-\frac{1}{\lambda}(1+\tanh t)\right)^2=$

$$=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\left(\frac{-2\sinh t}{\cosh t}(1+\tanh t)-\frac{1}{\cosh^2 t}+(1+\tanh t)^2\right)=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\left(\frac{-2\sinh t}{\cosh t}-\frac{2\sinh^2 t}{\cosh^2 t}-\frac{1}{\cosh^2 t}+1+\frac{2\sinh t}{\cosh t}+\frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t}\right)=\frac{1}{\lambda^2\cosh^2 t}\frac{-\sinh^2 t-1+\cosh^2 t}{\cosh^2 t}=0 .$$

Это дает $y(x)=-\frac{1}{\lambda}(1+\tanh(\ln x))=-\frac{1}{\lambda}\frac{2x^2}{x^2+1}$, собственные функции $y(x)=\frac{1}{\lambda}(1-\tanh(\ln x))=\frac{1}{\lambda}\frac{2}{x^2+1}$. Найдем L интеграл от этой функции $L\int_1^R y(x)\,dx=e^{\int_1^R\frac{y(x)}{x}dx}$,

$\int_1^R\frac{y(x)}{x}dx=\int_1^R\frac{2}{x(x^2+1)}dx=\ln\frac{2R^2}{R^2+1}$, поэтому $L\int_1^R y(x)\,dx=e^{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2R^2}{R^2+1}}=\left(\frac{2R^2}{R^2+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$. Отсюда $y(x)=-\frac{1}{\lambda}(1+\tanh(\ln x))=-\frac{1}{\lambda}\frac{2x^2}{x^2+1}$, собственные функции

$y(x)=\frac{1}{\lambda}(1-\tanh(\ln x))=\frac{1}{\lambda}\frac{2}{x^2+1}$. Найдем L от этой функции $L\int_1^R y(x)\,dx=e^{\int_1^R\frac{y(x)}{x}dx}$, $\int_1^R\frac{y(x)}{x}dx=\int_1^R\frac{2}{x(x^2+1)}dx=\ln\frac{2R^2}{R^2+1}$, откуда $L\int_1^R y(x)\,dx=e^{\frac{1}{\lambda}\ln\frac{2R^2}{R^2+1}}=\left(\frac{2R^2}{R^2+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$.

Пример . $L''y+L'y+1=0\Leftrightarrow 1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}+\frac{xy'}{y}+1=0$ $\frac{xy''}{y'}=-2$. Пусть $y'=g(x)\Rightarrow y''=g'(x)$ $\frac{xg'}{g}=-2\Rightarrow\frac{dg}{dx}=-\frac{2g}{x}$ $\frac{dg}{g}=-2\frac{dx}{x}$

$\ln|g(x)|=-2\ln|c_1x|\Rightarrow g(x)=c_1x^{-2}$ $y'=c_1x^{-2}\Rightarrow y=\frac{c_1}{x}+c_2$.

Другое решение . Найдем L интеграл от двух частей данного уравнения $L\int(L''y+L'y+1)\,dx=1$, тогда $\left(L\int L''ydx\right)\cdot\left(L\int L'ydx\right)\cdot\left(L\int dx\right)=1$, тогда $c_1\cdot L'y\cdot y\cdot x=1$, $L'y=\frac{c_1}{xy}$,

поэтому $\frac{xy'}{y}=\frac{c_1}{xy}$, $y'=c_1x^{-2}\Rightarrow y=\frac{c_1}{x}+c_2$.

Пример . $L''y + rL'y = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y} + r\frac{xy'}{y} = 0$. Пусть $y = e^{g(x)} \Rightarrow y' = e^{g(x)}g'(x)$ $y'' = e^{g(x)}\left(g'(x)\right)^2 + e^{g(x)}g''(x)$,$1 + \frac{xe^{g(x)}\left(\left(g'(x)\right)^2 + g''(x)\right)}{e^{g(x)}g'(x)} + (r-1)\frac{xe^{g(x)}g'(x)}{e^{g(x)}} = 0$,

$1 + \frac{x\left(\left(g'(x)\right)^2 + g''(x)\right)}{g'(x)} + (r-1)xg'(x) = 0$, $1 + rxg'(x) + \frac{xg''(x)}{g'(x)} = 0$, $g'(x) = u(x) \Rightarrow g''(x) = u'(x)$, $1 + rxu + \frac{xu'}{u} = 0$, $u + rxu^2 + xu' = 0$, $u' + ru^2 + \frac{u}{x} = 0$, $u(x) = \alpha(x)\beta(x)$,

$\alpha'\beta + \beta'\alpha + r\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{x} = 0$, $\alpha'\beta + \alpha\left(\beta' + \frac{\beta}{x}\right) + a\alpha^2\beta^2 = 0$, $\beta' + \frac{\beta}{x} = 0$ $\frac{d\beta}{dx} = -\frac{\beta}{x}$, $\frac{d\beta}{\beta} = -\frac{dx}{x}$, $\ln\beta = -\ln x$, $\beta = \frac{1}{x}$, тогда $\frac{\alpha'}{x} + r\alpha^2\frac{1}{x^2} = 0$, $\alpha' + \frac{r\alpha^2}{x} = 0$, решение этого уравнения $\alpha(x) = \frac{1}{r\ln x + c}$, тогда $u(x) = \frac{1}{x(r\ln x + c)}$, $g'(x) = \frac{1}{x(r\ln x + c)}$, $g(x) = \int\frac{dx}{x(r\ln x + c)} = \frac{1}{r}\ln(\ln x + c) + c_1$, поэтому $y(x) = e^{\frac{1}{r}\ln(\ln x + c) + c_1} = (\ln x + c)^{\frac{1}{r}}c_1$.

Другое решение . Найдем L интеграл от двух частей данного уравнения $L\int(L''y + rL'y)\,dx = 1$, отсюда $\left(L\int L''ydx\right)\cdot\left(L\int aL'ydx\right) = 1$, откуда $L'y \cdot y^r c = 1$, значит $\frac{xy'}{y} = \frac{c}{y^r}$,

$y'y^{r-1} = \frac{c}{x}$. Решение этого уравнения $y(x) = (\ln x + c)^{\frac{1}{r}}c_1$.

Пример . $L''y + rL'y = R \Leftrightarrow 1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y} + r\frac{xy'}{y} = R$. Пусть $y = e^{g(x)} \Rightarrow y' = e^{g(x)}g'(x)$ $y'' = e^{g(x)}\left(g'(x)\right)^2 + e^{g(x)}g''(x)$,

$1 + \frac{xe^{g(x)}\left(\left(g'(x)\right)^2 + g''(x)\right)}{e^{g(x)}g'(x)} + (r-1)\frac{xe^{g(x)}g'(x)}{e^{g(x)}} = R$, $1 + \frac{x\left(\left(g'(x)\right)^2 + g''(x)\right)}{g'(x)} + (r-1)xg'(x) = R$, $1 + rxg'(x) + \frac{xg''(x)}{g'(x)} = R$,

$g'(x) = u(x) \Rightarrow g''(x) = u'(x)$, $1 + rxu + \frac{xu'}{u} = R$, $u + rxu^2 + xu' - Ru = 0$, $u' + ru^2 + \frac{u}{x}(1-R) = 0$, $u(x) = \alpha(x)\beta(x)$,

$\alpha'\beta + \beta'\alpha + r\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha\beta}{x}(1-R) = 0$, $\alpha'\beta + \alpha\left(\beta' + \frac{\beta}{x}(1-R)\right) + r\alpha^2\beta^2 = 0$, $\beta' + \frac{\beta}{x}(1-R) = 0$ $\frac{d\beta}{dx} = \frac{\beta}{x}(R-1)$,

$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{dx}{x}(R-1)$, $\ln\beta = (R-1)\ln x$, $\beta = x^{R-1} \Rightarrow \alpha'\beta + r\alpha^2\beta^2 = 0$, $\alpha' + r\alpha^2\beta = 0$, $\alpha' + r\alpha^2x^{R-1} = 0$, $\frac{d\alpha}{dx} = -r\alpha^2x^{R-1}$,$\frac{d\alpha}{\alpha^2} = -rx^{R-1}dx$, $-\alpha^{-1} = -r\frac{x^R}{R} + c$, $\frac{1}{\alpha} = r\frac{x^R}{R} + c$,

$\alpha = \dfrac{1}{r\dfrac{x^R}{R}+c} \Rightarrow u = \dfrac{x^{R-1}}{r\dfrac{x^R}{R}+c}$, $g'(x) = \dfrac{x^{R-1}}{r\dfrac{x^R}{R}+c} = \dfrac{Rx^{R-1}}{rx^R+c} \Rightarrow g(x) = \int \dfrac{Rx^{R-1}dx}{rx^R+c} = \int \dfrac{dx^R}{rx^R+c} = \dfrac{1}{r}\ln\left(rx^R+c\right)+c_1 = \ln\left(rx^R+c\right)^{\frac{1}{r}}+c_1 \Rightarrow y = e^{\ln\left(rx^R+c\right)^{\frac{1}{r}}+c_1} = c_1\left(rx^R+c\right)^{\frac{1}{r}} = \left(c_1x^R+c\right)^{\frac{1}{r}}$.

Пусть $r=2$, $R=2$, тогда $y=\sqrt{c_1x^2+c}$. Пусть $y(1)=1$, $y'(1)=2$, тогда $c=-1$, $c_1=2$, $y=\sqrt{2x^2-1}$.

Другое решение . Найдем L интеграл от двух частей данного уравнения $L\int\left(L''y+rL'y\right)dx = c_1x^R$, $\left(L\int L''ydx\right)\cdot\left(L\int rL'ydx\right) = c_1x^R$, поэтому $L'y\cdot y^r = c_1x^R$, отсюда $\dfrac{xy'}{y}y^r = c_1x^R$

$y'y^{r-1} = c_1x^{R-1}$. Решение этого уравнения $y=\left(c_1x^R+c\right)^{\frac{1}{r}}$.

Пример $L''y(t)+2L'y(t)+1=0$, откуда $\dfrac{ty''}{y'}+\dfrac{ty'}{y}+2=0$, тогда $y=c_1\left(\dfrac{1}{t}+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$. Пусть $y(1)=1$, $y'(1)=-\dfrac{1}{2}$, тогда $1=c_1\left(1+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$, $y'=c_1\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right) = \dfrac{-c_1}{2t^2}\left(\dfrac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}$,

$-\dfrac{1}{2} = \dfrac{-c_1}{2}\left(1+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}$, значит найдем $c_1=1, c_2=0$ поэтому $y(t)=\dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$.

Напишем это уравнение в виде системы $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = x(t) \\ \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x^2(t)}{y} - \dfrac{2x(t)}{t} \end{cases}$, поскольку решение уравнения найдено $y(t)=c_1\left(\dfrac{1}{t}+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$ существует также решение системы

$x(t)=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{c_1}{2}\left(\dfrac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)$, начальные условия дифференциального уравнения $y(1)=1, x(1)=-\dfrac{1}{2}$, then $1=c_1\left(1+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$, $-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{c_1}{2}\left(1+c_2\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow c_1=1, c_2=0$,

thus $y(t)=\dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, x(t)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$.

Это не автономная система дифференциальных уравнений , тогда определим новую функцию $z(t)=t \Rightarrow \frac{dz}{dt}=1$, получим $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-\frac{-x^2(t)}{y(t)}-\frac{2x(t)}{z(t)} \\ \frac{dy}{dt}=x(t)+0y(t)+0z(t) \\ \frac{dz}{dt}=1+0x(t) \end{cases}$

Пример . $L''y(t)+aL'y(t)+1=0$, откуда $\frac{ty''}{y'}+(a-1)\frac{ty'}{y}+2=0$. Пусть $a=2$, тогда $y=c_1\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$ $y(1)=1, y'(1)=-\frac{1}{2}$,

тогда $1=c_1(1+c_2)^{\frac{1}{2}}$, $y'=c_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{-c_1}{2t^2}\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}=\frac{-c_1}{2}(1+c_2)^{-\frac{1}{2}}$, значит найдем $c_1=1, c_2=0$ поэтому $y(t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$.

Напишем это уравнение в виде системы $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=x(t) \\ \frac{dx}{dt}=-\frac{x^2(t)}{y}-\frac{2x(t)}{t} \end{cases}$, поскольку решение уравнения найдено $y(t)=c_1\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$ существует также

Пример . $L^{(n)}y(x)+r_{n-1}L^{(n-1)}y(x)+..+r_1L'y(x)+g(x)=0$. Порядок этого уравнения можно понизить . Найдем L интеграл от двух частей данного уравнения $L\int\left(L^{(n)}y(x)+r_{n-1}L^{(n-1)}y(x)+..+r_1L'y(x)+g(x)\right)dx=1$, тогда $\left(L\int L^{(n)}y(x)dx\right)\cdot\left(L\int r_{n-1}L^{(n-1)}y(x)\,dx\right)\cdot..\cdot\left(L\int r_1L'y(x)\,dx\right)\cdot\left(L\int g(x)dx\right)=1$,

тогда $L^{(n-1)}y(x)\cdot\left(L^{(n-2)}y(x)\right)^{r_{n-1}}\cdot..\cdot\left(y(x)\right)^{r_1}\cdot L\int g(x)\,dx=1$.

Пример . $L^{(n)}y = f\left(L^{(n-1)}y, .., L'y, x\right)$. Порядок этого уравнения можно понизить , если сделать подстановку $L'y(x) = u(x)$, откуда $L''y(x) = L'u(x)$, .. , $L^{(n)}y(x) = L^{(n-1)}u(x)$, значит получим уравнение $L^{(n-1)}u = f\left(L^{(n-2)}u, .., u, x\right)$.

$L''y + 2L'y = 2$, $\dfrac{xy''}{y'} + \dfrac{xy'}{y} - 1 = 0$. Пусть $L'y = u$, тогда $L''y = L'u$, $L'u + 2u = 2$, $\dfrac{xu'}{u} + 2u = 2$, $xu' = 2u - 2u^2$, $\dfrac{u'}{2u(1-u)} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{du}{u(1-u)} = 2\dfrac{dx}{x}$,

$\int\left(\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{1-u}\right)du = 2\int\dfrac{dx}{x}$, $\ln u + \ln(1-u) = 2\ln xc_1$, $u = \dfrac{x^2c_1}{x^2c_1 + 1}$, $\dfrac{xy'}{y} = \dfrac{x^2c_1}{x^2c_1 + 1}$, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{xc_1}{x^2c_1 + 1}$, $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{xc_1}{x^2c_1 + 1}dx$, $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2c_1 + c\right)$, $y = \sqrt{x^2c_1 + c}$.

Пусть $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$, тогда $c = -1$, $c_1 = 2$, $y = \sqrt{2x^2 - 1}$.

Пример . $L''y + a_1L'y + a_2y = R$. Пусть $L'y = u(y) \Rightarrow L''y = L'_y u(y) L'_x y(x) = L'u(y)u(y)$, отсюда $L'u(y)u(y) + a_1u + a_2y = R$, $\dfrac{yu'}{u}u + a_1u + a_2y = R$, $yu' + a_1u + a_2y = R$,

$u' + a_1\dfrac{u}{y} + a_2 - \dfrac{R}{y} = 0$, $u(y) = \alpha(y)\beta(y) \Rightarrow \alpha'\beta + \beta'\alpha + a_1\dfrac{\alpha\beta}{y} + a_2 - \dfrac{R}{y} = 0$, $\alpha'\beta + \alpha\left(\beta' + a_1\dfrac{\beta}{y}\right) + a_2 - \dfrac{R}{y} = 0$, $\dfrac{d\beta}{dy} = -a_1\dfrac{\beta}{y} \Rightarrow \ln\beta = \ln y^{-a_1}$ $\beta = y^{-a_1} \Rightarrow \dfrac{\alpha'}{y^{a_1}} + a_2 - \dfrac{R}{y} = 0$,

$\alpha' = Ry^{a_1-1} - a_2y^{a_1}$, $\dfrac{d\alpha}{dy} = Ry^{a_1-1} - a_2y^{a_1}$, $\alpha = \int\left(Ry^{a_1-1} - a_2y^{a_1}\right)dy \Rightarrow \alpha = R\dfrac{y^{a_1}}{a_1} - a_2\dfrac{y^{a_1+1}}{a_1+1} + c \Rightarrow u = \dfrac{R}{a_1} - a_2\dfrac{y}{a_1+1} + \dfrac{c}{y^{a_1}}$, $L'y = \dfrac{R}{a_1} - a_2\dfrac{y}{a_1+1} + \dfrac{c}{y^{a_1}} \Rightarrow \dfrac{xy'}{y} = \dfrac{R}{a_1} - a_2\dfrac{y}{a_1+1} + \dfrac{c}{y^{a_1}}$,

$y' = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{Ry}{a_1} - \dfrac{a_2}{a_1+1}y^2 + \dfrac{c}{y^{a_1-1}}\right)$ $\dfrac{dy}{\dfrac{Ry}{a_1} - \dfrac{a_2}{a_1+1}y^2 + \dfrac{c}{y^{a_1-1}}} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int\dfrac{dy}{\dfrac{Ry}{a_1} - \dfrac{a_2}{a_1+1}y^2 + \dfrac{c}{y^{a_1-1}}} = \ln xc_1$ $\Rightarrow$ $\int\dfrac{a_1(a_1+1)y^{a_1-1}dy}{(a_1+1)Ry^{a_1} - a_1a_2y^{a_1+1} + c} = \ln xc_1$.

$\frac{d\beta}{\beta}=\frac{dx}{x}(R-1)$, $\ln\beta=(R-1)\ln x$, $\beta=x^{R-1}\Rightarrow\alpha'\beta+a\alpha^2\beta^2=0$, $\alpha'+a\alpha^2\beta=0$, $\alpha'+a\alpha^2x^{R-1}=0$, $\frac{d\alpha}{dx}=-a\alpha^2x^{R-1}$, $\frac{d\alpha}{\alpha^2}=-ax^{R-1}dx$, $-\alpha^{-1}=-a\frac{x^R}{R}+c$, $\frac{1}{\alpha}=a\frac{x^R}{R}+c$,

$\alpha=\frac{1}{a\frac{x^R}{R}+c}\Rightarrow u=\frac{x^{R-1}}{a\frac{x^R}{R}+c}$, $g'(x)=\frac{x^{R-1}}{a\frac{x^R}{R}+c}=\frac{Rx^{R-1}}{ax^R+c}\Rightarrow g(x)=\int\frac{Rx^{R-1}dx}{ax^R+c}=\int\frac{dx^R}{ax^R+c}=\frac{1}{a}\ln\left(ax^R+c\right)+c_1=\ln\left(ax^R+c\right)^{\frac{1}{a}}+c_1\Rightarrow y=e^{\ln\left(ax^R+c\right)^{\frac{1}{a}}+c_1}=c_1\left(ax^R+c\right)^{\frac{1}{a}}=\left(c_1x^R+c\right)^{\frac{1}{a}}$.

Пусть $a=2$, $R=2$, тогда $y=\sqrt{c_1x^2+c}$. Пусть $y(1)=1$, $y'(1)=2$, тогда $c=-1$, $c_1=2$, $y=\sqrt{2x^2-1}$.

Пример . $L^{(n)}y=f\left(L^{(n-1)}y,..,L'y,x\right)$. Порядок этого уравнения можно понизить , если сделать подстановку $L'y(x)=u(x)$, откуда $L''y(x)=L'u(x)$, .. , $L^{(n)}y(x)=L^{(n-1)}u(x)$, значит получим уравнение $L^{(n-1)}u=f\left(L^{(n-2)}u,..,u,x\right)$.

$L''y+2L'y=2$, $\frac{xy''}{y'}+\frac{xy'}{y}-1=0$. Пусть $L'y=u$, тогда $L''y=L'u$, $L'u+2u=2$, $\frac{xu'}{u}+2u=2$, $xu'=2u-2u^2$, $\frac{u'}{2u(1-u)}=\frac{1}{x}$, $\frac{du}{u(1-u)}=2\frac{dx}{x}$,

$\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du=2\int\frac{dx}{x}$, $\ln u+\ln(1-u)=2\ln xc_1$, $u=\frac{x^2c_1}{x^2c_1+1}$, $\frac{xy'}{y}=\frac{x^2c_1}{x^2c_1+1}$, $\frac{y'}{y}=\frac{xc_1}{x^2c_1+1}$, $\frac{dy}{y}=\frac{xc_1}{x^2c_1+1}dx$, $\ln y=\frac{1}{2}\ln\left(x^2c_1+c\right)$, $y=\sqrt{x^2c_1+c}$.

Пусть $y(1)=1$, $y'(1)=2$, тогда $c=-1$, $c_1=2$, $y=\sqrt{2x^2-1}$.

Пример . $L''y+a_1L'y+a_2y=R$. Пусть $L'y=u(y)\Rightarrow L''y=L'_yu(y)L'_xy(x)=L'u(y)u(y)$, отсюда $L'u(y)u(y)+a_1u+a_2y=R$, $\frac{yu'}{u}u+a_1u+a_2y=R$, $yu'+a_1u+a_2y=R$,

$u'+a_1\frac{u}{y}+a_2-\frac{R}{y}=0$, $u(y)=\alpha(y)\beta(y)\Rightarrow\alpha'\beta+\beta'\alpha+a_1\frac{\alpha\beta}{y}+a_2-\frac{R}{y}=0$, $\alpha'\beta+\alpha\left(\beta'+a_1\frac{\beta}{y}\right)+a_2-\frac{R}{y}=0$, $\frac{d\beta}{dy}=-a_1\frac{\beta}{y}\Rightarrow\ln\beta=\ln y^{-a_1}$ $\beta=y^{-a_1}\Rightarrow\frac{\alpha'}{y^{a_1}}+a_2-\frac{R}{y}=0$,

$\alpha'=Ry^{a_1-1}-a_2y^{a_1}$, $\frac{d\alpha}{dy}=Ry^{a_1-1}-a_2y^{a_1}$, $\alpha=\int\left(Ry^{a_1-1}-a_2y^{a_1}\right)dy\Rightarrow\alpha=R\frac{y^{a_1}}{a_1}-a_2\frac{y^{a_1+1}}{a_1+1}+c\Rightarrow u=\frac{R}{a_1}-a_2\frac{y}{a_1+1}+\frac{c}{y^{a_1}}$, $L'y=\frac{R}{a_1}-a_2\frac{y}{a_1+1}+\frac{c}{y^{a_1}}\Rightarrow\frac{xy'}{y}=\frac{R}{a_1}-a_2\frac{y}{a_1+1}+\frac{c}{y^{a_1}}$,

$y'=\frac{1}{x}\left(\frac{Ry}{a_1}-\frac{a_2}{a_1+1}y^2+\frac{c}{y^{a_1-1}}\right)$ $\frac{dy}{\frac{Ry}{a_1}-\frac{a_2}{a_1+1}y^2+\frac{c}{y^{a_1-1}}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dy}{\frac{Ry}{a_1}-\frac{a_2}{a_1+1}y^2+\frac{c}{y^{a_1-1}}}=\ln xc_1$ $\Rightarrow$ $\int\frac{a_1(a_1+1)y^{a_1-1}dy}{(a_1+1)Ry^{a_1}-a_1a_2y^{a_1+1}+c}=\ln xc_1$.

Пусть $R=0\Rightarrow-(a_1+1)\int\frac{y^{a_1-1}}{a_2y^{a_1+1}+c}dy=\ln xc_1$. Пусть $a_1=1\ \ a_2=2$, тогда $\frac{xy''}{y'}+2y=-1$, $-\int\frac{dy}{y^2+c}=\ln xc_1\Rightarrow y=c\tan(-c\ln x+c_1)$

Можно проверить подстановкой что функция $y=c\tan(-c\ln x+c_1)$ удовлетворяет уравнению . Пусть $y(1)=1$, $y'(1)=-2$ тогда

$c=\pm1$, $c_1=\pm\frac{\pi}{4}$, $y=\tan\left(-\ln x+\frac{\pi}{4}\right)$, $y=-\tan\left(\ln x-\frac{\pi}{4}\right)$, это уравнение имеет решение $y=c\tanh(c\ln x+c_1)$, можно проверить подстановкой .

Пусть $y(1)=1$, $y'(1)=4$, $c=0.48121$, $c_1=0.48121$, $y=2.23608\tanh(2.23608\ln x+0.48121)$.

Пусть $y'(1)<0$, тогда $y=c\tan(-c\ln x+c_1)$, потому что $y'=\frac{-c^2}{x\cos^2(-c\ln x+c_1)}<0$.

Пусть $y'(1)>0$, thus $y=c\tanh(c\ln x+c_1)$, потому что $y'=\frac{c^2}{x\cosh^2(c\ln x+c_1)}>0$.

Это уравнение имеет частное решение $y=\frac{1}{\ln x+c}$, можно проверить подстановкой . Пусть $y(1)=1$, итак $c=1$, $y=\frac{1}{\ln x+1}$.

Пусть $a_1=a$, $a_2=0$, $y^{a_1}=t\Rightarrow\int\frac{(a+1)dt}{(a+1)Rt+c}=\ln xc_1$ $\int\frac{dt}{Rt+c}=\ln xc_1\Rightarrow\frac{1}{R}\ln(Rt+c)=\ln xc_1$, $Rt+c=(xc_1)^R\Rightarrow t=c_1x^R+c$, $y^a=c_1x^R+c\Rightarrow$

$y=(c_1x^R+c)^{\frac{1}{a}}$, $R=-1$ $y=\left(\frac{c_1}{x}+c\right)^{\frac{1}{a}}$, $R=1$ $y=(c_1x+c)^{\frac{1}{a}}$. Пусть $a_1=-1\Rightarrow\beta=y^{-a_1}=y$, $\alpha'y+a_2-\frac{R}{y}=0$ $\frac{d\alpha}{dy}=\frac{R}{y^2}-\frac{a_2}{y}\Rightarrow\alpha=\int\left(\frac{R}{y^2}-\frac{a_2}{y}\right)dy=$

$=-\frac{R}{y}-a_2\ln y+c$, $u=\alpha\beta=-R-a_2y\ln y+cy$, $\frac{xy'}{y}=-R-a_2y\ln y+cy\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(-R-a_2y\ln y+cy)\Rightarrow-\int\frac{dy}{y(R+a_2y\ln y+cy)}=\ln xc$.

Пример . $L''y+a_1L'y+a_2y=R$, используя метод G производной получим $L'y=\frac{xy'}{y}$ $G'y=y'\mu(y)\varphi(x)$, $\varphi(x)=x$, $\mu(y)=\frac{1}{y}$,

$t=h(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln x$, $x=e^t$, $y=y(x(t))\Rightarrow y_x'=\frac{y_t'}{e^t}$, $L_x'y=\frac{xy_x'}{y}=\frac{e^t\frac{y_t'}{e^t}}{y}=\frac{y_t'}{y}$, $y_{xx}''=\frac{y_{tt}''-y_t'}{e^{2t}}$, $L_{xx}''y=1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}=1+\frac{e^t\frac{y_{tt}''-y_t'}{e^{2t}}}{\frac{y_t'}{e^t}}-\frac{e^t\frac{y_t'}{e^t}}{y}=\frac{y_{tt}''}{y_t'}-\frac{y_t'}{y}$.

Откуда $\frac{y_{tt}''}{y_t'}-\frac{y_t'}{y}+a_1\frac{y_t'}{y}+a_2y=R$, $\frac{y_{tt}''}{y_t'}+(a_1-1)\frac{y_t'}{y}+a_2y=R$. Пусть $y_t'(t)=v(y)$, тогда $y_{tt}''=v'(y)\,y_t'(t)=v'(y)\,v(y)$, тогда $v'+(a_1-1)\frac{v}{y}+a_2y=R$, $v(y)=\alpha(y)\beta(y)\Rightarrow$

$v'=\alpha'\beta+\beta'\alpha$, $\alpha'\beta+\beta'\alpha+(a_1-1)\frac{\alpha\beta}{y}+a_2y=R$, $\alpha'\beta+\alpha\left(\beta'+(a_1-1)\frac{\beta}{y}\right)+a_2y=R,$ $\beta'+(a_1-1)\frac{\beta}{y}=0$, $\beta'=-(a_1-1)\frac{\beta}{y}$, $\frac{d\beta}{dy}=-\frac{a_1-1}{y}\beta,$ $\frac{d\beta}{\beta}=-\frac{a_1-1}{y}dy$, $\ln|\beta|=-(a_1-1)\ln|y|$,

$\beta=\frac{1}{y^{a_1-1}}\Rightarrow\frac{\alpha'}{y^{a_1-1}}+a_2y=R$, $\alpha'+a_2y^{a_1}=Ry^{a_1-1}$, $\frac{d\alpha}{dy}=Ry^{a_1-1}-a_2y^{a_1}$, $d\alpha=\left(Ry^{a_1-1}-a_2y^{a_1}\right)dy$, $\alpha=\frac{Ry^{a_1}}{a_1}-\frac{a_2y^{a_1+1}}{a_1+1}+c$, значит

$v=\frac{Ry}{a_1}-\frac{a_2y^2}{a_1+1}+\frac{c}{y^{a_1-1}}$, $y'(t)=\frac{Ry}{a_1}-\frac{a_2y^2}{a_1+1}+\frac{c}{y^{a_1-1}}$ $\frac{dy}{dt}=\frac{Ry}{a_1}-\frac{a_2y^2}{a_1+1}+\frac{c}{y^{a_1-1}}$, $\frac{dy}{\frac{Ry}{a_1}-\frac{a_2y^2}{a_1+1}+\frac{c}{y^{a_1-1}}}=dt\Rightarrow\frac{a_1(a_1+1)\,y^{a_1-1}dy}{(a_1+1)Ry^{a_1}-a_1a_2y^{a_1+1}+c}=dt$.

Пример . $L''y+L'y+\lambda y=0$, $1+\frac{xy''}{y'}+\lambda y=0$, начальные условия $y(1)=0$, $y(e)=0$. Решение данного уравнения $-2\int\frac{dy}{\lambda y^2+c}=\ln xc_1$.

Пусть $\lambda<0$, тогда $\frac{1}{\sqrt{c\lambda}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{c}{\lambda}}+y}{\sqrt{\frac{c}{\lambda}}-y}\right|=\ln xc_1$, тогда $y=\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\frac{(xc_1)^{\sqrt{c\lambda}}-1}{(xc_1)^{\sqrt{c\lambda}}+1}$, применяя первое начальное условие получим $\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\frac{(c_1)^{\sqrt{c\lambda}}-1}{(c_1)^{\sqrt{c\lambda}}+1}=0$, поэтому $c_1=1$,

применяя второе начальное условие получим $\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\frac{(ec_1)^{\sqrt{c\lambda}}-1}{(ec_1)^{\sqrt{c\lambda}}+1}=0$, отсюда $c_1=\frac{1}{e}$, это дает что $\lambda<0$ не собственное значение .

Пусть $\lambda>0$, $-2\sqrt{\frac{\lambda}{c}}\arctan\left(y\sqrt{\frac{\lambda}{c}}\right)=\ln xc_1$, значит $y=\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\tan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\ln xc_1\right)$, применяя первое начальное условие найдем

$\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\tan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\ln c_1\right)=0$, тогда $\ln c_1=-2\pi k\sqrt{\frac{\lambda}{c}}$, $c_1=e^{-2\pi k\sqrt{\frac{\lambda}{c}}}$, применяя второе начальное условие найдем $\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\tan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\lambda}}\ln ec_1\right)=0$, тогда

$\ln c_1=-1-2\pi n\sqrt{\frac{\lambda}{c}}$, $c_1=e^{-1-2\pi n\sqrt{\frac{\lambda}{c}}}$, поэтому $-1-2\pi n\sqrt{\frac{\lambda}{c}}=-2\pi k\sqrt{\frac{\lambda}{c}}$, отсюда $\lambda=\frac{c}{4\pi^2(k-n)^2}$ это собственное начальное значение , $c=4\lambda\pi^2(k-n)^2$, $c_1=e^{-1-2\pi n\sqrt{\frac{\lambda}{4\lambda\pi^2(k-n)^2}}}=e^{\frac{k}{n-k}}$.

Пример . $\frac{xy''}{y'}=1$ $xy''=y'$. Пусть $y=f\left(g(x)\right)$ $g(x)=\ln x\Rightarrow$ $y_x'=\frac{f_g'(g)}{x}$, $y_x''=\frac{f_g''(g)-f_g'(g)}{x^2}$, значит $x\frac{f''(g)-f'(g)}{x^2}=\frac{f'(g)}{x}\Rightarrow$

$f''(g)-f'(g)=f'(g)$ $f''(g)=2f'(g)$. Пусть $f'(g)=u(g)\Rightarrow f''(g)=u'(g)$, поэтому $u'(g)=2u(g)$, $\frac{du}{dg}=2u(g)\Rightarrow\frac{du}{u}=2dg$, отсюда

$\ln u=2g+c\Rightarrow u(g)=e^{2g}c$, $f'(g)=e^{2g}c$, $\frac{df}{dg}=e^{2g}c$, $df=e^{2g}cdg\Rightarrow f(g)=c\int e^{2g}dg=c\left(\frac{e^{2g}}{2}+c_1\right)=\frac{e^{2g}}{2}c+c_1$, откуда $f(x)=\frac{e^{2\ln x}}{2}c+c_1=\frac{x^2}{2}c+c_1$.

Другое решение $\frac{xy''}{y'}=1$ $xy''=y'$. Пусть $y'(x)=u(x)\Rightarrow y''(x)=u'(x)$, откуда $xu'(x)=u(x)$, $\frac{du}{dx}=u(x)$, $\frac{d}{u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow$

$\ln u=\ln x+c$, $u=xc$, значит $y'(x)=xc$, $\frac{dy}{dx}=xc$, $dy=xcdx$, $y=\frac{x^2}{2}c+c_1$.

Другое решение $xy''=y'$. Пусть $x=e^t$, $t=\ln x$, $y=y\left(x(t)\right)\Rightarrow y_t'=y_x'x_t'$, $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=y_t't_x'$, $y_x'=\frac{y_t'}{e^t}$, $y_t''=\left(y_x'x_t'\right)_t'=y_x''x_t'x_t'+y_x'x_t''=y_x''\left(x_t'\right)^2+y_x'x_t''$,

значит $y_x''=\frac{y_t''-y_x'x_t'}{\left(x_t'\right)^2}=\frac{y_t''-\frac{y_t'}{x_t'}x_t''}{\left(x_t'\right)^2}$, поскольку $x_t'=e^t$ $x_t''=e^t\Rightarrow y_x''=\frac{y_t''-\frac{y_t'}{e^t}e^t}{e^{2t}}=\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}$, $e^t\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}=\frac{y_t'}{e^t}$, $y_t''=2y_t'\Rightarrow y(t)=\frac{e^{2t}}{2}c+c_1$, $y(x)=\frac{e^{2\ln x}}{2}c+c_1=\frac{x^2}{2}c+c_1$.

Пример . $L''y+a_1L'y+a_2y=R(x)\Leftrightarrow\frac{xy''}{y'}+(a_1-1)\frac{xy'}{y}+a_2y=R(x)$ решение найдем в виде $x=e^t$, $t=\ln x\Rightarrow y_x'=\frac{y_t'}{e^t}$ $y_t''=\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}$,

поэтому $1+\frac{e^t\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}}{\frac{y_t'}{e^t}}+(a_1-1)\frac{e^t\frac{y_t'}{e^t}}{y}+a_2y=R\left(e^t\right)\Rightarrow1+\frac{y_t''-y_t'}{y_t'}+(a_1-1)\frac{y_t'}{y}+a_2y=R\left(e^t\right)$, $\frac{y_t''}{y_t'}+(a_1-1)\frac{y_t'}{y}+a_2y=R\left(e^t\right)$, дальше решение аналогичное .

Пример . $\frac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)$, $y=e^{-\int a(x)dx}\left(c+\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right)$.

$L''y+a_1L'y+\sum_{j=1}^{n}b_jy^j=R$, это уравнение аналогично преобразуется к уравнению вида $v'(f)+(a_1-1)\frac{v(f)}{f}+\sum_{j=1}^{n}b_jf^j=R$, где $v(f)=f(g(x))=f(\ln x)$ $f_g'(g)=v(f)\Rightarrow$

$$v(f)=e^{-\int\frac{a_1-1}{f}df}\left(c+\int\left(R-\sum_{j=1}^{n}b_jf^j\right)e^{\int\frac{a_1-1}{f}df}df\right)=\frac{1}{f^{a_1-1}}\left(c+\int\left(R-\sum_{j=1}^{n}b_jf^j\right)f^{a_1-1}df\right)=\frac{1}{f^{a_1-1}}\left(c+R\frac{f^{a_1}}{a_1}-\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{f^{a_1+j}}{a_1+j}\right).$$

Пример $L''y+L'y+xf(y)=1$, $\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}+1+\frac{xy'}{y}+xf(y)=1\Rightarrow\frac{xy''}{y'}+xf(y)=0$, $x\left(\frac{y''}{y'}+f(y)\right)=0$, $\frac{y''}{y'}+f(y)=0$.

Пусть $y'(x)=u(y)\Rightarrow y''(x)=u_y'(y)y_x'(x)=u'(y)u(y)$, $\frac{u'(y)u(y)}{u(y)}+f(y)=0$ $u'(y)+f(y)=0$ Let $f(y)=2y$, отсюда $u'(y)+2y=0$,

$\frac{du}{dy}=-2y$, $du=-2ydy$, $u(y)=-y^2+c\Rightarrow y'(x)=-y^2+c$, $\frac{dy}{dx}=-y^2+c$, $\frac{dy}{y^2-c}=-dx$, $\frac{1}{2\sqrt{c}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{c}}{y+\sqrt{c}}\right|=-x+c_1$.

Пример . $L''y(t)+aL'y(t)+1=0$, откуда $\frac{ty''}{y'}+(a-1)\frac{ty'}{y}+2=0$. Пусть $a=2$, тогда $y=c_1\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$ $y(1)=1, y'(1)=-\frac{1}{2}$,

тогда $1=c_1(1+c_2)^{\frac{1}{2}}$, $y'=c_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{-c_1}{2t^2}\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}$, $-\frac{1}{2}=\frac{-c_1}{2}(1+c_2)^{-\frac{1}{2}}$, значит найдем $c_1=1, c_2=0$ поэтому $y(t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$.

Напишем это уравнение в виде системы $\begin{cases}\frac{dy}{dt}=x(t)\\ \frac{dx}{dt}=-\frac{x^2(t)}{y}-\frac{2x(t)}{t}\end{cases}$, поскольку решение уравнения найдено $y(t)=c_1\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$ существует также решение системы $x(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{c_1}{2}\left(\frac{1}{t}+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)$, начальные условия дифференциального уравнения $y(1)=1, x(1)=-\frac{1}{2}$, тогда $1=c_1\left(1+c_2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$-\frac{1}{2}=-\frac{c_1}{2}\left(1+c_2\right)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow c_1=1, c_2=0$, тогда $y(t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}, x(t)=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$. Это не автономная система дифференциальных уравнений , тогда определим новую функцию

$$z(t)=t\Rightarrow\frac{dz}{dt}=1 \text{ , получим } \begin{cases}\frac{dx}{dt}=-\frac{-x^2(t)}{y(t)}-\frac{2x(t)}{z(t)}\\ \frac{dy}{dt}=x(t)+0y(t)+0z(t)\\ \frac{dz}{dt}=1+0x(t)\end{cases}$$

Пример . $L'''y+a_1L''y+a_2L'y+a_3y=R$. $L''y=1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}$, $L'''y=\frac{x}{1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}}\left(\frac{y'y''+xy'''y'-xy''^2}{y'^2}-\frac{yy'+xyy''-xy'^2}{y^2}\right)$.

Пусть $L_x'y=u(y)\Rightarrow L_x''y=L_y'u(y)L_x'y=L_y'u(y)u(y)$, $L_x'''y=L_y'\left(L_y'yu(y)\right)=L_y'\left(L_y'u(y)\right)+L_y'u(y)L_x'y=L_y''u(y)L_x'y+L_y'u(y)L_x'y=L_y''u(y)u+L_y'u(y)u=u\left(L_y''u(y)+L_y'u(y)\right)$,

значит $u(L''u+L'u)+a_1L'uu+a_2u+a_3y=R\Rightarrow uL''u+(a_1+1)L'uu+a_2u+a_3y=R$. Пусть $y=e^t$ $t=\ln y\Rightarrow u=u(y(t))$ $u_t'=u_y'y_t'$ $u_y'=\frac{u_t'}{y_t'}=u_t't_y'$ $u_y'=\frac{u_t'}{e^t}\Rightarrow$

$u_t''=\left(u_y'y_t'\right)_t'=u_y''y_t'y_t'+u_y'y_t''=u_y''\left(y_t'\right)^2+u_y'y_t''$, тогда $u_y''=\frac{u_t''-u_y'y_t''}{\left(y_t'\right)^2}=\frac{u_t''-\frac{u_t'}{y_t'}y_t''}{\left(y_t'\right)^2}$ $y_t'=e^t$ $y_t''=e^t\Rightarrow u_y''=\frac{u_t''-\frac{u_t'}{e^t}e^t}{e^{2t}}=\frac{u_t''-u_t'}{e^{2t}}$, тогда

$u\left(1+\frac{yu''}{u'}-\frac{yu'}{u}\right)+(a_1+1)\frac{yu'}{u}u+a_2u+a_3y=R\Rightarrow u+y\frac{uu''}{u'}-yu'+(a_1+1)yu'+a_2u+a_3y=R$, $y\frac{uu''}{u'}+a_1yu'+(a_2+1)u+a_3y=R$, подставим эти выражения в уравнение $e^t \frac{u\frac{u_t''-u_t'}{e^{2t}}}{\frac{u_t'}{e^t}} + a_1 e^t \frac{u_t'}{e^t} + (a_2+1)u + a_3 e^t = R$, $\frac{u\left(u_t''-u_t'\right)}{u_t'} + a_1 u_t' + (a_2+1)u + a_3 y = R$.

Пусть $a_3=0 \Rightarrow u\left(\frac{u_t''}{u_t'}-1\right)+a_1u_t'+(a_2+1)u=R$ $\frac{uu_t''}{u_t'}+a_1u_t'+a_2u=R$. Пусть $u_t'(t)=v(u)\Rightarrow u_t''(t)=v_u'(u)u_t'(t)=v'(u)v(u)$, поэтому $u\frac{v'v}{v}+a_1v+a_2u=R$ $uv'+a_1v+a_2u=R$,

$v'+\frac{a_1v}{u}+a_2=\frac{R}{u}$. Пусть $v(u)=\alpha(u)\beta(u)\Rightarrow \alpha'\beta+\beta'\alpha+a_1\frac{\alpha\beta}{u}+a_2=\frac{R}{u}$, $\alpha'\beta+\alpha\left(\beta'+\frac{a_1\beta}{u}\right)+a_2=\frac{R}{u}$, $\beta'+\frac{a_1\beta}{u}=0$, $\frac{d\beta}{du}=-a_1\frac{\beta}{u}$, $\frac{d\beta}{\beta}=-a_1\frac{du}{u}\Rightarrow \ln|\beta|=-a_1\ln|u|$, $\beta=\frac{1}{u^{a_1}}$

тогда $\alpha'\beta+a_2=\frac{R}{u}$. $\alpha'\frac{1}{u^{a_1}}+a_2=\frac{R}{u}\Rightarrow\alpha'=Ru^{a_1-1}-a_2u^{a_1}$, $d\alpha=\left(Ru^{a_1-1}-a_2u^{a_1}\right)du$, тогда $\alpha=\frac{Ru^{a_1}}{a_1}-a_2\frac{u^{a_1+1}}{a_1+1}+c$, $v(u)=\frac{R}{a_1}-\frac{a_2}{a_1+1}u+\frac{c}{u^{a_1}}\Rightarrow$

$u'(t)=\frac{R}{a_1}-\frac{a_2}{a_1+1}u+\frac{c}{u^{a_1}}$ $\frac{du}{\frac{R}{a_1}-\frac{a_2}{a_1+1}u+\frac{c}{u^{a_1}}}=dt\Rightarrow\frac{a_1(a_1+1)u^{a_1}du}{R(a_1+1)u^{a_1}-a_2u^{a_1+1}+c}=dt$, $a_1(a_1+1)\int\frac{u^{a_1}du}{R(a_1+1)u^{a_1}-a_2u^{a_1+1}+c}=t+c_1$ $a_1(a_1+1)F(u(t),c)=$

$=t+c_1$ $t=\ln y$ $a_1(a_1+1)F(u(\ln y),c)=\ln y+c_1$.

Пример. $L'''y+a_1L''y+a_2L'y+a_3y=R$. $L''y=1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}$, $L'''y=\frac{x}{1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}}\left(\frac{y'y''+xy'''y'-xy''^2}{y'^2}-\frac{yy'+xyy''-xy'^2}{y^2}\right)$

Пусть $x=e^t$ $t=\ln x$, отсюда $L'y=\frac{y_t'}{y}$, $L_y''=\frac{y_t''}{y_t'}-\frac{y_t'}{y}$, $y_x'=\frac{y_t'}{e^t}$, $y_x''=\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}$, $y_t'''=\left(y_x''\left(x_t'\right)^2+y_x'x_t''\right)_t'=$

$=y_x'''x_t'\left(x_t'\right)^2+y_x''2x_t'x_t''+y_x''x_t'x_t''+y_x'x_t'''=y_x'''\left(x_t'\right)^3+3y_x''x_t'x_t''+y_x'x_t'''\Rightarrow$

$y_x'''=\frac{y_t'''-3y_x''x_t'x_t''-y_x'x_t'''}{\left(x_t'\right)^3}=\frac{y_t'''-3\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}e^te^t-\frac{y_t'}{e^t}e^t}{e^{3t}}=\frac{y_t'''-3y_t''+3y_t'-y_t'}{e^{3t}}=\frac{y_t'''-3y_t''+2y_t'}{e^{3t}}$, $\frac{y'y''+xy'''y'-x\left(y''\right)^2}{\left(y'\right)^2}=$

$$=\frac{\frac{y_t'}{e^t}\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}+e^t\frac{y_t'''-3y_t''+2y_t'}{e^{3t}}\frac{y_t'}{e^t}-e^t\frac{\left(y_t''-y_t'\right)^2}{e^{4t}}}{\left(\frac{y_t'}{e^t}\right)^2}=\frac{y_t'''y_t'-\left(y_t''\right)^2}{e^t y_t'}\ ,\ \frac{yy'+xyy''-x\left(y'\right)^2}{y^2}=\frac{y\frac{y_t'}{e^t}+e^t y\frac{y_t''-y_t'}{e^{2t}}-e^t\frac{\left(y_t'\right)^2}{e^{2t}}}{y^2}=$$

$$=\frac{yy_t'+yy_t''-yy_t'-\left(y_t'\right)^2}{e^t y^2}=\frac{yy_t''-\left(y_t'\right)^2}{e^t y^2}\Rightarrow L'''y=\frac{\frac{y_t'''y_t'-\left(y_t''\right)^2}{\left(y_t'\right)^2}-\frac{yy_t''-\left(y_t'\right)^2}{y^2}}{\frac{y_t''}{y_t'}-\frac{y_t'}{y}}=\frac{\left(y_t'''y_t'-\left(y_t''\right)^2\right)y}{y_t'\left(y_t''y-\left(y_t'\right)^2\right)}-\frac{y_t'}{y}\ .$$

Пусть $y_t'(t)=u(y)\Rightarrow y_t''(t)=u'(y)\,y_t'(t)=u'(y)\,u(y)$, $y_t'''(t)=\left(u'(y)\,u(y)\right)_t'=u''(y)\,y_t'(t)\,u(y)+u'(y)\,u'(y)\,y_t'(t)=u''(y)\,u(y)^2+u'(y)^2\,u(y)$, откуда

$$L'y=\frac{u(y)}{y}\ ,\ L''y=\frac{u'(y)}{u(y)}-\frac{u(y)}{y}\ ,\ L'''y=\frac{\left(\left(u''(y)\,u(y)^2+u'(y)^2\,u(y)\right)u(y)-u'(y)^2\,u(y)^2\right)y}{u(y)^2\left(u'(y)\,y-u(y)\right)}-\frac{u(y)}{y}=\frac{\left(u''(y)\,u(y)^3+u'(y)^2\,u(y)^2-u'(y)^2\,u(y)^2\right)y}{u(y)^2\left(u'(y)\,y-u(y)\right)}-\frac{u(y)}{y}=\frac{u''(y)\,u(y)\,y}{u'(y)\,y-u(y)}-\frac{u(y)}{y}\ ,$$

тогда $\frac{u''(y)\,u(y)\,y}{u'(y)\,y-u(y)}-\frac{u(y)}{y}+a_1\left(\frac{u'(y)}{u(y)}-\frac{u(y)}{y}\right)+a_2\frac{u(y)}{y}+a_3y=R$. Пусть $a_1=1$ $a_2=2$ $a_3=0\Rightarrow\frac{u''(y)\,u(y)\,y}{u'(y)\,y-u(y)}+\frac{u(y)}{y}=R$.

Пример . $L'''y+a_1L''y+a_2L'y=R$. Let $L'y=u$, тогда $L''y=L'u$, $L'''y=L''u$, получим уравнение $L''u+a_1L'u+a_2u=R$. Пусть $a_1=1$, $a_2=1$, $R=1$, $xu''+u'u=0$,

$\frac{x}{1+\frac{xy''}{y'}-\frac{xy'}{y}}\left(\frac{y'y''+xy'''y'-xy''^2}{y'^2}-\frac{yy'+xyy''-xy'^2}{y^2}\right)+\frac{xy''}{y'}=0$, тогда $2\int\frac{du}{u^2-2u+c}=-\ln\left(xc_1\right)$, $\frac{2\arctan\left(\frac{u-1}{\sqrt{c-1}}\right)}{\sqrt{c-1}}=-\ln\left(xc_1\right)$, $u=\sqrt{c-1}\tan\left(-\frac{\sqrt{c-1}\ln\left(xc_1\right)}{2}\right)+1$,

$\sqrt{c-1}\tan\left(-\frac{\sqrt{c-1}\ln\left(xc_1\right)}{2}\right)+1$, $\frac{dy}{y}=\frac{\sqrt{c-1}\tan\left(-\frac{\sqrt{c-1}\ln\left(xc_1\right)}{2}\right)+1}{x}dx$, $y=xc_2\left(\cos\left(\frac{\ln\left(xc_1\right)\sqrt{c-1}}{2}\right)\right)^{\frac{2}{\sqrt{c-1}}}$. Пусть $u(1)=1$, $u'(1)=-\frac{1}{2}$, значит $c=2$, $c_1=1$, $u=-\tan\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)+1$,

$y=xc_2\left(\cos\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right)^2$. Пусть $y(1)=1$, отсюда $c_2=1$, $y=x\left(\cos\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right)^2$. Уравнение $xu''+u'u=0$ имеет также решение $u=\frac{1}{c_1}\tanh\left(\ln\left(\frac{x}{c_1}\right)\frac{c}{2}\right)+1$,

$\frac{dy}{y}=\frac{\frac{1}{c_1}\tanh\left(\ln\left(\frac{x}{c_1}\right)\frac{c}{2}\right)+1}{x}$, $y=xc_2\left(\cosh\left(\ln\left(\frac{x}{c_1}\right)\frac{c}{2}\right)\right)^{\frac{2}{c}}$. Пусть $u(1)=1$, $u'(1)=\frac{1}{2}$, тогда $c=1$, $c_1=1$, $u=\tanh\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)+1$, $y=xc_2\left(\cosh\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right)^2$.

Пусть $y(1)=1$, тогда $c_2=1$, $y=x\left(\cosh\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)\right)^2$.

Пример . Рассмотрим функцию $y=\frac{a}{b\ln x+c}$, $L'y=L'a-L'(b\ln x+c)=0-\frac{xb\frac{1}{x}}{b\ln x+c}=-\frac{b}{b\ln x+c}$, $L''y=L'b-L'(b\ln x+c)=-\frac{b}{b\ln x+c}\Rightarrow L^{(n)}y=-\frac{b}{b\ln x+c}$.

Рассмотрим функцию $y=b\ln x+c$, $y'=\frac{b}{x}$, $y''=-\frac{b}{x^2}$, $L'y=\frac{xy'}{y}=\frac{x\frac{b}{x}}{b\ln x+c}=\frac{b}{b\ln x+c}$, $L''y=L'b-L'(b\ln x+c)=-\frac{b}{b\ln x+c}$, $L^{(n)}y=-\frac{b}{b\ln x+c}$ $n\geq 2$.

Рассмотрим уравнение $L'''y+a_1L''y+a_2L'y+a_3y=0$ решение этого уравнения найдем в виде $y=\frac{1}{p\ln x+c}\Rightarrow\frac{-p}{p\ln x+c}+a_1\frac{-p}{p\ln x+c}+a_2\frac{-p}{p\ln x+c}+a_3\frac{1}{p\ln x+c}=0$,

поэтому $-\frac{1}{p\ln x+c}(p+a_1p+a_2p-a_3)=0$, $p(1+a_1+a_2)=a_3$, $p=\frac{a_3}{1+a_1+a_2}\Rightarrow y=\frac{1}{\frac{a_3}{1+a_1+a_2}\ln x+c}$ это частное решение данного уравнения .

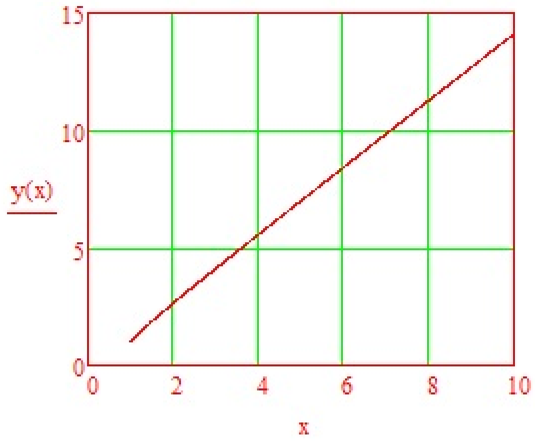
Рассмотрим уравнение $L^{(n)}y+a_1L^{(n-1)}y+.....+a_ny=0$ решение этого уравнения найдем в виде $y=\frac{1}{p\ln x+c}$

получим аналогично $p=\frac{a_n}{1+a_1+a_2+a_3+a_4+.....+a_{n-1}}\Rightarrow y=\frac{1}{\frac{a_n}{1+a_1+a_2+a_3+a_4+.....+a_{n-1}}\ln x+c}$.

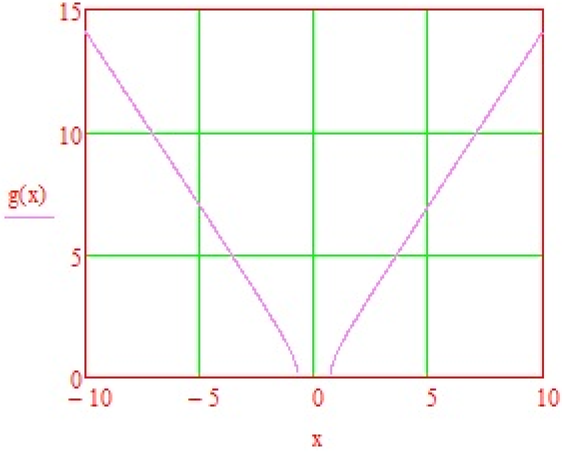
$L''y + aL'y = R \qquad \frac{xy''}{y'} + (a-1)\cdot\frac{xy'}{y} = R - 1 \qquad a = 2 \qquad R = 2$

Given $\quad \frac{x\cdot y''(x)}{y'(x)} + \frac{x\cdot y'(x)}{y(x)} = 1 \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 2 \quad y := \mathrm{Odesolve}(x, 10)$

$y(7) = 9.84877$



$g(x) := \sqrt{2\cdot x^2 - 1} \qquad g(7) = 9.84886$



$L''y + a_1 L'y + a_2 y = R \qquad 1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y} + a_1 \cdot \frac{xy'}{y} + a_2 \cdot y = R \qquad \frac{xy''}{y'} + (a_1 - 1) \cdot \frac{xy'}{y} + a_2 \cdot y = R - 1$

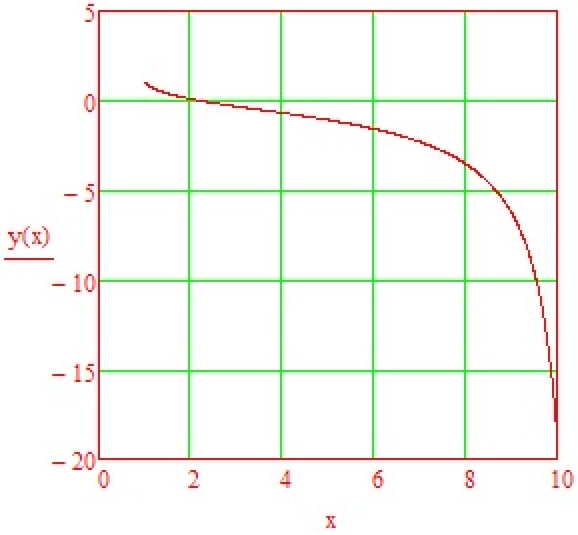
$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad R = 0$

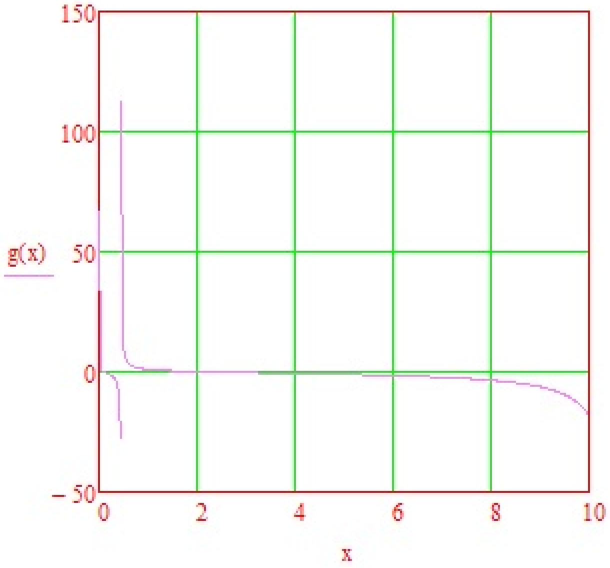
Given $\quad \frac{x \cdot y''(x)}{y'(x)} + 2 \cdot y(x) = -1 \quad y(1) = 1 \quad y'(1) = -2 \quad y := \mathrm{Odesolve}(x, 10)$

$g(x) := \tan\left(-\ln(x) + \frac{\pi}{4}\right)$

$y(7) = -2.29925$

$g(7) = -2.29901$



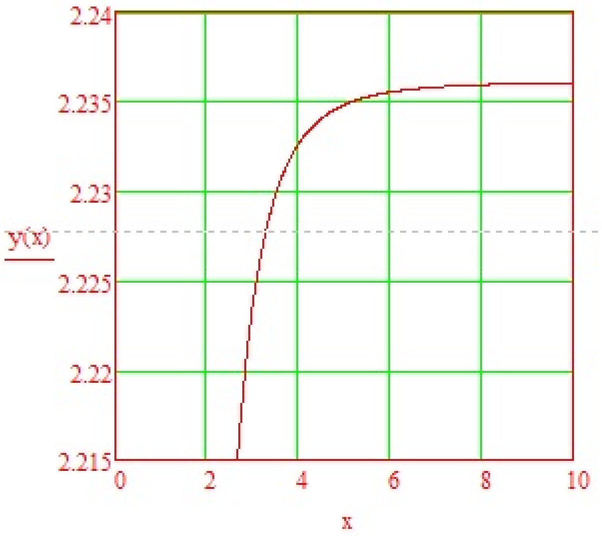


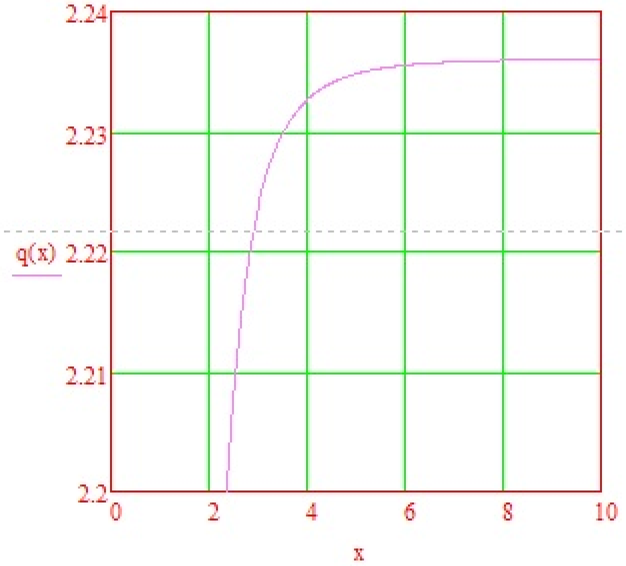
Given $\quad \dfrac{x \cdot y''(x)}{y'(x)} + 2 \cdot y(x) = -1 \qquad y(1) = 1 \quad y'(1) = 4 \qquad y := \mathrm{Odesolve}(x, 10)$

$q(x) := 2.23608 \cdot \tanh(2.23608 \cdot \ln(x) + 0.48121)$

$y(7) = 2.23578$

$q(7) = 2.2358$





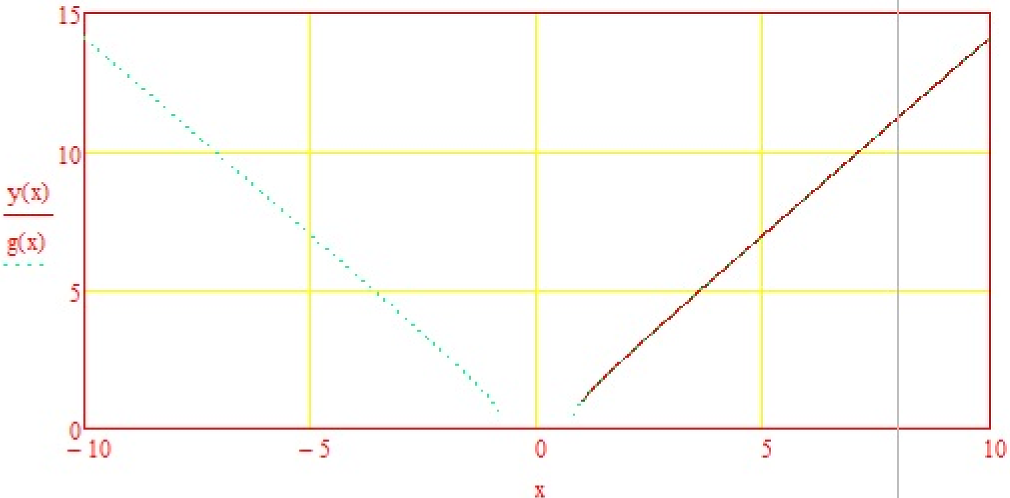
$L''y + 2 \cdot L'y + 2 = 0$

Given $\quad y''(x) + \frac{(y'(x))^2}{y(x)} - \frac{y'(x)}{x} = 0 \qquad y(1) = 1 \qquad y'(1) = 2 \qquad y := \mathrm{Odesolve}(x, 100)$

$g(x) := \sqrt{2x^2 - 1}$

$g(4) = 5.5677644$

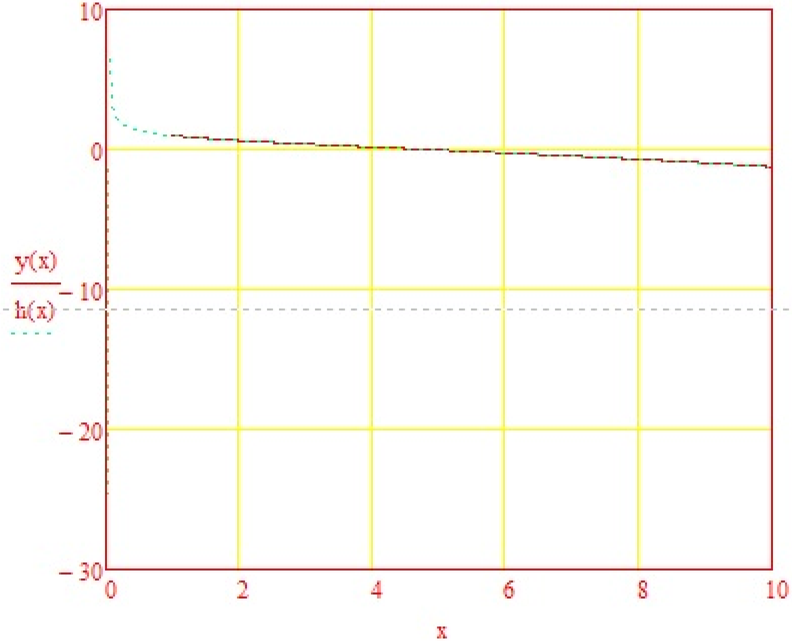
$y(4) = 5.5677302$



Given $\quad x \cdot y''(x) + (y'(x)) \cdot y(x) = 0 \qquad y(1) = 1 \quad y'(1) = -0.5 \qquad y := \mathrm{Odesolve}(x, 10)$

$$h(x) := 1 - \tan\left(\frac{\ln(x)}{2}\right) \qquad h(5) = -0.0394079$$

$$y(5) = -0.0393809$$

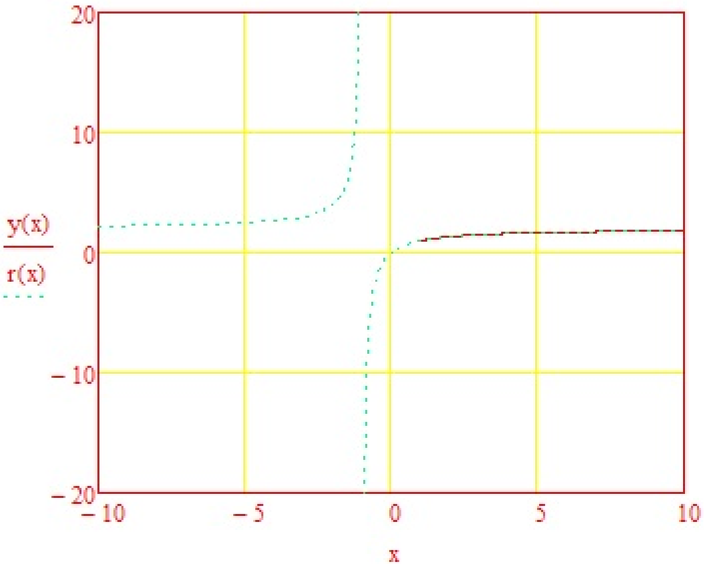


Given $x \cdot y''(x) + (y'(x)) \cdot y(x) = 0$ $\quad y(1) = 1 \quad y'(1) = 0.5 \quad y := \text{Odesolve}(x, 10)$

$$r(x) := 1 + \tanh\left(\frac{\ln(x)}{2}\right)$$

$y(8) = 1.7777959$

$r(8) = 1.7777778$



Рассмотрим уравнение $L^{(n)}y+a_1L^{(n-1)}y+.....+a_n\frac{1}{y}=0$ решение этого уравнения найдем в виде $y=p\ln x+c$, получим аналогично $p=\frac{a_n}{1+a_1+a_2+a_3+a_4+.....+(-a_{n-1})}\Rightarrow y=\frac{a_n}{1+a_1+a_2+a_3+a_4+.....+(-a_{n-1})}\ln x+c$.

Рассмотрим уравнение $L'x(t)=Rx(t)+f(t), \frac{tx'(t)}{x(t)}=Rx(t)+f(t)$, отсюда $\frac{dx}{dt}=\frac{Rx^2(t)}{t}+\frac{x(t)f(t)}{t}$. Существует ли для этого уравнения интегрирующий множитель $\eta(t)$,

такой что после умножения уравнение можно написать в виде $\eta(t)L'x(t)=\eta(t)(Rx(t)+f(t))$, $L'(x(t), \eta(t))=\eta(t)Rf(t)$.

Пример . $L''y+2L'y+1=0$, $\frac{xy''}{y'}+\frac{xy'}{y}+2=0$, $y''=-\frac{(y')^2}{y}-\frac{2y'}{x}$. Дифференциальное уравнение $F(x,y,\dot y,\ddot y)=0$ инвариантно для группы G преобразований плоскости $R^2(x,y)$, если это уравнение рассматривать в виде алгебраического, это уравнение 3 размерного многообразия в пространстве $R_4(x,y,\dot y,\ddot y)$ инвариант продолженной группой G_2, что будет удовлетворять условию $X_2F=0$, $\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\mu_1\frac{\partial F}{\partial \dot y}+\mu_2\frac{\partial F}{\partial \ddot y}=0$. Определяющее уравнение

$\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})\dot y+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})\dot y^2-\xi_{yy}\dot y^3+(\eta_y-2\xi_x-3\dot y\xi_y)f-(\eta_x+\dot y(\eta_y-\xi_x)-\dot y^2\xi_y)f_{\dot y}-\xi f_x-\eta f_y=0$, где $f=-\frac{\dot y^2}{y}-\frac{2\dot y}{x}$, откуда

$\eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})\dot y+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})\dot y^2-\xi_{yy}\dot y^3+(\eta_y-2\xi_x-3\dot y\xi_y)\left(-\frac{\dot y^2}{y}-\frac{2\dot y}{x}\right)-(\eta_x+\dot y(\eta_y-\xi_x)-\dot y^2\xi_y)\left(-\frac{2\dot y}{y}-\frac{2}{x}\right)+\xi\frac{2\dot y}{x^2}+\eta\frac{\dot y^2}{y^2}=0$.

Для этого уравнения $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ неизвестные функции, относительно независимых переменных x, y, $\dot y$. Это уравнение распадается на несколько независимых уравнений, которые образуют систему уравнений для функций ξ, η. Решив эту систему найдем группы допускаемые этим уравнением. Приравняем нулю коэффициэнты степеней производной y.

$(\dot y)^0\quad \eta_{xx}+\frac{2\eta_x}{x}=0$

$(\dot y)^1\quad -\xi_{xx}+2\eta_{xy}+\frac{4\xi_x}{x}-\frac{2\eta_y}{x}+\frac{2\eta_x}{y}+\frac{2\eta_y}{x}-\frac{2\xi_x}{x}+\frac{2\xi}{x^2}=0$

$(\dot y)^2\quad \eta_{yy}-2\xi_{xy}-\frac{\eta_y}{y}+\frac{6\xi_y}{x}+\frac{2\xi_x}{y}+\frac{2\eta_y}{y}-\frac{2\xi_x}{y}-\frac{2\xi_y}{x}+\frac{\eta}{y^2}=0$

$(\dot y)^3\quad -\xi_{yy}+\frac{3\xi_y}{y}-\frac{2\xi_y}{y}=0$

Найдем $-\xi_{yy}+\frac{\xi_y}{y}=0$, $\frac{d^2\xi(x,y)}{dy^2}-\frac{d\xi(x,y)}{ydy}=0$. Пусть $\xi_y'(x,y)=\lambda(x,y)$, тогда $\xi_{yy}''(x,y)=\lambda_y'(x,y)$, $\lambda'-\frac{\lambda}{y}=0$, $\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{dy}{y}$, $\ln|\lambda|=\ln|yq(x)|$, $\lambda(x,y)=q(x)y$, $\xi_y'(x,y)=q(x)y$, $\xi(x,y)=\int q(x)ydy=q(x)\frac{y^2}{2}+k(x)$.

Проверка $\xi_y'(x,y)=\left(q(x)\frac{y^2}{2}+k(x)\right)_y'=q(x)y$, $\xi_{yy}''(x,y)=(q(x)y)_y'=q(x)$, $-\xi_{yy}+\frac{\xi_y}{y}=-q(x)+\frac{1}{y}yq(x)=0$. $\eta_{xx}+\frac{2\eta_x}{x}=0$, $\frac{d^2\eta(x,y)}{dx^2}+\frac{2d\eta(x,y)}{xdx}=0$. Пусть $\eta_x'(x,y)=\gamma(x,y)$, тогда

$\eta_{xx}''(x,y)=\gamma_x'(x,y)$, $\gamma'+\frac{2\gamma}{x}=0$, $\frac{d\gamma}{\gamma}=-\frac{2dx}{x}$, $\ln|\gamma|=-2\ln|x|+\ln|p(y)|=\ln\left|\frac{p(y)}{x^2}\right|$, $\gamma(x,y)=\frac{p(y)}{x^2}$, $\eta_x'(x,y)=\frac{p(y)}{x^2}$, $\eta(x,y)=\int\frac{p(y)}{x^2}dx=-\frac{p(y)}{x}+a(y)$.

Проверка $\eta_x'(x,y)=\left(-\frac{p(y)}{x}+a(y)\right)_x'=\frac{p(y)}{x^2}$, $\eta_{xx}''(x,y)=-\frac{2p(y)}{x^3}$, $\eta_{xx}+\frac{2\eta_x}{x}=-\frac{2p(y)}{x^3}+\frac{2p(y)}{x^3}=0$. $\eta(x,y)=-\frac{p(y)}{x}+a(y)$, $\eta_x=\frac{p(y)}{x^2}$, $\eta_{xx}=-\frac{2p(y)}{x^3}$, $\eta_{xy}=\frac{p'(y)}{x^2}$, $\eta_y=-\frac{p'(y)}{x}+a'(y)$, $\eta_{yy}=-\frac{p''(y)}{x}+a''(y)$.

$\xi(x,y)=q(x)\frac{y^2}{2}+k(x)$, $\xi_x=q'(x)\frac{y^2}{2}+k'(x)$, $\xi_{xx}=q''(x)\frac{y^2}{2}+k''(x)$, $\xi_{xy}=q'(x)y$, $\xi_y=q(x)y$, $\xi_{yy}=q(x)$. Подставим эти выражения в уравнение $\eta_{yy}-2\xi_{xy}+\frac{4\xi_y}{x}+\frac{\eta_y}{y}+\frac{\eta}{y^2}=0$, $-\xi_{xx}+2\eta_{xy}+\frac{2\eta_x}{y}+\frac{2\xi_x}{x}+\frac{2\xi}{x^2}=0$, получим

$a''(y)-\frac{p''(y)}{x}-2q'(x)y+4\frac{q(x)y}{x}+\frac{a'(y)}{y}-\frac{p'(y)}{xy}+\frac{a(y)}{y^2}-\frac{p(y)}{xy^2}=0$, $-q''(x)\frac{y^2}{2}-k''(x)+\frac{2p'(y)}{x^2}+\frac{2p(y)}{x^2y}+\frac{2q'(x)y^2}{2x}+\frac{2k'(x)}{x}+\frac{2q(x)y^2}{2x^2}+\frac{2k(x)}{x^2}=0$.

Пусть для уравнения $-q''(x)\frac{y^2}{2}-k''(x)+\frac{2p'(y)}{x^2}+\frac{2p(y)}{x^2y}+\frac{2q'(x)y^2}{2x}+\frac{2k'(x)}{x}+\frac{2q(x)y^2}{2x^2}+\frac{2k(x)}{x^2}=0$ выполняются условия $\begin{cases}-q''(x)\frac{y^2}{2}+\frac{2q'(x)y^2}{2x}+\frac{2q(x)y^2}{2x^2}=0\\ -k''(x)+\frac{2k'(x)}{x}+\frac{2k(x)}{x^2}=0\end{cases}$, итак $\begin{cases}-q''(x)+\frac{2q'(x)y^2}{x}+\frac{2q(x)y^2}{x^2}=0\\ -k''(x)+\frac{2k'(x)}{x}+\frac{2k(x)}{x^2}=0\end{cases}$.

Решение этих уравнений найдем в виде $k(x)=x^n$, $q(x)=x^n$, $k'(x)=nx^{n-1}$, $k''(x)=n(n-1)x^{n-2}$, откуда $-n(n-1)x^{n-2}+\frac{2nx^{n-1}}{x}+\frac{2x^n}{x^2}=0$, $n^2-3n-2=0$, $n=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $k(x)=c_1x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}+c_2x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}$, $q(x)=r_1x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}+r_2x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}$.

Эти уравнения могут быть решены так $x=e^t$, откуда $k_x'(x)=k_t'(t)t_x'=k_t'(t)\frac{1}{x_t'}=k_t'(t)\frac{1}{e^t}=k_t'(t)e^{-t}$, $k_{x^2}''(x)=\left(k_{t^2}''(t)e^{-t}-k_t'(t)e^{-t}\right)e^{-t}=\left(k_{t^2}''(t)-k_t'(t)\right)e^{-2t}$. Подставим эти выражения в уравнение

$e^{2t}\left(k_{t^2}''(t)-k_t'(t)\right)e^{-2t}-2e^tk_t'(t)e^{-t}-2k(t)=0$, $k''-3k'-2k=0$, $n^2-3n-2=0$, тогда из уравнений получим $-q''(x)\frac{y^2}{2}-k''(x)+\frac{2p'(y)}{x^2}+\frac{2p(y)}{x^2y}+\frac{2q'(x)y^2}{2x}+\frac{2k'(x)}{x}+\frac{2q(x)y^2}{2x^2}+\frac{2k(x)}{x^2}=0$, тогда $\frac{2p'(y)}{x^2}+\frac{2p(y)}{x^2y}=0$, $p'(y)+\frac{p(y)}{y}=0$,

$\frac{dp}{dy}=-\frac{2dy}{y}$, $\ln|p|=-2\ln|y|+\ln|c|$, $p(y)=\frac{c}{y^2}$, $p'(y)=-\frac{2c}{y^3}$, $p''(y)=2\frac{3c}{y^4}$, $q'(x)=n_1r_1x^{n_1-1}+n_2r_2x^{n_2-1}$. Подставим эти выражения $a''(y)-\frac{p''(y)}{x}-2q'(x)y+4\frac{q(x)y}{x}+\frac{a'(y)}{y}-\frac{p'(y)}{xy}+\frac{a(y)}{y^2}-\frac{p(y)}{xy^2}=0$, найдем

$a''(y)-2\frac{3c}{y^4}-2\left(n_1r_1x^{n_1-1}+n_2r_2x^{n_2-1}\right)y+\frac{4\left(r_1x^{n_1}+r_2x^{n_2}\right)y}{x}+\frac{a'(y)}{y}+\frac{1}{xy}\frac{2c}{y^3}+\frac{a(y)}{y^2}-\frac{1}{xy^2}\frac{c}{y^2}=0$, $a''(y)-\frac{5c}{xy^4}+2\left(n_1r_1x^{n_1-1}+n_2r_2x^{n_2-1}\right)y+\frac{a'(y)}{y}+\frac{a(y)}{y^2}=0$, тогда $c=0$, $r_1=0$, $r_2=0$, $p(y)=0$, $q(x)=0$, $\xi(x,y)=k(x)$, $\eta(x,y)=a(y)$,

$a''(y)+\frac{a'(y)}{y}+\frac{a(y)}{y^2}=0$. Решение этого уравнения найдем в виде $a(y)=y^n$, значит $a'(y)=ny^{n-1}$, $a''(y)=n(n-1)y^{n-2}$, $n(n-1)y^{n-2}+\frac{ny^{n-1}}{y}+\frac{y^n}{y^2}=0$, $n(n-1)+n+1=0$, $n^2+1=0$, $n=\pm j$, $\xi(x,y)=c_1x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}+c_2x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}$,

$\eta(x,y)=\gamma_1\cos y+\gamma_2\sin y$. Поэтому это уравнение дает два линейно независимых оператора $X_1=x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}\frac{\partial}{\partial x}+\sin y\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2=x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\frac{\partial}{\partial x}+\cos y\frac{\partial}{\partial y}$.

Найдем коммутатор этих операторов $X=[X_1,X_2]=X_1X_2-X_2X_1=\left(X_1(\xi_2)-X_2(\xi_1)\right)\frac{\partial}{\partial x}-\left(X_2(\eta_1)-X_1(\eta_2)\right)\frac{\partial}{\partial y}$,

$X_1(\xi_2) = x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}} \frac{\partial x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}}{\partial x} + 0 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} x^2$, $X_2(\xi_1) = x^{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} \frac{\partial x^{\frac{3-\sqrt{17}}{2}}}{\partial x} + 0 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} x^2$, $X_2(\eta_1) = 0 + \cos y \frac{\partial \cos y}{\partial y} = -\frac{\sin 2y}{2}$, $X_1(\eta_2) = 0 + \sin y \frac{\partial \sin y}{\partial y} = \frac{\sin 2y}{2}$, $[X_1, X_2] = x^2\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(-\frac{\sin 2y}{2} - \frac{\sin 2y}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y} = \sqrt{17}x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \sin 2y \frac{\partial}{\partial y}$.

Since $[X_1, X_2] \neq X_1$, $[X_1, X_2] \neq X_2$, тогда эти операторы не образуют двух размерное векторное пространство .

Уравнение второго порядка $y'' + F_3(x, y)(y')^3 + F_2(x, y)(y')^2 + F_1(x, y)\, y' + F(x, y) = 0$ может быть преобразовано в линейное уравнение используя подстановку $\bar{x} = \phi(x, y)$, $\bar{y} = \varphi(x, y)$, только когда существует решение следующей системы

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z^2 - Fw - F_1 z + \frac{\partial F}{\partial y} + FF_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -zw - \frac{\partial F_2}{3\partial x} + \frac{2\partial F_1}{3\partial y} + FF_3 + 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = -w^2 + F_2 w + F_3 z + \frac{\partial F_3}{\partial x} - F_3 F_1 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = zw - \frac{\partial F_1}{3\partial y} + \frac{2\partial F_2}{3\partial x} - FF_3 + 0 \end{cases}$$

, для этого уравнения получим

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z^2 - \frac{z}{x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -zw + 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} = -w^2 + \frac{w}{y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} = zw + 0 \end{cases} .$$

Необходимо выполнение условий $w_{xy} - w_{yx} = 0$, $z_{yx} - z_{xy} = 0$, $-(wz_x + zw_x) - 2zz_y + \frac{z_y}{x} = 0$, $wz_y + zw_y - \left(-2ww_x + \frac{w_x}{y}\right) = 0$,

из уравнения $\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 - \frac{z}{x}$, найдем $z(x, y) = \frac{1}{x(-\ln x + c(y))}$, тогда $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xc'(y)}{x^2(-\ln x + c(y))^2}$, поскольку $\frac{\partial z}{\partial y} = -zw$, итак

$-\frac{xc'(y)}{x^2(-\ln x + c(y))^2} = -\frac{w}{x(-\ln x + c(y))}$, $\frac{c'(y)}{-\ln x + c(y)} = -w$, из уравнения $\frac{\partial w}{\partial y} = -w^2 + \frac{w}{y}$, найдем $w(x, y) = \frac{2y}{y^2 + c_1(x)}$, тогда $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{c_1'(x)}{(y^2 + c_1(x))^2}$,

поскольку $\frac{\partial w}{\partial x} = zw$, то $-\frac{c_1'(x)}{(y^2 + c_1(x))^2} = \frac{2y}{y^2 + c_1(x)} z$, $-\frac{c_1'(x)}{y^2 + c_1(x)} = 2z$. Необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{c_1'(x)}{y^2 + c_1(x)} = -\frac{2}{x(-\ln x + c(y))} \\ \frac{c'(y)}{-\ln x + c(y)} = -\frac{2y}{y^2 + c_1(x)} \end{cases} ,$$

отсюда найдем $c_1(x) = \frac{2y\ln x - 2yc(y) - c'(y)\, y^2}{c'(y)}$, $c_1'(x) = \frac{2y}{xc'(y)}$, откуда $\frac{\frac{2y}{xc'(y)}}{y^2 + \frac{2y\ln x - 2yc(y) - c'(y)\, y^2}{c'(y)}} = \frac{-2}{x(-\ln x + c(y))}$, это дает $c(y) = \ln x$, тогда $c'(y) = 0$.

Система не имеет решений , поэтому это уравнение не может быть преобразовано в линейное , используя подстановку $\overline{x} = \phi(x, y)$, $\overline{y} = \varphi(x, y)$.Уравнение имеет решение $y = \left(\frac{c_1}{x} + c\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пример . $f(x+y) + f(x-y) = y\left(L'f(x-y) + L'f(x+y)\right)$. Пусть $y = x$, отсюда $f(2x) + f(0) = x\left(L'f(0) + L'f(2x)\right)$, обозначим $L'f(0) = b$, $f(0) = a$, $2x = t$,

тогда $f(t) + a = \frac{t}{2}\left(L'f(t) + b\right)$, $f(t) + a = \frac{t}{2}\left(\frac{tf'(t)}{f(t)} + b\right)$, $2f^2(t) + 2af(t) = btf(t) + t^2 f'(t)$, $\frac{2f^2(t)}{t^2} + \frac{2af(t)}{t^2} = \frac{bf(t)}{t} + f'(t)$.

Решение этого уравнения $f(t) = \cfrac{1}{\left(\cfrac{2^{-\frac{b}{2}} x^{-b} e^{-\frac{a}{x}} \left(\frac{a}{x}\right)^{-\frac{b}{2}} \mathit{Whittaker}\, M\left(\frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{2a}{x}\right)}{a(b+1)} + r\right) x^b \left(e^{\frac{2b}{x}}\right)}$, где $\mathit{Whittaker}\, M\left(\frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{2a}{x}\right)$ Уиттера М функция . Пусть $b = 1$, тогда $f(t) = \frac{2a^2}{2te^{\frac{2a}{t}} a^2 r - 2a - t}$, $f(2x) = \frac{a^2}{2xe^{\frac{a}{x}} - a - x}$.

Пример . $L'x(t) = x(t-1)$, начальные условия $x(t) = \phi_0(t) = t + 1$, $0 \le t \le 1$, это уравнение с запаздывающим аргументом . Это уравнение эквивалентно следующему $\frac{tx'(t)}{x(t)} = x(t-1)$, $tx'(t) = x(t)x(t-1)$,

найдем решение в интервале $1 \le t \le 2$. Решаем уравнение методом шагов . В интервале $1 \le t \le 2$ аргумент функции $x(t-1)$ находиться в интервале $0 \le t-1 \le 1$, поэтому на этом интервале можно подставить $x(t-1) = \phi_0(t-1) = t-1+1 = t$

получим дифференциальное уравнение для интервала $1 \le t \le 2$, $tx'(t) = x(t)t$, $x'(t) = x(t)$, решенние этого уравнения $x(t) = e^t c$, $x(1) = (t+1)_{t=1} = 1 + 1 = 2$, отсюда $c = \frac{2}{e}$, значит $x(t) = 2e^{t-1}$.

Пример . $L''x(t) = 2L'x(t-1)$, начальные условия $x(t) = \phi_0(t) = e^t$, $0 \le t \le 1$, это уравнение с запаздывающим аргументом .Это уравнение эквивалентно следующему $1 + \frac{tx''(t)}{x'(t)} - \frac{tx'(t)}{x(t)} = 2\frac{(t-1)x'(t-1)}{x(t-1)}$. Let $L'x(t) = y(t)$,

поэтому $L''x(t) = L'y(t)$. Получим уравнение $L'y(t) = 2y(t-1)$, $\frac{ty'(t)}{y(t)} = 2y(t-1)$, потому что $x(t) = \phi_0(t) = e^t$, значит $y(t) = L'x(t) = L'e^t = t$, отсюда начальные условия $y(t) = \gamma_0(t) = t$, $0 \le t \le 1$. Найдем решение в интервале $1 \le t \le 2$.

Решим это уравнение методом шагов . В интервале $1 \le t \le 2$ аргумент функции $y(t-1)$ находиться в интервале $0 \le t-1 \le 1$, поэтому на этом интервале можно подставить $y(t-1) = \gamma_0(t-1) = t-1$, получим дифференциальное уравнение

для интервала $1 \le t \le 2$, $ty'(t) = 2(t-1)y(t)$, $\frac{dy}{y} = 2\left(1 - \frac{1}{t}\right)dt$, $y(t) = \frac{e^{2t}}{t^2}c$, $y(1) = t_{t=1} = 1$, откуда $c = \frac{1}{e}$, $y(t) = \frac{e^{2t-1}}{t^2}$. Это дает $L'x(t) = \frac{e^{2t-1}}{t^2}$, $\frac{tx'(t)}{x(t)} = \frac{e^{2t-1}}{t^2}$, $\frac{dx}{x} = \frac{e^{2t-1}}{t^3}dt$, $\ln x(t) = \frac{1}{e}\int \frac{e^{2t}}{t^3}dt = -\left(Ei(1, -2t) + \frac{e^{2t}}{t}\left(\frac{1}{2t} + 1\right)\right)$,

где $Ei(x)$ интегральная показательная функция .

Системы L дифференциальных уравнений .

Пример . $\begin{cases} L'x(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ L'y(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{tx'(t)}{x} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \dfrac{ty'(t)}{y} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$. Пусть $x(t) = f_1(g(t)) = f_1(\ln t)$, $y(t) = f_2(g(t)) = f_2(\ln x) \Rightarrow x_t'(t) = f_1'(g)g'(t) = \dfrac{f_1'(g)}{t}$, $y_t'(t) = f_2'(g)g'(t) = \dfrac{f_2'(g)}{t}$, откуда

$$\begin{cases} \dfrac{f_1'(g)}{f_1(g)} = a_{11}f_1(g) + a_{12}f_2(g) \\ \dfrac{f_2'(g)}{f_2(g)} = a_{21}f_1(g) + a_{22}f_2(g) \end{cases} \Rightarrow f_1(g) = \left(\frac{f_2'(g)}{f_2(g)} - a_{22}f_2(g)\right)\frac{1}{a_{21}} \Rightarrow f_1'(g) = \left(\frac{f_2''(g)f_2(g) - \left(f_2'(g)\right)^2}{f_2^2(g)} - a_{22}f_2'(g)\right)\frac{1}{a_{21}} \quad f_1'(g) = f_1(g)\left(a_{11}f_1(g) + a_{12}f_2(g)\right) .$$

Используя метод подстановки получим дифференциальное уравнение $\dfrac{f_2''(g)f_2(g) - \left(f_2'(g)\right)^2}{f_2^2(g)} - a_{22}f_2'(g) = \left(\dfrac{f_2'(g)}{f_2(g)} - a_{22}f_2(g)\right)\left(a_{11}\left(\dfrac{f_2'(g)}{f_2(g)} - a_{22}f_2(g)\right) + a_{12}f_2(g)\right)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{f_1'(g)}{f_1(g)} = f_1(g) + 2f_2(g) \\ \dfrac{f_2'(g)}{f_2(g)} = 3f_1(g) + 4f_2(g) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1'(g) = f_1(g)\left(f_1(g) + 2f_2(g)\right) = f_1^2(g) + 2f_1(g)f_2(g) \\ f_2'(g) = f_2(g)\left(3f_1(g) + 4f_2(g)\right) = 3f_1(g)f_2(g) + 4f_2^2(g) \end{cases}$

$f_2(g) = \dfrac{f_1'(g) - f_1^2(g)}{2f_1(g)}$. Используя метод подстановки получим дифференциальное уравнение $f_2' = \dfrac{\left(f_1'' - 2f_1f_1'\right)f_1 - \left(f_1' - f_1^2\right)f_1'}{2f_1^2} = \dfrac{f_1''f_1 - 2f_1^2f_1' - \left(f_1'\right)^2 + f_1^2f_1'}{2f_1^2} = \dfrac{f_1''f_1 - f_1^2f_1' - \left(f_1'\right)^2}{2f_1^2} \Rightarrow$

$\dfrac{f_1''f_1 - f_1^2f_1' - \left(f_1'\right)^2}{2f_1^2} = \dfrac{f_1' - f_1^2}{2f_1}\left(3f_1 + 4\dfrac{f_1' - f_1^2}{2f_1}\right)$, $\dfrac{f_1''f_1 - f_1^2f_1' - \left(f_1'\right)^2}{f_1} = \left(f_1' - f_1^2\right)\dfrac{3f_1^2 + 2f_1' - 2f_1^2}{f_1}$, $f_1''f_1 - f_1^2f_1' - \left(f_1'\right)^2 = \left(f_1' - f_1^2\right)\left(f_1^2 + 2f_1'\right)$ $f_1''f_1 - f_1^2f_1' - \left(f_1'\right)^2 = f_1'f_1^2 + 2\left(f_1'\right)^2 - f_1^4 - 2f_1^2f_1' \Rightarrow f_1''f_1 = 3\left(f_1'\right)^2 - f_1^4$, $f_1'' = \dfrac{3\left(f_1'\right)^2}{f_1} - f_1^3$.

Пусть $f_1'(g) = u(f_1) \Rightarrow f_1''(g) = u_{f_1}'(f_1)f_1'(g) = u_{f_1}'(f_1)u(f_1)$, значит $u_{f_1}'u = \dfrac{3u^2}{f_1} - f_1^3$ $u_{f_1}' = \dfrac{3u}{f_1} - \dfrac{f_1^3}{u}$. Пусть $u(f_1) = \alpha(f_1)\beta(f_1) \Rightarrow \alpha'\beta + \beta'\alpha = \dfrac{3\alpha\beta}{f_1} - \dfrac{f_1^3}{\alpha\beta}$ $\alpha'\beta + \beta'\alpha - \dfrac{3\alpha\beta}{f_1} + \dfrac{f_1^3}{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \alpha'\beta + \alpha\left(\beta' - \dfrac{3\beta}{f_1}\right) + \dfrac{f_1^3}{\alpha\beta} = 0$ $\beta' - \dfrac{3\beta}{f_1} = 0$ $\dfrac{d\beta}{df_1} = \dfrac{3\beta}{f_1}$,

$\dfrac{d\beta}{\beta} = \dfrac{3df_1}{f_1} \Rightarrow \ln|\beta| = 3\ln|f_1|$, $\beta = f_1^3$, отсюда $\alpha'\beta + \dfrac{f_1^3}{\alpha\beta} = 0$, $\alpha'f_1^3 + \dfrac{f_1^3}{\alpha f_1^3} = 0$, $\alpha'f_1^3 = -\dfrac{1}{\alpha}$, $f_1^3\dfrac{d\alpha}{df_1} = -\dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha d\alpha = -\dfrac{df_1}{f_1^3} \Rightarrow \dfrac{\alpha^2}{2} = -\dfrac{f_1^{-2}}{-2} + c_1$, $\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{f_1^2} + c_1} \Rightarrow u(f_1) = f_1^3\sqrt{\dfrac{1}{f_1^2} + c_1} = f_1^2\sqrt{c_1f_1^2 + 1}$, тогда

$f_1'(g) = f_1^2\sqrt{c_1f_1^2 + 1}$, $\dfrac{df_1}{dg} = f_1^2\sqrt{c_1f_1^2 + 1}$, $\dfrac{df_1}{f_1^2\sqrt{c_1f_1^2 + 1}} = dg \Rightarrow \dfrac{-\sqrt{c_1f_1^2 + 1}}{f_1} = g + c_2$, $\dfrac{c_1f_1^2 + 1}{f_1^2} = (g + c_2)^2$, $c_1 + \dfrac{1}{f_1^2} = (g + c_2)^2$, $\dfrac{1}{f_1^2} = (g + c_2)^2 - c_1$, $f_1(g) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{(g + c_2)^2 - c_1}}$ $f_2(g) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f_1'(g)}{f_1(g)} - f_1(g)\right) \Rightarrow$

$$f_2(g)=\frac{1}{2}\left(\frac{f_1^2\sqrt{c_1f_1^2+1}}{f_1}-f_1\right)=\frac{1}{2}\left(f_1\sqrt{c_1f_1^2+1}-f_1\right)=\frac{f_1}{2}\left(\sqrt{c_1f_1^2+1}-1\right)=\pm\frac{1}{2\sqrt{(g+c_2)^2-c_1}}\left(\sqrt{\frac{c_1}{(g+c_2)^2-c_1}}-1\right)=\pm\frac{1}{2\sqrt{(g+c_2)^2-c_1}}\left(\sqrt{\frac{(g+c_2)^2}{(g+c_2)^2-c_1}}-1\right),$$

$x(t)=f_1(\ln t)$ $y(t)=f_2(\ln t)$ $g(t)=\ln t$, тогда $x(t)=\pm\frac{1}{\sqrt{(\ln t+c_2)^2-c_1}}$ $y(t)=\pm\frac{1}{2\sqrt{(\ln t+c_2)^2-c_1}}\left(\frac{\ln t+c_2}{\sqrt{(\ln t+c_2)^2-c_1}}-1\right)$.

Пример . $\begin{cases} L'x(t)=\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}y(t) \\ L'y(t)=-\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}x(t)\end{cases}$, so $\begin{cases} x'(t)=\frac{x(t)}{t}\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}y(t)=f_1(t,x,y) \\ y'(t)=-\frac{y(t)}{t}\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}x(t)=f_2(t,x,y)\end{cases}$, найдем Ли производную функции $H(x,y)$ для этой системы $L_{\bar{f}}H(x,y)=\frac{\partial H(x,y)}{\partial t}+\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}f_1+\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}f_2=0+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{x}{t}\frac{\partial H}{\partial y}y-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{y}{t}\frac{\partial H}{\partial x}x=0$,

тогда $H(x,y)$ это первый интеграл данной системы .

Пример . $\begin{cases} L''x(t)-nL'y(t)=f(t) \\ L''y(t)-rL'x(t)=g(t)\end{cases}$, эта система эквивалентна следующей $\begin{cases} \frac{x''(t)}{x'(t)}-\frac{x'(t)}{x(t)}-n\frac{y'(t)}{y(t)}=f(t) \\ \frac{y''(t)}{y'(t)}-\frac{y'(t)}{y(t)}-r\frac{x'(t)}{x(t)}=g(t)\end{cases}$. Пусть $x(t)=e^{\phi(t)}$, $y(t)=e^{\gamma(t)}$, тогда $y'(t)=e^{\gamma(t)}\gamma'(t)$, $x'(t)=e^{\phi(t)}\phi'(t)$, $x''(t)=e^{\phi(t)}\left((\phi'(t))^2+\phi''(t)\right)$, $y''(t)=e^{\gamma(t)}\left((\gamma'(t))^2+\gamma''(t)\right)$.

Подставим эти выражения в систему найдем $\begin{cases} \frac{\phi''(t)}{\phi'(t)}-n\gamma'(t)=f(t) \\ \frac{\gamma''(t)}{\gamma'(t)}-r\phi'(t)=g(t)\end{cases}$, $\gamma'(t)=\frac{1}{n}\left(\frac{\phi''(t)}{\phi'(t)}-f(t)\right)$, $\gamma''(t)=\frac{1}{n}\left(\frac{\phi''(t)}{\phi'(t)}-f(t)\right)'_t=\frac{1}{n}\left(\frac{\phi'''(t)\phi'(t)-(\phi''(t))^2}{(\phi'(t))^2}-f'(t)\right)$, подставим во второе уравнение системы

$\frac{\phi'''(t)\phi'(t)-(\phi''(t))^2-(\phi'(t))^2f'(t)}{(\phi''(t)-\phi'(t)f(t))\phi'(t)}-r\phi'(t)=g(t)$. Пусть $\lambda(t)=\phi'(t)$, тогда $\lambda'(t)=\phi''(t)$, $\lambda''(t)=\phi'''(t)$. Получим уравнение $\frac{\lambda''(t)\lambda(t)-(\lambda'(t))^2-(\lambda(t))^2f'(t)}{(\lambda'(t)-\lambda(t)f(t))\lambda(t)}-r\lambda(t)=g(t)$, если $g(t)=g$, $f(t)=f$, найдем

$\frac{\lambda''(t)\lambda(t)-(\lambda'(t))^2}{(\lambda'(t)-\lambda(t)f)\lambda(t)}-r\lambda(t)=g$, $\frac{d\lambda}{dt}=p(\lambda)$, $\frac{d^2\lambda}{dt^2}=\frac{dp}{dt}=\frac{dp}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}=p\frac{dp}{d\lambda}$, $\frac{pp'(\lambda)\lambda-(p(\lambda))^2}{(p(\lambda)-\lambda f)\lambda}-r\lambda=g$. Решение этого уравнения $p(\lambda)=\lambda f\left(\mathrm{LambertW}\left(\frac{\lambda^{\frac{g}{f}}e^{\frac{r\lambda}{f}}}{f}\rho\right)+1\right)$, где ρ постоянная . Пусть $f=g=0$, это дает $\frac{\lambda''(t)}{\lambda'(t)}-\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}-r\lambda(t)=0$,

$\frac{dp}{d\lambda}-\frac{p}{\lambda}-r\lambda=0$. Решение этого уравнения $p(\lambda)=(\lambda r+q)\lambda$, где q постоянная , это дает $\frac{d\lambda}{dt}=(\lambda r+q)\lambda$, $\lambda(t)=\frac{q}{e^{-qt}\sigma-r}$, где σ постоянная , $\phi'(t)=\frac{q}{e^{-qt}\sigma-r}$, $\phi(t)=-\frac{\ln\left(e^{-qt}\sigma-r\right)}{r}-\frac{qt}{r}+\eta$, где η постоянная .

Рассмотрим систему $\begin{cases} L_t' x(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ L_t y(t) = f_2(x(t), y(t)) \end{cases}$. Пусть $x(t) = \phi_1(t), y(t) = \phi_2(t)$ решение этой системы , $u(x, y)$ произвольная непрерывная функция . Поэтому $\omega(t) = u(x, y)_{x=\phi_1(t), y=\phi_2(t)} = u(\phi_1(t), \phi_2(t))$, тогда

$L_t'\omega(t) = \frac{t\omega_t'(t)}{\omega(t)} = \frac{t(u_x'x_t' + u_y'y_t')}{u} = \frac{xu_x'}{u}\frac{tx_t'}{x} + \frac{yu_y'}{u}\frac{ty_t'}{y} = L_x'u(x, y)L_t'x(t) + L_y'u(x, y)L_t'y(t) = (L_x'u(x, y)) f_1(x(t), y(t)) + (L_y'u(x, y)) f_2(x(t), y(t))$. Назовем это выражение LH производной векторного поля $F(f_1(x(t), y(t)), f_2(x(t), y(t)))$.

Пусть $u(x, y)$ первый интеграл этой системы , тогда $\omega(t) = u(\phi_1(t), \phi_2(t)) = c \Rightarrow L_t'\omega(t) = L_t'u(\phi_1(t), \phi_2(t)) = L_t'c = 0$. Значит для того чтобы функция была первым интегралом необходимо , достаточно $(L_x'u) f_1 + (L_y'u) f_2 = 0$, то есть LH производная векторного поля $F(f_1, f_2)$ была равна 0 .

Пример . $\begin{cases} L_t' x(t) = f_1(x, y) \\ L_t' y(t) = f_2(x, y) \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{tx'(t)}{x(t)} = f_1(x, y) \\ \frac{ty'(t)}{y(t)} = f_2(x, y) \end{cases}$. Назовем эту систему LH системой если существует функция $H(x, y)$ такая что $\begin{cases} L_y'H = f_1(x, y) \\ L_x'H == -f_2(x, y) \end{cases}$, то есть $\begin{cases} L_t'x(t) = L_y'H \\ L_t'y(t) = -L_x'H \end{cases}$, эта система уравнений эквивалентна следующей системе

$\begin{cases} \frac{t\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{yH_y'}{H} \\ \frac{t\dot{y}(t)}{y(t)} = -\frac{xH_x'}{H} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{xy}{t}\left(\frac{H_y'}{H}\right) \\ \dot{y}(t) = \frac{xy}{t}\left(-\frac{H_x'}{H}\right) \end{cases}$. Рассмотрим выражение $L_x'H \cdot L_t'x + L_y'H \cdot L_t'y = L_x'H \cdot L_y'H - L_y'H \cdot L_x'H = 0$. Напишем эту систему в виде автономной системы для этого нужно добавить новую функцию $z(t) = t$ тогда

$\begin{cases} x'(t) = \frac{x \cdot y}{t}\frac{H_y'}{H} \\ y'(t) = -\frac{x \cdot y}{t}\frac{H_x'}{H} \\ z'(t) = 1 \end{cases}$. Найдем производную функции $H(x, y)$ вдоль векторного поля этой системы $H_t'(x(t), y(t)) = H_x'(x, y) \cdot \frac{xy}{t}\frac{H_y'}{H} + H_y'(x, y) \cdot \left(-\frac{xy}{t}\frac{H_x'}{H}\right) + H_z'(x, y) = 0$, то есть функция $H(x, y)$ первый интеграл этой системы . .

Найдем L_x производную от первого уравнения $L_x' f_1(x, y) = L_x'(L_y'H) = x\frac{HH_{xy}'' - H_y'H_x'}{HH_y'} = L_{yx}''H$. Найдем L_y производную от второго уравнения $L_y' f_2(x, y) = L_y'(-L_x'H) = y\frac{HH_{xy}'' - H_y'H_x'}{HH_x'} = L_{xy}''H$, отсюда $\frac{L_x'f_1}{L_y'f_2} = \frac{L_{yx}''H}{L_{xy}''H} = \frac{x}{y}\frac{H_x'}{H_y'}$,

$\frac{f_2}{f_1}\frac{(f_1)_x'}{(f_2)_y'} = \frac{H_x'}{H_y'}$, это условие что данная система является LH системой .

Пусть $H(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}w^2$, это функция Гамильтона гармонического осцилятора , тогда получим систему $\begin{cases} x'(t)=\frac{2xy^2w^2}{(x^2+y^2w^2)t} \\ y'(t)=-\frac{2x^2y}{(x^2+y^2w^2)t} \end{cases}$. Решение этой системы $x(t)=\pm\frac{t^2}{\sqrt{c_1-ct^4}}$, $y(t)=\mp\frac{\sqrt{(2x-x't)tx'x}}{w(x't-2x)}$.

Пример . $\begin{cases} L_t'x_1(t)=L_{y_1}'H(x_1,x_2,y_1,y_2) \\ L_t'x_2(t)=L_{y_2}'H(x_1,x_2,y_1,y_2) \\ L_t'y_1(t)=-L_{x_1}'H(x_1,x_2,y_1,y_2) \\ L_t'y_2(t)=-L_{x_2}'H(x_1,x_2,y_1,y_2) \end{cases}$, где $H(x,y)$ непрерывная функция . Отсюда $H(x,y)$ первый интеграл этой системы .

Доказательство . Найдем LH производную функции $H(x_1,x_2,y_1,y_2)$ вдоль векторного поля системы $L_{x_1}'H(L_{y_1}'H)+(L_{x_2}'H)(L_{y_2}'H)+L_{y_1}'H(-L_{x_1}'H)+L_{y_2}'H(-L_{x_2}'H)=0$, эта система эквивалентна следующей системе

$\begin{cases} \frac{t\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}=\frac{y_1H_{y_1}'(x_1,x_2,y_1,y_2)}{H(x_1,x_2,y_1,y_2)} \\ \frac{t\dot{x}_2(t)}{x_2(t)}=\frac{y_2H_{y_2}'(x_1,x_2,y_1,y_2)}{H(x_1,x_2,y_1,y_2)} \\ \frac{t\dot{y}_1(t)}{y_1(t)}=-\frac{x_1H_{x_1}'(x_1,x_2,y_1,y_2)}{H(x_1,x_2,y_1,y_2)} \\ \frac{t\dot{y}_2(t)}{y_2(t)}=-\frac{x_2H_{x_2}'(x_1,x_2,y_1,y_2)}{H(x_1,x_2,y_1,y_2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t)=\frac{x_1y_1}{t}\left(\frac{H_{y_1}'}{H}\right) \\ \dot{x}_2(t)=\frac{x_2y_2}{t}\left(\frac{H_{y_2}'}{H}\right) \\ \dot{y}_1(t)=-\frac{x_1y_1}{t}\left(\frac{H_{x_1}'}{H}\right) \\ \dot{y}_2(t)=-\frac{x_2y_2}{t}\left(\frac{H_{x_2}'}{H}\right) \end{cases}$, эта система не автономная , тогда добавим новую функцию $z(t)=t$. Откуда $\begin{cases} \dot{x}_1(t)=\frac{x_1y_1}{t}\left(\frac{H_{y_1}'}{H}\right) \\ \dot{x}_2(t)=\frac{x_2y_2}{t}\left(\frac{H_{y_2}'}{H}\right) \\ \dot{y}_1(t)=-\frac{x_1y_1}{t}\left(\frac{H_{x_1}'}{H}\right) \\ \dot{y}_2(t)=-\frac{x_2y_2}{t}\left(\frac{H_{x_2}'}{H}\right) \\ \dot{z}(t)=1 \end{cases}$.

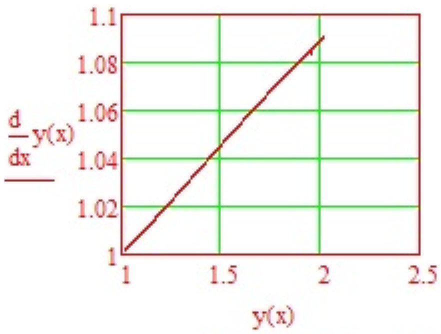
Производная функции $H(x_1,x_2,y_1,y_2)$ вдоль векторного поля этой системы , производная Ли это $H_t'=H_{x_1}'\left(\frac{x_1y_1}{t}\frac{H_{y_1}'}{H}\right)+H_{x_2}'\left(\frac{x_2y_2}{t}\frac{H_{y_2}'}{H}\right)+H_{y_1}'\left(-\frac{x_1y_1}{t}\frac{H_{x_1}'}{H}\right)+H_{y_2}'\left(-\frac{x_2y_2}{t}\frac{H_{x_2}'}{H}\right)+H_z'(x,y)1=0$,

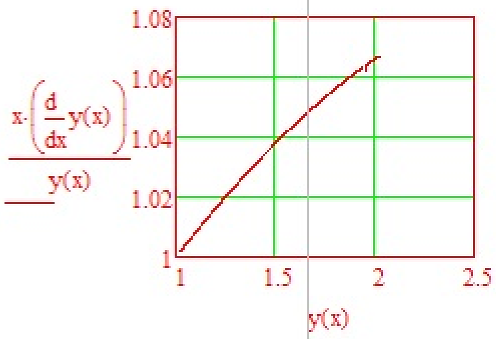
тогда функция $H(x_1,x_2,y_1,y_2)$ первый интеграл этой системы . Пусть $G(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$ произвольная функция . Найдем полную L производную функции $G(x_1(t),x_2(t),y_1(t),y_2(t))$, то есть

$L_t'G=L_{x_1}'G\bullet L_t'x_1+L_{x_2}'G\bullet L_t'x_2+L_{y_1}'G\bullet L_t'y_1+L_{y_2}'G\bullet L_t'y_2=L_{x_1}'G\bullet L_{y_1}'H+L_{x_2}'G\bullet L_{y_2}'H-L_{y_1}'G\bullet L_{x_1}'H-L_{y_2}'G\bullet L_{x_2}'H$. $\frac{x_jF_{x_j}'}{F}\frac{y_jH_{y_j}'}{H}-\frac{y_jF_{y_j}'}{F}\frac{x_jH_{x_j}'}{H}=\frac{x_jy_j}{FH}(F_{x_j}'H_{y_j}'-F_{y_j}'H_{x_j}')=\frac{x_jy_j}{FH}\{F,H\}$, где $\{F,H\}$ скобки Пуассона .

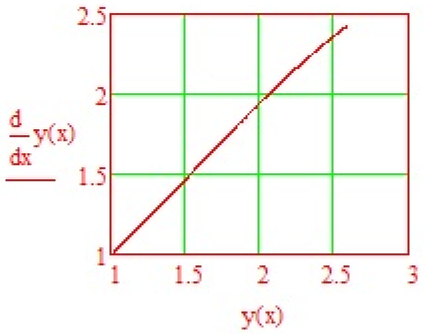
Example $L''y(x) = a\cdot\sin(y(x))$

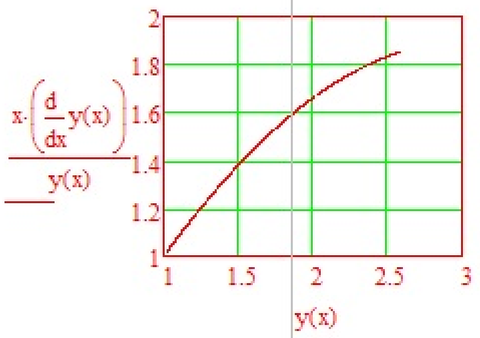
Given $a := 0.1$ $\quad 1 + \left(\frac{x\cdot y''(x)}{y'(x)}\right) - \left(\frac{x\cdot y'(x)}{y(x)}\right) = a\sin(y(x))$ $\quad y(1) = 1$ $\quad y'(1) = 1$ $\quad y := \mathrm{Odesolve}(x,2)$



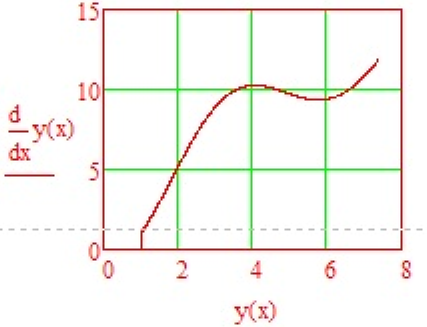


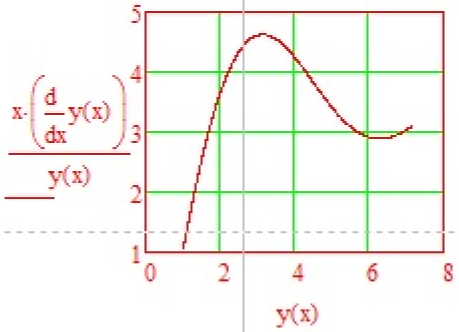
Given $a := 1$ $\quad 1 + \left(\frac{x\cdot y''(x)}{y'(x)}\right) - \left(\frac{x\cdot y'(x)}{y(x)}\right) = a\sin(y(x))$ $\quad y(1) = 1$ $\quad y'(1) = 1$ $\quad y := \mathrm{Odesolve}(x,2)$



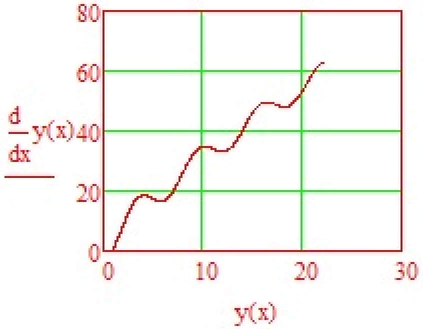


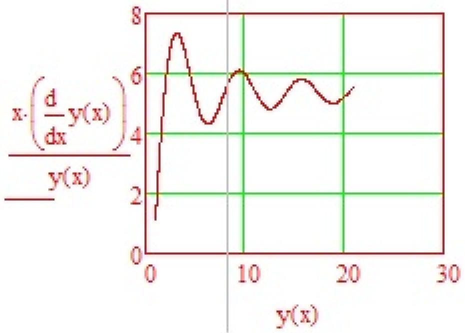
Given $a := 4$ $\quad 1 + \left(\frac{x\cdot y''(x)}{y'(x)}\right) - \left(\frac{x\cdot y'(x)}{y(x)}\right) = a\sin(y(x))$ $\quad y(1) = 1$ $\quad y'(1) = 1$ $\quad y := \mathrm{Odesolve}(x,2)$





Given $a := 7$ $\quad 1 + \left(\frac{x\cdot y''(x)}{y'(x)}\right) - \left(\frac{x\cdot y'(x)}{y(x)}\right) = a\sin(y(x))$ $\quad y(1) = 1$ $\quad y'(1) = 1$ $\quad y := \mathrm{Odesolve}(x,2)$





L дифференциальные уравнения с частными производными .

Пример . $L_x u(x,y)+L_y u(x,y)=a \Leftrightarrow xu_x(x,y)+yu_y(x,y)=au$ это уравнение Клеро .

Пример . $L_x' u(x,y) L_y' u(x,y)=a^2 \Leftrightarrow xu_x'(x,y)\, yu_y'(x,y)=a^2u^2(x,y)$ Пример $p=u_x'$, $q=u_y' \Rightarrow xypq=a^2u^2$.

Напишем функцию $F(x,y,p,q,u)=\dfrac{xypq}{u^2}-a^2$, рассмотрим уравнение $F_p'\Phi_x'+F_q'\Phi_y'+\left(pF_p'+qF_q'\right)\Phi_u'-\left(F_x'+pF_u'\right)\Phi_p'-\left(F_y'+qF_u'\right)\Phi_q'=0$,

где $\Phi(x,y,p,q,u)$ произвольная функция $\dfrac{xyq}{u^2}\Phi_x'+\dfrac{xyp}{u^2}\Phi_y'+\dfrac{2pqxy}{u^2}\Phi_u'-\left(\dfrac{ypq}{u^2}-\dfrac{2xyp^2q}{u^3}\right)\Phi_p'-\left(\dfrac{xpq}{u^2}-\dfrac{2xypq^2}{u^3}\right)\Phi_q'=0$.

Значит получим $\dfrac{u^2dx}{xyq}=\dfrac{u^2dy}{xyp}=\dfrac{u^2du}{2xypq}=\dfrac{dp}{\dfrac{2xyp^2q}{u^3}-\dfrac{ypq}{u^2}}=\dfrac{dq}{\dfrac{2xypq^2}{u^3}-\dfrac{xpq}{u^2}} \Rightarrow \dfrac{u^2dx}{xyq}=\dfrac{u^2dy}{xyp}\quad \dfrac{dx}{q}=\dfrac{dy}{p} \Rightarrow \dfrac{x}{q}=\dfrac{y}{p}+c$.

Откуда найдем систему функциональных уравнений $\begin{cases} xypq=a^2u^2 \\ \dfrac{x}{q}=\dfrac{y}{p}+c \end{cases}$. Решение этой системы $p=\dfrac{a^2u^2c\pm au\sqrt{a^2u^2c^2+4x^2y^2}}{2x^2y}, q=\dfrac{-a^2u^2c^2\pm\sqrt{a^2u^2c^2+4x^2y^2}}{2xy^2}$.

Пусть $c=0 \Rightarrow p=\pm\dfrac{au}{x}, q=\pm\dfrac{au}{y}$. Напишем дифференциальное уравнение Пфаффа $p(x,y,u,c)\,dx+q(x,y,u,c)\,dy-r(x,y,u,c)\,du=0$

Это уравнение интегрируемо если $p(r_y-q_u)+q(p_u-r_x)+r(q_x-p_y)=0$ $r=1$, тогда получим уравнение

$\pm\dfrac{au}{x}dx\pm\dfrac{au}{y}dy-du=0 \quad \pm\dfrac{adx}{x}\pm\dfrac{ady}{y}=\dfrac{du}{u} \quad a\ln cxy=\ln u \Rightarrow u=c(xy)^a, -a\ln cxy=\ln u \Rightarrow u=\dfrac{c}{(xy)^a}$.

Другое решение . $p=u_x', q=u_y' \Rightarrow \begin{cases} u_x'=\pm\dfrac{au}{x} \\ u_y'=\pm\dfrac{au}{y} \end{cases}$ из первого уравнения получим $\ln u=\pm a\ln x+z(y) \Rightarrow u=e^{\pm a\ln x+z(y)}=x^{\pm a}e^{z(y)}$, отсюда $u_y'=x^{\pm a}e^{z(y)}z'(y) \Rightarrow$

$x^{\pm a}e^{z(y)}z'(y)=\pm\dfrac{a}{y}x^{\pm a}e^{z(y)}$, тогда найдем $z'(y)=\pm\dfrac{a}{y}$ $dz=\pm\dfrac{a}{y}dy \Rightarrow z(y)=\pm a\ln yc$, значит $\ln u=\pm a\ln x\pm a\ln y \Rightarrow u=(xy)^a c, u=\dfrac{c}{(xy)^a}$.

Другое решение . $p=u_x', q=u_y' \Rightarrow \begin{cases} u_x'=\pm\dfrac{au}{x} \\ u_y'=\pm\dfrac{au}{y}\end{cases}$ из первого уравнения получим $\ln u=\pm a\ln x+z(y)\Rightarrow u=e^{\pm a\ln x+z(y)}=x^{\pm a}e^{z(y)}$, отсюда $u_y'=x^{\pm a}e^{z(y)}z'(y)\Rightarrow$

$x^{\pm a}e^{z(y)}z'(y)=\pm\dfrac{a}{y}x^{\pm a}e^{z(y)}$, тогда найдем $z'(y)=\pm\dfrac{a}{y}$ $dz=\pm\dfrac{a}{y}dy\Rightarrow z(y)=\pm a\ln yc$, значит $\ln u=\pm a\ln x\pm a\ln y\Rightarrow u=(xy)^a c, u=\dfrac{c}{(xy)^a}$.

Пример . $(L_x'u)^2+(L_y'u)^2=2a^2 \Leftrightarrow x^2(u_x')^2+y^2(u_y')^2=2a^2u^2$. Пусть $p=u_x'$ $q=u_y' \Rightarrow x^2p^2+y^2q^2=2a^2u^2$.

Напишем функцию $F(x,y,p,q,u)=x^2p^2+y^2q^2-2a^2u^2$ рассмотрим уравнение $F_p'\Phi_x'+F_q'\Phi_y'+(pF_p'+qF_q')\Phi_u'-(F_x'+pF_u')\Phi_p'-$

$-(F_y'+qF_u')\Phi_q'=0$,где $\Phi(x,y,p,q,u)$ произвольная функция $2x^2p\Phi_x'+2y^2q\Phi_y'+(2x^2p^2+2y^2q^2)\Phi_u'-(2xp^2-4a^2up)\Phi_p'-(2yq^2-4a^2uq)\Phi_q'=0$.

Значит получим $\dfrac{dx}{2x^2p}=\dfrac{dy}{2y^2q}=\dfrac{du}{2x^2p^2+2y^2q^2}=\dfrac{dp}{2xp^2-4a^2up}=\dfrac{dq}{2yq^2-4a^2uq}\Rightarrow\dfrac{dx}{2x^2p}=\dfrac{dy}{2y^2q}$ $\dfrac{1}{p}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{q}\left(-\dfrac{1}{y}\right)$.

Поэтому имеем систему уравнений $\begin{cases} px=qy \\ x^2p^2+y^2q^2=2a^2u^2\end{cases}\Rightarrow p=\pm\dfrac{au}{x}, q=\pm\dfrac{au}{y}$ $p=u_x', q=u_y' \Rightarrow \begin{cases} u_x'=\pm\dfrac{au}{x} \\ u_y'=\pm\dfrac{au}{y}\end{cases} \Rightarrow u=(xy)^a c, u=\dfrac{c}{(xy)^a}$.

Пример . $(L_x'u)^n+(L_y'u)^n=1$ Уравнение эквивалентно следующему $(xu_x')^n+(u_y'y)^n=u^n$. Найдем решение этого уравнения в виде $u(x,y)=Y(y)X(x)$,

тогда $L_y'u=L_y'Y$, $L_x'u=L_x'X$, получим уравнение $(L_x'X)^n+(L_y'Y)^n=1$, это возможно только если $(L_x'X)^n=1-(L_y'Y)^n=\lambda^n$, где λ постоянная , это дает

$(L_x'X)^n=\lambda^n$, $L_x'X=\lambda$, $\dfrac{xX'}{X}=\lambda$, $\dfrac{dX}{X}=\dfrac{\lambda}{x}dx$, $X=x^\lambda$, $1-(L_y'Y)^n=\lambda^n$, $L_y'Y=\sqrt[n]{1-\lambda^n}$, $\dfrac{yY'}{Y}=\sqrt[n]{1-\lambda^n}$, $\dfrac{dY}{Y}=\dfrac{\sqrt[n]{1-\lambda^n}}{y}dy$, $Y=y^{\sqrt[n]{1-\lambda^n}}$, поэтому $u(x,y)=x^\lambda y^{\sqrt[n]{1-\lambda^n}}c$.

Пример . $L_x^{(m)}u(x,y)+L_y^{(n)}u(x,y)=f(x)+g(y)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)\Rightarrow$
$L_x^{(m)}u=L^{(m)}X, L_y^{(n)}u=L^{(n)}Y$, откуда $L^{(m)}X+L^{(n)}Y=f(x)+g(y)\Rightarrow L^{(m)}X-f(x)=g(y)-L^{(n)}Y=\lambda$. Решая эти два уравнения найдем функции $X(x),Y(y)$.

Пример . $L_x^{(m)}u(x,y)L_y^{(n)}u(x,y)=f(x)g(y)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)\Rightarrow L_x^{(m)}u=L^{(m)}X, L_y^{(n)}u=L^{(n)}Y$,
значит $L^{(m)}XL^{(n)}Y=f(x)g(y)\Rightarrow \dfrac{L^{(m)}X}{f(x)}=\dfrac{g(y)}{L^{(n)}Y}=\lambda$. Решая эти два уравнения найдем функции $X(x),Y(y)$.

Пример . $\begin{cases} L_x'u=\dfrac{x}{y} \\ L_y'u=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{xu_x'}{u}=\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{yu_y'}{u}=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x'=\dfrac{u}{y} \\ u_y'=ux \end{cases}$, $\begin{cases} u_x'=A(x,y,u) \\ u_y'=B(x,y,u) \end{cases}$, $A_y'+BA_u'-B_x'-AB_u'=0$.

Для этой системы получим $-\dfrac{u}{y^2}+ux\dfrac{1}{y}-u-\dfrac{u}{y}x=0\Rightarrow -\dfrac{u}{y^2}-u=0\Rightarrow -u\left(\dfrac{1}{y^2}+1\right)=0$, тогда $u(x,y)=0$.

Пример . $xL_x'u+yL_y'u+zL_z'u=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2u_x'}{u}+\dfrac{y^2u_y'}{u}+\dfrac{z^2u_z'}{u}=0\Rightarrow x^2u_x'+y^2u_y'+z^2u_z'=0$.

Характеристическая система этого уравнения $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=y^2 \\ \dfrac{dz}{dt}=z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x}=t+c_1 \\ -\dfrac{1}{y}=t+c_2 \\ -\dfrac{1}{z}=t+c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{t+c_1} \\ y=-\dfrac{1}{t+c_2} \\ z=-\dfrac{1}{t+c_3} \end{cases}$, отсюда $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=c_1-c_2=c, -\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=c_2-c_3=c$.

Поэтому $v_1=-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, v_2=-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ первый интеграл этой системы . Общее решение уравнения

$u(x,y,z)=F(v_1,v_2)=F\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y},-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, где $F(\xi_1,\xi_2)$ произвольная функция .

Пример . $\begin{cases} L_x'u=\dfrac{x}{y} \\ L_y'u=xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{xu_x'}{u}=\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{yu_y'}{u}=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x'=\dfrac{u}{y} \\ u_y'=ux \end{cases}$, $\begin{cases} u_x'=A(x,y,u) \\ u_y'=B(x,y,u) \end{cases}$, $A_y'+BA_u'-B_x'-AB_u'=0$.

Для этой системы получим $-\frac{u}{y^2}+ux\frac{1}{y}-u-\frac{u}{y}x=0\Rightarrow-\frac{u}{y^2}-u=0\Rightarrow-u\left(\frac{1}{y^2}+1\right)=0$, тогда $u(x,y)=0$.

Пример $xL_x'u+yL_y'u+zL_z'u=0\Leftrightarrow\frac{x^2u_x'}{u}+\frac{y^2u_y'}{u}+\frac{z^2u_z'}{u}=0\Rightarrow x^2u_x'+y^2u_y'+z^2u_z'=0$. Характеристическая система этого уравнения

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=y^2 \\ \dfrac{dz}{dt}=z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x}=t+c_1 \\ -\dfrac{1}{y}=t+c_2 \\ -\dfrac{1}{z}=t+c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{t+c_1} \\ y=-\dfrac{1}{t+c_2} \\ z=-\dfrac{1}{t+c_3} \end{cases}$, значит $-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c_1-c_2=c,-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c_2-c_3=c$. Откуда $v_1=-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, v_2=-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ Это первые интегралы данной системы .

Общее решение уравнения $u(x,y,z)=F(v_1,v_2)=F\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y},-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, где $F(\xi_1,\xi_2)$ произвольная функция .

Другое решение . Характеристическая система этого уравнения $\begin{cases} L_t' x(t) = x \\ L_t' y(t) = y \\ L_t' z(t) = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{tx'}{x} = x \\ \dfrac{ty'}{y} = y \\ \dfrac{tz'}{z} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dt}{t} \\ \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dt}{t} \\ \dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dt}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x} = \ln t + c_1 \\ -\dfrac{1}{y} = \ln t + c_2 \\ -\dfrac{1}{z} = \ln t + c_3 \end{cases}$,

Поэтому $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = c_1 - c_2 = c$, $-\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = c_2 - c_3 = c$. Отсюда $v_1 = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, v_2 = -\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ первый интеграл данной системы .

Общее решение данного уравнения $u(x, y, z) = F(v_1, v_2) = F\left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, -\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$, где $F(\xi_1, \xi_2)$ произвольная дифференцируемая функция .

Пример . $x^n L_x' u + y^n L_y' u + z^n L_z' u = ru^n \Leftrightarrow \dfrac{x^{n+1} u_x'}{u} + \dfrac{y^{n+1} u_y'}{u} + \dfrac{z^{n+1} u_z'}{u} = ru^n \Rightarrow x^{n+1} u_x' + y^{n+1} u_y' + z^{n+1} u_z' = ru^{n+1}$

Характеристическая система этого уравнения $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^{n+1} \\ \dfrac{dy}{dt} = y^{n+1} \\ \dfrac{dz}{dt} = z^{n+1} \\ \dfrac{du}{dt} = ru^{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{nx^n} = t + c_1 \\ -\dfrac{1}{ny^n} = t + c_2 \\ -\dfrac{1}{nz^n} = t + c_3 \\ -\dfrac{1}{nu^n} = rt + c_4 \end{cases}$, откуда $-\dfrac{1}{nx^n} + \dfrac{1}{ny^n} = c_1 - c_2 = c$, $-\dfrac{1}{ny^n} + \dfrac{1}{nz^n} = c_2 - c_3 = c$, $-\dfrac{1}{nz^n} + \dfrac{1}{rnu^n} = c_3 - \dfrac{c_4}{r} = c$,

первый интеграл данной системы, $v_1 = -\dfrac{1}{nx^n} + \dfrac{1}{ny^n}, v_2 = -\dfrac{1}{ny^n} + \dfrac{1}{nz^n}, v_3 = -\dfrac{1}{nz^n} + \dfrac{1}{rnu^n}$, общее решение данного уравнения $F(v_1, v_2, v_3) = 0$.

Пример . $(y+z) L_x' u + (x+z) L_y' u + (x+y) L_z' u = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(y+z) x u_x'}{u} + \dfrac{(x+z) y u_y'}{u} + \dfrac{(x+y) z u_z'}{u} = 0 \Rightarrow (y+z) x u_x' + (x+z) y u_y' + (x+y) z u_z' = 0$