Пример . $p_{xt}''u(x,t)=g(u(x,t))$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $u_{xt}''(x,t)u(x,t)-u_t'(x,t)u_x'(x,t)=u^2(x,t)\ln g(u(x,t))$

Это уравнение гиперболического типа . Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=f(z)$, где $z=xt$, тогда $u_x'=f_z'(z)z_x'=f_z'(z)t$, $u_t'=f_z'(z)z_t'=f_z'(z)x$,

$u_{xt}''=\left(u_x'\right)_t'=\left(f_z'(z)t\right)_t'=f_{zz}''(z)z_t't+f_z'(z)t_t'=f_{zz}''(z)xt+f_z'(z)=f_{zz}''(z)z+f_z'(z)$, получим уравнение $\left(f_{zz}''(z)z+f_z'(z)\right)f(z)-\left(f_z'(z)\right)^2z=f^2(z)\ln g(f(z))$.

Пусть $f(z)=e^{\phi(z)}$, тогда $f_z'=e^{\phi}\phi_z'$, $f_{zz}''=\left(e^{\phi}\phi_z'\right)_z'=e^{\phi}\left(\phi_{zz}''+\left(\phi_z'\right)^2\right)$, отсюда $\phi_{zz}''z+\phi_z'=\ln g\left(e^{\phi}\right)$.

Найдем волновое решение этого уравнения . Пусть $u(x,t)=f(\xi)$, где $\xi=x-vt$, откуда $u_x'=f_\xi'\xi_x'=f_\xi'$, $u_t'=f_\xi'\xi_t'=-vf_\xi'$, $u_{xt}''=\left(u_x'\right)_t'=\left(f_\xi'\right)_t'=f_{\xi\xi}''\xi_t'=-vf_{\xi\xi}''$,

получим уравнение $-v\phi_{\xi\xi}''=\ln g\left(e^{\phi}\right)$.

Другое решение , решение найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t'=e^{\omega}\omega_t'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2+\omega_{t^2}''\right)$,

$u_{xt}''=e^{\omega}\left(\omega_t'\omega_x'+\omega_{xt}''\right)$, тогда $\omega_{xt}''=\ln g\left(e^{\omega}\right)$.

Пример . $p_{xt}''u(x,t)\,p_t'u(x,t)=r$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $e^{\frac{u_{xt}''u-u_t'u_x'}{u^2}}e^{\frac{u_t'}{u}}=r$, $\frac{u_{xt}''u-u_t'u_x'}{u^2}+\frac{u_t'}{u}=\ln r$.

Это уравнение гиперболического типа . Пусть $p_t'u(x,t)=v(x,t)$, so $p_{xt}''u(x,t)=p_x'v(x,t)$, получим уравнение $v\bullet p_x'v=r$, значит $v\bullet e^{\frac{v_x'}{v}}=r$, $\frac{dv}{v(\ln r-\ln v)}=dx$,

$v(x,t)=re^{-e^{-x+c(t)}}$, поэтому $p_t'u(x,t)=re^{-e^{-x+c(t)}}$, $e^{\frac{u_t'}{u}}=re^{-e^{-x+c(t)}}$, $\frac{u_t'}{u}=\ln r-e^{-x+c(t)}$, $\frac{du}{u}=\left(\ln r-e^{-x+c(t)}\right)dx$, $u(x,t)=e^{x\ln r+e^{-x+c(t)}+\phi(x)}=\mu(x)x^re^{e^{-x+c(t)}}$,

где $\mu(x)=e^{\phi(x)}$, граничные условия $u(x,0)=e^{-x}$, $p_t'u(0,t)=re^t$, отсюда $re^t=re^{-e^{c(t)}}$, тогда $c(t)=\ln|-t|$, $v(x,t)=re^{te^{-x}}$, $u(x,t)=\mu(x)x^re^{-te^{-x}}$,

тогда $e^{-x}=\mu(x)x^r$, $\mu(x)=\frac{e^{-x}}{x^r}$, $u(x,t)=e^{-\left(x+te^{-x}\right)}$.

Другое решение . Пусть $u(x,t)=T(t)X(x)$, откуда $p_x'u(x,t)=p_x'X(x)$, $p_t'u(x,t)=p_t'T(t)$, $p_{xt}''u(x,t)=1$, значит $p_t'T(t)=r$, решение этого уравнения

Пусть $f(\xi)=e^{\phi(\xi)}$, тогда $f_{\xi}'=e^{\phi}\phi_{\xi}'$, $f_{\xi\xi}''=\left(e^{\phi}\phi_{\xi}'\right)_{\xi}'=e^{\phi}\left(\phi_{\xi\xi}''+\left(\phi_{\xi}'\right)^2\right)$, получаем $\phi_{\xi\xi}''=-\frac{\ln a}{v}$, $\phi(\xi)=-\frac{\ln a}{2v}\xi^2+c\xi+c_1$, находим $f(\xi)=a^{-\frac{\xi^2}{2a}}c^{\xi}c_1$, $u(x,t)=a^{-\frac{(x-vt)^2}{2a}}c^{x-vt}c_1$.

Другое решение найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t'=e^{\omega}\omega_t'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2+\omega_{t^2}''\right)$, $u_{xt}''=e^{\omega}\left(\omega_t'\omega_x'+\omega_{xt}''\right)$, тогда $\omega_{xt}''+\omega_t'=\ln r$.

Пример . $p_{xt}''u(x,t)\left(p_t'u(x,t)\right)^{g(x)}=f(x)$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $e^{\frac{u_{tx}''u-u_x'u_t'}{u^2}}\left(e^{\frac{u_v'}{u}}\right)^{g(x)}=f(x)$, $\frac{u_{xt}''u-u_t'u_x'}{u^2}+\frac{u_t'g(x)}{u}=\ln f(x)$

Это уравнение параболического вида . Пусть $p_t'u(x,t)=v(x,t)$, поэтому $p_{xt}''u(x,t)=p_x'v(x,t)$, найдем уравнение $p_x'v\bullet v^{g(x)}=f(x)$, решение этого уравнения

$v(x,t)=\left(c(t)e^{\int\ln\left(f(x)^{e^{\int g(x)dx}}\right)dx}\right)^{e^{-\int g(x)dx}}$, отсюда $p_t'u(x,t)=v(x,t)$, $e^{\frac{u_t'}{u}}=v$, $\frac{u_t'}{u}=\ln v$, $\frac{du}{u}=vdt$, $\ln u=\int vdt+\phi(x)$, $u(x,t)=\mu(x)e^{\int v(x,t)dy}$, где $\mu(x)=e^{\phi(x)}$.

Другое решение найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t'=e^{\omega}\omega_t'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2+\omega_{t^2}''\right)$,

$u_{xt}''=e^{\omega}\left(\omega_t'\omega_x'+\omega_{xt}''\right)$, $\omega_{xt}''+\omega_t'g(x)=\ln f(x)$.

Пример . $p_t'u(x,t)\,p_x'u(x,t)=\left(p_{xt}''u(x,t)\right)^r$, это уравнение эквииалентно следующему дифференциальному уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}}e^{\frac{u_x'}{u}}=e^{r\frac{u_{xt}''u-u_t'u_x'}{u^2}}$, $u\left(u_t'+u_x'\right)=r\left(u_{xt}''u-u_t'u_x'\right)$.

Это уравнение гиперболического вида . Найдем волновое решение . Пусть $u(x,t)=f(\xi)$, где $f_\xi'(1-v)=-rv\left(ff_{\xi\xi}''-\left(f_\xi'\right)^2\right)$. Пусть $f(\xi)=e^{\phi(\xi)}$, тогда

$f_\xi'=e^\phi\phi_\xi'$, $f_{\xi\xi}''=\left(e^\phi\phi_\xi'\right)_\xi'=e^\phi\left(\phi_{\xi\xi}''+\left(\phi_\xi'\right)^2\right)$, откуда $rv\phi_{\xi\xi}''+(1-v)\phi_\xi'=0$, $\phi(\xi)=ce^{\frac{v-1}{rv}\xi}+c_1$, значит $f(\xi)=e^{ce^{\frac{v-1}{rv}\xi}}c_1$, $u(x,t)=e^{ce^{\frac{v-1}{rv}(x-vt)}}c_1$.

Другое решение . Пусть $u(x,t)=T(t)X(x)$, поэтому $p_x'u(x,t)=p_x'X(x)$, $p_t'u(x,t)=p_t'T(t)$, $p_{xt}''u(x,t)=1$, отсюда $p_x'X(x)\,p_t'T(t)=1$, $p_x'X(x)=\dfrac{1}{p_t'T(t)}=\lambda$, $p_x'X(x)=\lambda$, $X(x)=\lambda^x c$, $p_t'T(t)=\dfrac{1}{\lambda}$, $T(t)=\lambda^{-t}c$, откуда $u(x,t)=\lambda^{x-t}c$.

Другое решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t'=e^\omega\omega_t'$, $u_x'=e^\omega\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^\omega\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}''=e^\omega\left(\left(\omega_t'\right)^2+\omega_{t^2}''\right)$, $u_{xt}''=e^\omega\left(\omega_t'\omega_x'+\omega_{xt}''\right)$, тогда $\omega_{xt}''+\omega_t'=\ln r$.

Пример . $p_t'u(x,t)\left(p_{x^2}''u(x,t)\right)^a=\left(p_{x^3}'''u(x,t)\right)^b$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}}e^{a\frac{u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2}{u^2}}=e^{b\frac{u_{x^3}'''u^2-3u_{x^2}''u_x'u+2\left(u_x'\right)^3}{u^3}}$, $u_t'u^2+a\left(u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2\right)u=b\left(u_{x^3}'''u^2-3u_{x^2}''u_x'u+2\left(u_x'\right)^3\right)$.

Пусть $\zeta=x-vt,\eta=1$, откуда $u_t'=-vu_\zeta',u_x'=u_\zeta',u_{x^n}^{(n)}=u_{\zeta^n}^{(n)}$, тогда $-vu_\zeta'u^2+a\left(u_{\zeta^2}''u-\left(u_\zeta'\right)^2\right)u=b\left(u_{\zeta^3}'''u^2-3u_{\zeta^2}''u_\zeta'u+2\left(u_\zeta'\right)^3\right)$.

Пусть $u(\zeta)=e^{\varphi(\zeta)}$, тогда $u_\zeta'=e^\varphi\varphi_\zeta',u_{\zeta^2}''=\left(e^\varphi\varphi_\zeta'\right)_\zeta'=e^\varphi\left(\left(\varphi_\zeta'\right)^2+\varphi_{\zeta^2}''\right),u_{\zeta^3}'''=\left(e^\varphi\left(\left(\varphi_\zeta'\right)^2+\varphi_{\zeta^2}''\right)\right)_\zeta'=e^\varphi\left(\left(\varphi_\zeta'\right)^3+3\varphi_\zeta'\varphi_{\zeta^2}''+\varphi_{\zeta^3}'''\right)$, после подстановки найдем уравнение $v\varphi_\zeta'-a\varphi_{\zeta^2}''+b\varphi_{\zeta^3}'''=0$, $n\left(v-an+bn^2\right)=0, n=0, n_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4bv}}{2}$,

если $\left(a^2-4bv\right)>0$, то $\varphi(\zeta)=c+c_1e^{n_1\zeta}+c_2e^{n_2\zeta}$ значит $u(x,t)=e^{c+c_1e^{n_1(x-vt)}+c_2e^{n_2(x-vt)}}$.

Пусть $a=5$, $b=1$, $v=4$,so $n_1=1$, $n_2=4$, поэтому $\varphi(\zeta)=c+c_1e^\zeta+c_2e^{4\zeta}$. Пусть $\varphi(0)=0$, $\varphi_\zeta'(0)=1$, $\varphi_{\zeta^2}''(0)=2$, отсюда имеем систему $\begin{cases}c+c_1+c_2=0\\c_1+4c_2=1\\c_1+16c_2=2\end{cases}$, решение системы $c=-\dfrac{3}{4}$, $c_1=\dfrac{2}{3}$, $c_2=\dfrac{1}{12}$,

тогда имеем $\varphi(\zeta)=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}e^\zeta+\dfrac{1}{12}e^{4\zeta}$, $u(x,t)=e^{-\frac{3}{4}+\frac{2}{3}e^{(x-vt)}+\frac{1}{12}e^{4(x-vt)}}$

Другое решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$, откуда $p_t'u(x,t)=p_t'T(t)$, $p_{x^2}''u(x,t)=p_{x^2}''X(x)$, $p_{x^3}'''u(x,t)=p_{x^3}'''X(x)$, тогда $p_t'T(t)\left(p_{x^2}''X(x)\right)^a=\left(p_{x^3}'''X(x)\right)^b$, тогда $p_t'T(t)=\dfrac{\left(p_{x^3}'''X(x)\right)^b}{\left(p_{x^2}''X(x)\right)^a}=\lambda$.

Получаем два дифференциальных уравнения $p_t'T(t)=\lambda$, $e^{\frac{T'}{T}}=\lambda$, $\frac{T'}{T}=\ln\lambda$. Пусть $T(t)=e^{G(t)}$, поэтому $T'(t)=e^{G(t)}G'(t)$, $\frac{e^G G'}{e^G}=\ln\lambda$, $G'=\ln\lambda$, $dG=\ln\lambda dt$, $G(t)=t\ln\lambda+c$, $T(t)=e^{t\ln\lambda+c}=c\lambda^t$. $\left(p_{x^3}'''X(x)\right)^b=\lambda\left(p_{x^2}''X(x)\right)^a$,

$e^{b\frac{X'''X^2-3X''X'X+2(X')^3}{X^3}}=\lambda e^{a\frac{X''X-(X')^2}{X^2}}$, $b\left(X'''X^2-3X''X'X+2(X')^3\right)=a\left(X''X-(X')^2\right)X+\ln\lambda$. Пусть $\frac{a}{b}=\gamma$, $X(x)=e^{Q(x)}$, значит $X'(x)=e^{Q(x)}Q'(x)$, $X''(x)=e^{Q(x)}\left(Q'(x)\right)^2+e^{Q(x)}Q''(x)=e^{Q(x)}\left(\left(Q'(x)\right)^2+Q''(x)\right)$,

$X'''(x)=e^{Q(x)}Q'(x)\left(\left(Q'(x)\right)^2+Q''(x)\right)+e^{Q(x)}\left(2Q'(x)Q''(x)+Q'''(x)\right)=e^{Q(x)}\left(\left(Q'(x)\right)^3+3Q'(x)Q''(x)+Q'''(x)\right)$. Подставим это выражение в уравнение

$e^{3Q}\left((Q')^3+3Q'Q''+Q'''-3\left((Q')^2+Q''\right)Q'+2(Q')^3\right)=\gamma\left((Q')^2+Q''-(Q')^2\right)e^{3Q}+\frac{\ln\lambda}{b}$, $Q'''=\gamma Q''+\frac{\ln\lambda}{b}e^{-3Q}$. Это уравнение можно решить численным методом .

Пусть $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, отсюда $u_t'=e^{\omega}\omega_t'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2+\omega_{t^2}''\right)$, $u_{x^3}'''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^3+3\omega_x'\omega_{x^2}''+\omega_{x^3}'''\right)$, тогда $\omega_t'+a\omega_{x^2}''=b\omega_{x^3}'''$.

Это уравнение можно написать в виде $\frac{\partial}{\partial t}(\omega)=\frac{\partial}{\partial x}\left(b\omega_{xx}''-\omega_x'a\right)$, поскольку $\omega(x,t)=\ln u(x,t)$, то $\omega_x'=\frac{u_x'}{u}$, $\omega_{xx}''=\left(\frac{u_x'}{u}\right)_x'=\frac{u_{xx}''u-\left(u_x'\right)^2}{u^2}$, это дает $\frac{\partial}{\partial t}(\ln u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{u_{xx}''u-\left(u_x'\right)^2}{u^2}-\frac{u_x'}{u}\right)$.

Получили закон сохранения для данного дифференциального уравнения какой физический смысл этого закона .

Пример . $p_t'u(x,t)\left(p_{x^2}''u(x,t)\right)^{a\ln u}=\left(p_{x^3}'''u(x,t)\right)^b$ это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}}e^{a\ln u\frac{u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2}{u^2}}=e^{b\frac{u_{x^3}'''u^2-3u_{x^2}''u_x'u+2\left(u_x'\right)^3}{u^3}}$, $u_t'u^2+a\ln u\left(u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2\right)u=b\left(u_{x^3}'''u^2-3u_{x^2}''u_x'u+2\left(u_x'\right)^3\right)$. Пусть $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$,

тогда $u_t'=e^{\omega}\omega_t'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2+\omega_{t^2}''\right)$, $u_{x^3}'''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^3+3\omega_x'\omega_{x^2}''+\omega_{x^3}'''\right)$, итак $\omega_t'+a\omega\omega_{x^2}''=b\omega_{x^3}'''$.Пусть $\omega(x,t)=\phi(\xi)$, где $\zeta=x-vt,\eta=1$, отсюда $\omega_t'=-v\phi_\zeta'$, $\omega_x'=\phi_\zeta'$, $\omega_{x^n}{}^{(n)}=\phi_{\zeta^n}{}^{(n)}$,

после подстановки получим уравнение $v\phi_\zeta'-a\phi\phi_{\zeta^2}''+b\phi_{\zeta^3}'''=0$, это уравнение имеет частное решение $\phi(\xi)=-\frac{3}{a}\sqrt{\frac{vb}{2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{v}{2b}}\xi\right)r$, где v , r произвольные постояные , можно проверить подстановкой ,

тогда $\omega(x,t)=-\frac{3}{a}\sqrt{\frac{vb}{2}}\tanh\left(\sqrt{\frac{v}{2b}}(x-vt)\right)r$. Это КДФ уравнение .

Пусть $\phi_\xi'=\mu(\phi)$, тогда $\phi_{\xi^2}''=\mu\mu_\phi'$, $\phi_{\xi^3}'''=\mu^2\mu_{\phi^2}''+\mu\left(\mu_\phi'\right)^2$, получим уравнение $v\mu-a\phi\mu_\phi'+b\left(\mu^2\mu_{\phi^2}''+\mu\left(\mu_\phi'\right)^2\right)=0$ Это уравнение можно решить численно .

Другое решение . Пусть $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, откуда $p_t'u=e^{\omega_t'}$, $p_x'u=e^{\omega_x'}$, $p_{x^2}''u=e^{\omega_{x^2}''}$, $p_{x^n}{}^{(n)}u=e^{\omega_{x^n}{}^{(n)}}$, тогда $e^{\omega_t'}\left(e^{w_{x^2}''}\right)^{a\ln e^{\omega}}=\left(e^{\omega_{x^3}'''}\right)^b$, тогда $\omega_t'+a\omega\omega_{x^2}''=b\omega_{x^3}'''$.

Пример . $p_x' u(x,t)\left(p_{xt}'' u(x,t)\right)^a = \left(p_{txx}''' u(x,t)\right)^b$ это уравнение эквивалентно следующему уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}} e^{a\frac{u_{xt}''u - u_t'u_x'}{u^2}} = e^{b\frac{u_{txx}'''u^2 - u_{xx}''u_t'u - 2u_{tx}''u_x'u + 2\left(u_x'\right)^2 u_t'}{u^3}}$, $u_t'u^2 + a\left(u_{xt}''u - u_t'u_x'\right)u = b\left(u_{txx}'''u^2 - u_{xx}''u_t'u - 2u_{tx}''u_x'u + 2\left(u_x'\right)^2 u_t'\right)$. Пусть $u(x,t) = e^{\omega(x,t)}$, значит $u_t' = e^{\omega}\omega_t'$, $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_{xx}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{xx}''\right)$, $u_{tx}'' = e^{\omega}\left(\omega_x'\omega_t' + \omega_{tx}''\right)$, $u_{txx}''' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2\omega_t' + 2\omega_{tx}''\omega_x' + \omega_{xx}''\omega_t' + \omega_{txx}'''\right)$, $p_x'u = e^{\omega_x'}$, $p_{xt}''u = e^{\omega_{xt}''}$, $p_{txx}'''u = e^{\omega_{txx}'''}$,

получим уравнение $\omega_x' + a\omega_{xt}'' = b\omega_{txx}'''$. Пусть $\omega(x,t) = \phi(\xi)$, где $\xi = x - vt$, $\eta = 1$, тогда найдем $\omega_t' = -v\phi_\xi'$, $\omega_x' = \phi_\xi'$, $\omega_{xt}'' = -v\phi_{\xi\xi}''$, $\omega_{txx}''' = -v\phi_{\xi\xi\xi}'''$, поэтому $-\phi_\xi' + av\phi_{\xi\xi}'' = bv\phi_{\xi\xi\xi}'''$.

Пример . Рассмотрим систему $\begin{cases} p'_x u(x,y)\, p'_y v(x,y) = \gamma \\ \dfrac{p'_y u(x,y)}{p'_x v(x,y)} = \eta \end{cases}$, найдем p_x производную от первого уравнения , p_y производную от второго уравнения $\begin{cases} p''_{xx} u(x,y)\, p''_{yx} v(x,y) = 1 \\ \dfrac{p''_{yy} u(x,y)}{p''_{xy} v(x,y)} = 1 \end{cases}$, тогда $p''_{xx} u(x,y)\, p''_{yy} u(x,y) = 1$,

тогда $e^{\frac{u''_{xx}(x,y)u(x,y) - \left(u'_x(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)}} e^{\frac{u''_{yy}(x,y)u(x,y) - \left(u'_y(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)}} = 1$, $\dfrac{u''_{xx}(x,y)u(x,y) - \left(u'_x(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)} + \dfrac{u''_{yy}(x,y)u(x,y) - \left(u'_y(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)} = 0$, $\left(u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y)\right)u(x,y) - \left(\left(u'_x(x,y)\right)^2 + \left(u'_y(x,y)\right)^2\right) = 0$.

Пусть $u(x,y) = e^{\omega(x,y)}$, отсюда $u_y' = e^{\omega}\omega_y'$, $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{x^2}''\right)$, $u_{y^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y'\right)^2 + \omega_y''\right)$, откуда $\omega_{x^2}'' + \omega_{y^2}'' = 0$ Это уравнение Лапласа . Функцию $v(x,y)$ можно найти аналогично .

Другое решение этой системы найдем в виде $u(x,y) = X_1(x)Y_1(y)$, $v(x,y) = X_2(x)Y_2(y)$, значит $p_x'u(x,y) = p_x'X_1(x)$, $p_y'u(x,y) = p_y'Y_1(y)$, $p_y'v(x,y) = p_y'Y_2(y)$, $p_x'v(x,y) = p_x'X_2(x)$. Поэтому имеем систему

$\begin{cases} p_x'X_1(x)\, p_y'Y_2(y) = \gamma \\ \dfrac{p_y'Y_1(y)}{p_x'X_2(x)} = \eta \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \dfrac{p_x'X_1(x)}{\gamma} = \dfrac{1}{p_y'Y_2(y)} = \lambda \\ p_y'Y_1(y) = p_x'X_2(x)\eta = \lambda \end{cases}$, тогда $X_1(x) = (\lambda\gamma)^x$, $Y_2(y) = \dfrac{c_2(x)}{\lambda^y}$, $Y_1(y) = c_1(x)\lambda^y$, $X_2(x) = \left(\dfrac{\lambda}{\eta}\right)^x$, отсюда $u(x,y) = c_1(x)\gamma^x\lambda^{x+y}$, $v(x,y) = c_2(x)\eta^{-x}\lambda^{x-y}$.

Функции $c_2(x)$, $c_1(x)$ можно найти из некоторых начальных условий .

$u_t' = e^{\omega}\omega_t'$, $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_{xx}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{xx}''\right)$, $u_{tx}'' = e^{\omega}\left(\omega_x'\omega_t' + \omega_{tx}''\right)$, $u_{txx}''' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2\omega_t' + 2\omega_{tx}''\omega_x' + \omega_{xx}''\omega_t' + \omega_{txx}'''\right)$, $p_x'u = e^{\omega_x'}$, $p_{xt}''u = e^{\omega_{xt}''}$, $p_{txx}'''u = e^{\omega_{txx}'''}$,

получим уравнение $\omega_x' + a\omega_{xt}'' = b\omega_{txx}'''$. Пусть $\omega(x,t) = \phi(\xi)$, где $\xi = x - vt$, $\eta = 1$, тогда найдем $\omega_t' = -v\phi_\xi'$, $\omega_x' = \phi_\xi'$, $\omega_{xt}'' = -v\phi_{\xi\xi}''$, $\omega_{txx}''' = -v\phi_{\xi\xi\xi}'''$, поэтому

$-\phi_\xi' + av\phi_{\xi\xi}'' = bv\phi_{\xi\xi\xi}'''$.

Пример . Рассмотрим систему $\begin{cases} p'_x\, u(x,y)\, p'_y\, v(x,y) = \gamma \\ \dfrac{p'_y\, u(x,y)}{p'_x\, v(x,y)} = \mu \end{cases}$, найдем p_x производную от первого уравнения , p_y производную от второго уравнения

$\begin{cases} p''_{xx}\, u(x,y)\, p''_{yx}\, v(x,y) = 1 \\ \dfrac{p''_{yy}\, u(x,y)}{p''_{xy}\, v(x,y)} = 1 \end{cases}$, тогда $p''_{xx}\, u(x,y)\, p''_{yy}\, u(x,y) = 1$ тогда $e^{\frac{u''_{xx}(x,y)u(x,y)-\left(u'_x(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)}} e^{\frac{u''_{yy}(x,y)u(x,y)-\left(u'_y(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)}} = 1$,

$\dfrac{u''_{xx}(x,y)u(x,y) - \left(u'_x(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)} + \dfrac{u''_{yy}(x,y)u(x,y) - \left(u'_y(x,y)\right)^2}{u^2(x,y)} = 0$, $\left(u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y)\right)u(x,y) - \left(\left(u'_x(x,y)\right)^2 + \left(u'_y(x,y)\right)^2\right) = 0$.

Пусть $u(x,y) = e^{\omega(x,y)}$, отсюда $u_y' = e^{\omega}\omega_y'$, $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{x^2}''\right)$, $u_{y^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y'\right)^2 + \omega_y''\right)$, откуда $\omega_{x^2}'' + \omega_{y^2}'' = 0$ Это уравнение Лапласа .

Функцию $v(x,y)$ можно найти аналогично .

Другое решение этой системы найдем в виде $u(x,y) = X_1(x)Y_1(y)$, $v(x,y) = X_2(x)Y_2(y)$,

значит $p_x'u(x,y) = p_x'X_1(x)$, $p_y'u(x,y) = p_y'Y_1(y)$, $p_y'v(x,y) = p_y'Y_2(y)$, $p_x'v(x,y) = p_x'X_2(x)$. Поэтому имеем систему

$\begin{cases} p_x'X_1(x)\, p_y'Y_2(y) = \gamma \\ \dfrac{p_y'Y_1(y)}{p_x'X_2(x)} = \mu \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \dfrac{p_x'X_1(x)}{\gamma} = \dfrac{1}{p_y'Y_2(y)} = \lambda \\ p_y'Y_1(y) = p_x'X_2(x)\,\mu = \lambda \end{cases}$, тогда $X_1(x) = (\lambda\gamma)^x$, $Y_2(y) = \dfrac{c_2(x)}{\lambda^y}$, $Y_1(y) = c_1(x)\lambda^y$, $X_2(x) = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^x$,

отсюда $u(x,y) = c_1(x)\gamma^x\lambda^{x+y}$, $v(x,y) = c_2(x)\mu^{-x}\lambda^{x-y}$. Функции $c_2(x)$, $c_1(x)$ можно найти из некоторых начальных условий .

Пример . Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} p'_x\, u(x,y)\, p'_y\, v(x,y) = e^{x+y} \\ \dfrac{p'_y\, u(x,y)}{p'_x\, v(x,y)} = e^{y-x} \end{cases}$ эта система уравнений эквивалентна следующей системе $\begin{cases} u_x{}'(x,y) + v_y{}'(x,y) = u(x,y)e^{x+y} \\ u_y{}'(x,y) - v_x{}'(x,y) = u(x,y)e^{y-x} \end{cases}$,

аналогично получим $\begin{cases} p''_{xx}\, u(x,y)\, p''_{yx}\, v(x,y) = e \\ \dfrac{p''_{yy}\, u(x,y)}{p''_{xy}\, v(x,y)} = e \end{cases}$, из этой системы найдем $\omega_{x^2}{}'' + \omega_{y^2}{}'' = e^2$ это уравнение Пуассона .

Другое решение этой системы уравнений найдем в виде $u(x,y) = X_1(x)Y_1(y)$, $v(x,y) = X_2(x)Y_2(y)$,

поэтому $p_x{}'u(x,y) = p_x{}'X_1(x)$, $p_y{}'u(x,y) = p_y{}'Y_1(y)$, $p_y{}'v(x,y) = p_y{}'Y_2(y)$, $p_x{}'v(x,y) = p_x{}'X_2(x)$, тогда $\begin{cases} p_x{}'X_1(x)\, p_y{}'Y_2(y) = e^{x+y} \\ \dfrac{p_y{}'Y_1(y)}{p_x{}'X_2(x)} = e^{y-x} \end{cases}$,

$p_x{}'X_1(x) = \lambda e^x$, $p_y{}'Y_2(y) = \dfrac{e^y}{\lambda}$, $p_x{}'X_2(x) = \lambda e^x$, $p_y{}'Y_1(y) = \lambda e^y$, so $X_1(x) = \lambda^x e^{\frac{x^2}{2}}$, $Y_2(y) = c_2(x)\lambda^{-y} e^{\frac{y^2}{2}}$, $Y_1(y) = c_1(x)\lambda^y e^{\frac{y^2}{2}}$, $X_2(x) = \lambda^x e^{\frac{x^2}{2}}$, отсюда

$u(x,y) = c_1(x)\lambda^{x+y} e^{\frac{x^2+y^2}{2}}$, $v(x,y) = c_2(x)\lambda^{x-y} e^{\frac{x^2+y^2}{2}}$. Функции $c_2(x)$, $c_1(x)$ можно найти из некоторых начальных условий .

Пример . Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} p_t{}'u(x,t) - ap_x{}'v(x,t) = 0 \\ p_t{}'v(x,t) - bp_x{}'u(x,t) = 0 \end{cases}$ эта система уравнений эквивалентна следующей системе $\begin{cases} e^{\frac{u_t'(x,t)}{u(x,t)}} - ae^{\frac{v_x'(x,t)}{v(x,t)}} = 0 \\ e^{\frac{v_t'(x,t)}{v(x,t)}} - be^{\frac{u_x'(x,t)}{u(x,t)}} = 0 \end{cases}$,

где $a > 0$, $b > 0$. Решение этой системы найдем в виде $u(x,t) = T(t)X_1(x)$, $v(x,t) = T(t)X_2(x)$, тогда

$p_t{}'u(x,t) = p_t{}'T(t)$, $p_x{}'u(x,t) = p_x{}'X_1(x)$, $p_x{}'v(x,t) = p_x{}'X_2(x)$, $p_t{}'v(x,t) = p_t{}'T(t)$, тогда получим систему уравнений $\begin{cases} p_t{}'T(t) - ap_x{}'X_2(x) = 0 \\ p_t{}'T(t) - bp_x{}'X_1(x) = 0 \end{cases}$,

откуда $\begin{cases} p_t{}'T(t) = ap_x{}'X_2(x) = \lambda \\ p_t{}'T(t) = bp_x{}'X_1(x) = \lambda \end{cases}$, значит $T(t) = \lambda^t$, $u(x,t) = \lambda^t X_1(x)$, $v(x,t) = \lambda^t X_2(x)$, поэтому $p_t{}'u(x,t) = \lambda$, $p_t{}'v(x,t) = \lambda$,

$p_x{}'v(x,t) = p_x{}'X_2(x)$, $p_x{}'u(x,t) = p_x{}'X_1(x)$, отсюда $\begin{cases} \lambda - ap_x{}'X_2(x) = 0 \\ \lambda - bp_x{}'X_1(x) = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} p_x{}'X_2(x) = \dfrac{\lambda}{a} \\ p_x{}'X_1(x) = \dfrac{\lambda}{b} \end{cases}$, $\begin{cases} X_2(x) = \left(\dfrac{\lambda}{a}\right)^{c_2(t)x} \\ X_1(x) = \left(\dfrac{\lambda}{b}\right)^{c_1(t)x} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} u(x,t) = \lambda^t \left(\dfrac{\lambda}{b}\right)^{c_1(t)x} \\ v(x,t) = \lambda^t \left(\dfrac{\lambda}{a}\right)^{c_2(t)x} \end{cases}$.

Функции $c_2(t)$, $c_1(t)$ можно найти из некоторых начальных условий .

Пример . Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} p_t{}'u(x,t) - ap_x{}'v(x,t) = -f_1(x) + g(t) \\ p_t{}'v(x,t) - bp_x{}'u(x,t) = -f_2(x) + g(t) \end{cases}$ эта система уравнений эквивалентна следующей системе

$\begin{cases} e^{\frac{u_t'(x,t)}{u(x,t)}} - ae^{\frac{v_x'(x,t)}{v(x,t)}} = -f_1(x) + g(t) \\ e^{\frac{v_t'(x,t)}{v(x,t)}} - be^{\frac{u_x'(x,t)}{u(x,t)}} = -f_2(x) + g(t) \end{cases}$, где $a > 0$, $b > 0$. Решение этой системы найдем в виде $u(x,t) = T(t)X_1(x)$, $v(x,t) = T(t)X_2(x)$,

тогда $p_t{}'u(x,t) = p_t{}'T(t)$, $p_x{}'u(x,t) = p_x{}'X_1(x)$, $p_x{}'v(x,t) = p_x{}'X_2(x)$, $p_t{}'v(x,t) = p_t{}'T(t)$, получим систему уравнений

$\begin{cases} p_t{}'T(t)-g(t)-ap_x{}'X_2(x)+f_1(x)=0 \\ p_t{}'T(t)-g(t)-bp_x{}'X_1(x)+f_2(x)=0 \end{cases}$, $\begin{cases} p_t{}'T(t)-g(t)=ap_x{}'X_2(x)-f_1(x)=\lambda \\ p_t{}'T(t)-g(t)=bp_x{}'X_1(x)-f_2(x)=\lambda \end{cases}$, значит $T(t)=e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt}$, $u(x,t)=e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt}X_1(x)$, $v(x,t)=e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt}X_2(x)$,

поэтому $p_t{}'u(x,t)=g(t)+\lambda$, $p_t{}'v(x,t)=g(t)+\lambda$, $p_x{}'v(x,t)=p_x{}'X_2(x)$, $p_x{}'u(x,t)=p_x{}'X_1(x)$, отсюда

$\begin{cases} \lambda-ap_x{}'X_2(x)=-f_1(x) \\ \lambda-bp_x{}'X_1(x)=-f_2(x) \end{cases}$, $\begin{cases} p_x{}'X_2(x)=\dfrac{\lambda+f_1(x)}{a} \\ p_x{}'X_1(x)=\dfrac{\lambda+f_2(x)}{b} \end{cases}$, $\begin{cases} X_2(x)=e^{\int \ln\left(\frac{\lambda+f_1(x)}{a}\right)dx}c_2(t) \\ X_1(x)=e^{\int \ln\left(\frac{\lambda+f_2(x)}{b}\right)dx}c_1(t) \end{cases}$, откуда $\begin{cases} u(x,t)=e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt+\int \ln\left(\frac{\lambda+f_2(x)}{b}\right)dx}c_1(t) \\ v(x,t)=e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt+\int \ln\left(\frac{\lambda+f_1(x)}{a}\right)dx}c_2(t) \end{cases}$.

Функции $c_2(t)$, $c_1(t)$ можно найти из некоторых начальных условий .

Пример . Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} p_t{}'u(x,y,t)-ap_x{}'v(x,y,t)-bp_y{}'w(x,y,t)=-f(x)-h(y)+g(t) \\ p_t{}'v(x,y,t)-a_1p_x{}'u(x,y,t)-b_1p_x{}'w(x,y,t)=-f_1(x)+g(t) \\ p_t{}'w(x,y,t)-a_2p_y{}'u(x,y,t)-b_2p_y{}'v(x,y,t)=-h_1(y)+g(t) \end{cases}$. Решение этой системы найдем в виде

$u(x,y,t)=T(t)X(x)Y(y)$, $v(x,y,t)=T(t)X_1(x)Y_1(y)$, $w(x,y,t)=T(t)X_1(t)Y_1(t)$, тогда

$p_t{}'u=p_t{}'T(t)$, $p_x{}'u=p_x{}'X(x)$, $p_y{}'u=p_y{}'Y(y)$, $p_t{}'v=p_t{}'T(t)$, $p_x{}'v=p_x{}'X_1(x)$, $p_y{}'v=p_y{}'Y_1(y)$, $p_t{}'w=p_t{}'T(t)$, $p_x{}'w=p_x{}'X_2(x)$, $p_y{}'w=p_y{}'Y_2(y)$,

получим систему уравнений $\begin{cases} p_t{}'T(t)-g(t)-ap_x{}'X_1(x)+f(x)-bp_y{}'Y_2(y)+h(y)=0 \\ p_t{}'T(t)-g(t)-a_1p_x{}'X(x)+f_1(x)-b_1p_x{}'X_2(x)=0 \\ p_t{}'T(t)-g(t)-a_2p_y{}'Y(y)+h_1(y)-b_2p_y{}'Y_1(y)=0 \end{cases}$, тогда $p_t{}'T(t)-g(t)=\lambda$, $ap_x{}'X_1(x)-f(x)=\dfrac{\lambda}{2}$, $bp_y{}'Y_2(y)-h(y)=\dfrac{\lambda}{2}$,

$a_1p_x{}'X(x)-f_1(x)=\dfrac{\lambda}{2}$, $b_1p_x{}'X_2(x)=\dfrac{\lambda}{2}$, $a_2p_y{}'Y(y)+h_1(y)=\dfrac{\lambda}{2}$, $b_2p_y{}'Y_1(y)=\dfrac{\lambda}{2}$, отсюда $p_t{}'T(t)=g(t)+\lambda$, $p_x{}'X_1(t)=\dfrac{\frac{\lambda}{2}+f(x)}{a}$, $p_y{}'Y_2(y)=\dfrac{\frac{\lambda}{2}+h(y)}{b}$, $p_x{}'X(x)=\dfrac{\frac{\lambda}{2}+f_1(x)}{a_1}$,

$p_x{}' X_2(x) = \dfrac{\frac{\lambda}{2}}{b_1}$, $p_y{}' Y(y) = \dfrac{\frac{\lambda}{2} + h_1(y)}{a_2}$, $p_y{}' Y_1(y) = \dfrac{\frac{\lambda}{2}}{b_2}$, значит $T(t) = e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt}$, $X(x) = e^{\int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+f_1(x)}{a_1}\right)dx}$, $Y(y) = e^{\int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+h_1(y)}{a_2}\right)dy}$, $X_1(x) = e^{\int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+f(x)}{a}\right)dx}$, $Y_1(y) = e^{\int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{b_2}\right)dy}$,

$X_2(x) = e^{\int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{b_1}\right)dx}$, $Y_2(y) = e^{\int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+h(y)}{b}\right)dy}$, поэтому

$$\begin{cases} u(x,y,t) = e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt + \int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+f_1(x)}{a_1}\right)dx + \int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+h_1(y)}{a_2}\right)dy} \\ v(x,y,t) = e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt + \int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+f(x)}{a}\right)dx + \int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{b_2}\right)dy} \\ w(x,y,t) = e^{\int \ln(g(t)+\lambda)dt + \int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}}{b_1}\right)dx + \int \ln\left(\frac{\frac{\lambda}{2}+h(y)}{b}\right)dy} \end{cases}.$$

Пример . Рассмотрим систему уравнений $p_t{}' v_r \prod_{j=1}^{3} \left(p_{x_j}{}'\right)^{\ln v_j} = \left(p_{x_r}{}' g\right)^{-\frac{1}{\rho}} \left(\prod_{j=1}^{3} p_{x_j^2}{}'' v_r\right)^{\lambda} e^{f_r(\bar{x},t)}$, где $v_r(\bar{x},t)$, $g(\bar{x},t)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $r = 1,2,3$,

эта система уравнений эквивалентна следующей системе $e^{\frac{\partial v_r}{\partial t}\frac{1}{v_r}} \prod_{j=1}^{3} \left(e^{\frac{\partial v_r}{\partial x_j}\frac{1}{v_r}}\right)^{\ln v_j} = e^{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial x_r}\frac{1}{g}} \prod_{j=1}^{3} e^{\lambda \frac{\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^2} v_r - \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_j}\right)^2}{v_r^2}} e^{f_r(\bar{x},t)}$, тогда

$\dfrac{\partial v_r}{\partial t}\dfrac{1}{v_r} + \sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial v_r}{\partial x_j}\dfrac{1}{v_r} \ln v_j = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial g}{\partial x_r}\dfrac{1}{g} + \lambda \sum_{j=1}^{3} \dfrac{\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^2} v_r - \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_j}\right)^2}{v_r^2} + f_r(\bar{x},t)$. Пусть $v_r(\bar{x},t) = e^{\omega_r(\bar{x},t)}$, $g(\bar{x}) = e^{\mu(\bar{x})}$, тогда $\dfrac{\partial g}{\partial x_r} = e^{\mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial x_r}$, $\dfrac{\partial v_r}{\partial t} = e^{\omega_r} \dfrac{\partial \omega_r}{\partial t}$,

$\frac{\partial v_r}{\partial x_j}=e^{\omega_r}\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^{\,2}}=e^{\omega_r}\left(\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_j^{\,2}}\right)$, so $e^{\omega_r}\frac{\partial \omega_r}{\partial t}\frac{1}{e^{\omega_r}}+\sum_{j=1}^{3}e^{\omega_r}\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}\frac{1}{e^{\omega_r}}\ln e^{\omega_j}=-\frac{1}{\rho}e^{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x_r}\frac{1}{e^{\mu}}+\lambda\sum_{j=1}^{3}\frac{e^{2\omega_r}\left(\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_j^{\,2}}\right)-e^{2\omega_r}\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}\right)^2}{e^{2\omega_r}}+f_r(\overline{x},t)$,

отсюда $\frac{\partial \omega_r}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\omega_j\frac{\partial \omega_r}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mu}{\partial x_r}+\lambda\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial x_j^{\,2}}+f_r(\overline{x},t)$, это система уравнений Навье Стокса .

Пример $\Phi\left[u(x,y)\right]=\iint_R\left(\left(\frac{u_y'}{u}\right)^2+a^2\left(\frac{u_x'}{u}\right)^2\right)dxdy$ найдем функцию $u(x,y)$ которая дает минимум функционалу с данной величиной

на границе G области R , $u(x,y)_G=f(P)$. Напишем уравнение Эйлера $F(x,y,u,u_x',u_y')=\left(\frac{u_y'}{u}\right)^2+a^2\left(\frac{u_x'}{u}\right)^2$, $\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x'}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y'}\right)=0$,

$\frac{\partial F}{\partial u}=-\frac{2}{u^3}\left(\left(u_y'\right)^2+a^2\left(u_x'\right)^2\right)$, $\frac{\partial F}{\partial u_x'}=2a^2\frac{u_x'}{u^2}$, $\frac{\partial F}{\partial u_y'}=2\frac{u_y'}{u^2}$, итак $-\frac{2}{u^3}\left(\left(u_y'\right)^2+a^2\left(u_x'\right)^2\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(2a^2\frac{u_x'}{u^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{u_y'}{u^2}\right)$, откуда

$u_{y^2}''u-\left(u_y'\right)^2+a^2\left(u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2\right)=0$, $p_{y^2}''u(x,y)\left(p_{x^2}''u(x,y)\right)^{a^2}=1$.

p в комплексной области

Пусть $w(z)$ аналитическая функция комплексной переменной $z=x+iy, w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

Определение $p'w(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{w(z+\Delta z)}{w(z)}\right)^{\frac{1}{\Delta z}}$,где $a^n=e^{nLn(a)}, z^n=e^{nLn(z)}, Ln(z)=\ln(z)+2k\pi i$.

Аналогично функции дейсвительной переменной $p'w(z)=e^{\frac{w'(z)}{w(z)}}$ Условия Деламбера Эйлера $u_x'=v_y', u_y'=-v_x'$ $u_x'=\ln\left(p_x'u\right)^u$, $v_y'=\ln\left(p_y'v\right)^v$, $u_y'=\ln\left(p_y'u\right)^u$, $v_x'=\ln\left(p_x'v\right)^v$

p производная в комплексной области .

Пусть $w(z)$ аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy, w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Определение $p'w(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(\frac{w(z + \Delta z)}{w(z)} \right)^{\frac{1}{\Delta z}} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} e^{\frac{1}{\Delta z} \ln \left(\frac{w(z+\Delta z)}{w(z)} \right)} = e^{\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\ln \left| \frac{w(z+\Delta z)}{w(z)} \right| + i \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(Arg \left(\frac{w(z+\Delta z)}{w(z)} \right) + 2\pi n \right) \right)}$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \ln \left| \frac{w(z + \Delta z)}{w(z)} \right| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\ln |w(z + \Delta z)| - \ln |w(z)|}{\Delta z} = (\ln |w(z)|)'$,

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \left(Arg \left(\frac{w(z + \Delta z)}{w(z)} \right) + 2\pi n \right) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(\frac{Arg(w(z + \Delta z)) - Arg(w(z)) + 2\pi n}{\Delta z} \right)$, это выражение равно $(Arg(w(z)))'$ только если $n = 0$,

где $a^n = e^{nLn(a)}, z^n = e^{nLn(z)}, \ Ln(z) = \ln(z) + 2k\pi i$.

Аналогично функции дейсвительной переменной $p'w(z) = e^{\frac{w'(z)}{w(z)}}$. Условия Деламбера Эйлера $u_x' = v_y', u_y' = -v_x'$ $u_x' = \ln(p_x'u)^u, v_y' = \ln(p_y'v)^v, u_y' = \ln(p_y'u)^u, v_x' = \ln(p_x'v)^v$

поэтому $(p_x'u)^u = (p_y'v)^v, (p_y'u)^u = \frac{1}{(p_x'v)^v}$. Умножим разделим эти выражения , отсюда найдем $(p_x'up_y'u)^u = \left(\frac{p_y'v}{p_x'v} \right)^v, \left(\frac{p_x'u}{p_y'u} \right)^u = (p_y'vp_x'v)^v$,

найдем p_x' производную от первого уравнения $p_x'\left((p_x'u)^u\right) = p_x'\left((p_y'v)^v\right), (p_{xx}''u)^u (p_x'u)^{u_x'} = (p_{xy}''v)^v (p_y'v)^{v_x'}$,

найдем p_y' производную от второго уравнения $p_y'\left((p_y'u)^u\right) = p_y'\left(\frac{1}{(p_x'v)^v}\right), (p_{yy}''u)^u (p_y'u)^{u_y'} = \frac{1}{(p_{xy}''v)^v (p_x'v)^{v_y'}}$, здесь применена формула $p'\left(f(x)^{g(x)}\right) = (p'f(x))^{g(x)} f(x)^{g'(x)}$,

умножим полученные выражения $(p_{xx}''u)^u (p_x'u)^{u_x'} (p_{yy}''u)^u (p_y'u)^{u_y'} = \frac{(p_y'v)^{v_x'}}{(p_x'v)^{v_y'}}, \frac{(p_y'v)^{v_x'}}{(p_x'v)^{v_y'}} = \frac{e^{\frac{v_y'}{v}v_x'}}{e^{\frac{v_x'}{v}v_y'}} = 1$, тогда $(p_{xx}''u)^u (p_x'u)^{u_x'} (p_{yy}''u)^u (p_y'u)^{u_y'} = 1$

напишем в производных $e^{\frac{u_{xx}''u - (u_x')^2}{u^2}u + \frac{u_x'}{u}u_x' + \frac{u_{yy}''u - (u_y')^2}{u^2}u + \frac{u_y'}{u}u_y'} = 1$, $e^{u_{xx}'' + u_{yy}''} = 1$, $u_{xx}'' + u_{yy}'' = 0$, тогда $u(x, y) = Ax + By + C$.

p производная может быть найдена по формуле $p'w(z) = (p_x'u)^{\frac{u(u+iv)}{u^2-v^2}} (p_y'v)^{\frac{u(-v+iu)}{u^2-v^2}}$.

Доказательство . $p'w(z) = e^{\frac{u_x'+iv_x'}{u+iv}} = e^{\frac{(u_x'+iv_x')(u+iv)}{u^2-v^2}} = e^{\frac{u_x'u - iu_x'v + iv_x'u + v_x'v}{u^2-v^2}} = e^{\frac{u_x'}{u}\frac{u(u-iv)}{u^2-v^2}} e^{\frac{v_x'}{v}\frac{v(v+iu)}{u^2-v^2}} = (p_x'u)^{\frac{u(u+iv)}{u^2-v^2}} (p_y'v)^{\frac{u(-v+iu)}{u^2-v^2}}$.

По аналогии с функцией действительной переменной можно получить правила вычисления p производной

$p'c = 1$, $p'cw(z) = p'w(z), p'(w_1(z) w_2(z)) = p'(w_1(z)) p'(w_2(z)), p'\left(\frac{w_1(z)}{w_2(z)} \right) = \frac{p'(w_1(z))}{p'(w_2(z))}$, $p'(w(z)^z) = w(z)(p'w(z))^z$, $p'w(g(z)) = p'(w(g))^{g'(z)}$.

Пусть на кривой H определена комплексная функция $w(z)$, рассмотрим разбиение этой кривой на дуги $H_1,....,H_n$, точки $z_0, z_1,...., z_{n-1}, z_n$ где z_0 начало кривой, z_n конец кривой Обозначим R_k длину дуги H_k , z_{k-1} начало дуги ,

z_k конец дуги , $R = \text{maximum}_{1\le k\le n} R_k$. Для каждой дуги выберем точку $\zeta_k \in H_k$, напишем выражение $w(\zeta_1)^{\Delta z_1} \bullet .... \bullet w(\zeta_n)^{\Delta z_n} = \prod_{k=1}^{n} w(\zeta_k)^{\Delta z_k}$,

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Пусть существует предел этого выражения , тогда этот предел называется P интегралом функции $w(z)$ вдоль кривой H , $P\int_H w(z)\,dz = \lim_{R\to 0} \prod_{k=1}^{n} w(\zeta_k)^{\Delta z_k}$.

Преобразуем это выражение $P\int_H w(z)\,dz = \lim_{R\to 0} w(\zeta_1)^{\Delta z_1} \bullet .... \bullet w(\zeta_n)^{\Delta z_n} = \lim_{R\to 0} \left(e^{Lnw(\zeta_1)}\right)^{\Delta z_1} \bullet .... \bullet \left(e^{Lnw(\zeta_n)}\right)^{\Delta z_n} = \lim_{R\to 0} e^{Lnw(\zeta_1)\Delta z_1 + ... + Lnw(\zeta_n)\Delta z_n} = \lim_{R\to 0} e^{\sum_{k=1}^{n} Lnw(\zeta_k)\Delta z_k} = e^{\lim_{R\to 0}\sum_{k=1}^{n} Lnw(\zeta_k)\Delta z_k} = e^{\int_H Lnw(z)dz}$.

Пусть $z = x + iy, w(z) = u(x, y) + iv(x, y), Lnw(z) = \ln|z| + i\arg z = g(x, y) + iq(x, y), z_k = x_k + iy_k, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \ \zeta_k = \gamma_k + i\eta_k, g_k = g(\gamma_k, \eta_k), q_k = q(\gamma_k, \eta_k)$,

откуда $\sum_{k=1}^{n} Lnw(z)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(g_k\Delta x_k - q_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(q_k\Delta x_k + g_k\Delta y_k)$, тогда $P\int_H w(z)\,dz = e^{\int_H gdx - qdy + i\int_H qdx + gdy}$.

Рассмотрим уравнение $p'w(z) = w(z)$. Проверим что функция $w(z) = e^{e^z}$ удовлетворяет этому уравнению $p'w(z) = e^{\frac{w'(z)}{w(z)}} = e^{\frac{\left(e^{e^z}\right)'}{e^{e^z}}} = e^{\frac{e^{e^z}e^z}{e^{e^z}}} = e^{e^z} = w(z)$.

Другое решение . $w(z) = e^{e^{x+iy}} = e^{e^x e^{iy}} = e^{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^{e^x\cos y + ie^x\sin y} = e^{e^x\cos y}e^{ie^x\sin y} = e^{e^x\cos y}\left(\cos(e^x\sin y) + i\sin(e^x\sin y)\right) = e^{e^x\cos y}(\cos A + i\sin A) = e^{e^x\cos y}\cos A + ie^{e^x\cos y}\sin A$,

где $A = e^x\sin y$ $\ w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, нужно проверить что функции $u(x, y), v(x, y)$ удовлетворяют уравнению $e^{\frac{u_x' + iv_x'}{u+iv}} = u + iv$,

то есть удовлетворяют системе $\begin{cases} e^{e^x\cos y}\cos A = u(x, y) \\ e^{e^x\cos y}\sin A = v(x, y) \end{cases}$

Специальные функции .

Пример . $\int_0^1 (-1)^x\, dx = \int_0^1 \left(e^{i\pi}\right)^x dx = \int_0^1 e^{i\pi x} dx = \left.\frac{e^{i\pi x}}{i\pi}\right|_0^1 = \frac{-2}{i\pi} = \frac{2i}{\pi}$. Другое решение . $\int_0^1 (-1)^x\, dx = \left.\frac{(-1)^x}{\ln(-1)}\right|_0^1 = \frac{-1-1}{i\pi} = \frac{2i}{\pi}$. $p\int_0^1 (-1)^x\, dx = e^{\int_0^1 \ln(-1)^x dx} = e^{\int_0^1 \ln e^{i\pi x} dx} = e^{\int_0^1 i\pi x dx} = e^{i\pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

Пример . $\int x^i dx = \frac{x^{i+1}}{i+1} + c$. Найдем этот интеграл другим способом $x^i = \left(e^{\ln x}\right)^i = e^{i\ln x} = \left(e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma\right) = \cos(\ln x) + i\sin(\ln x)$, значит

$\int x^i dx = \int \left(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)\right) dx = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) + i\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + c$. Преобразуем выражение $\frac{x^{i+1}}{i+1} = xx^i\frac{1}{i+1} = x\left(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)\right)\frac{i-1}{2} =$

$\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) + i\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)$.

Найдем P интеграл этой функции , то есть $P\int x^i dx = e^{\int \ln x^i dx} = e^{\int i\ln x dx} = e^{i(x(\ln x - 1) + c)} = e^{i(x(\ln x - 1))}c$.

Найдем L интеграл этой функции , то есть $L\int x^i dx = e^{\int \frac{x^i}{x}dx} = e^{\int x^{i-1}dx} = e^{\frac{x^i}{i}+c} = e^{-ix^i}c = e^{-i(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x))}c = e^{\sin(\ln x)}e^{-i\cos(\ln x)}c = \frac{e^{\sin(\ln x)}c}{\cos(\cos(\ln x)) + i\sin(\cos(\ln x))} =$

$= e^{\sin(\ln x)}\left(\cos(\cos(\ln x)) - i\sin(\cos(\ln x))\right)c$.

Пример . Найдем интеграл от функции интегральная экспонента $Ei(x) = \int \frac{e^x}{x}dx$, то есть $\int Ei(x)dx = \left(u = Ei(x)\ ,\ du = d\left(\int \frac{e^x}{x}dx\right) = \frac{e^x}{x}dx\ ,\ dv = dx\ ,\ v = x\right) =$

$= xEi(x) - \int x\frac{e^x}{x}dx = xEi(x) - e^x + c$. Найдем L интеграл этой функции , то есть $L\int Ei(x)dx = e^{\int \frac{Ei(x)}{x}dx} = \left(u = Ei(x)\ ,\ du = d\left(\int \frac{e^x}{x}dx\right) = \frac{e^x}{x}dx\ ,\ dv = \frac{dx}{x}\ ,\ v = \ln x\right) =$

$= e^{Ei(x)\ln x - \int \ln x\frac{e^x}{x}dx} = \left(x = e^t\ ,\ t = \ln x\ ,\ dt = \frac{dx}{x}\ ,\ dx = e^t dt\right) = e^{Ei(x)\ln x - \int t\frac{e^{e^t}}{e^t}e^t dt} = e^{Ei(x)\ln x - \int te^{e^t}dt} =$

Пример . Найдем интеграл от функции интегральный логарифм $li(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$, that is $\int li(x)dx = \left(u = li(x)\ ,\ du = d\left(\int \frac{dx}{\ln x}\right) = \frac{dx}{\ln x}\ ,\ dv = dx\ ,\ v = x\right) = x\cdot li(x) - \int x\frac{dx}{\ln x} =$

$= \left(\ln x = t\ ,\ dt = \frac{dx}{x}\ ,\ dx = xdt = e^t dt\ ,\ x = e^t\right) = x\cdot li(x) - \int \frac{e^{2t}}{t}dt = \left(2t = \lambda\ ,\ dt = \frac{d\lambda}{2}\right) = x\cdot li(x) - \frac{1}{2}\int \frac{e^\lambda}{\lambda}d\lambda = x\cdot li(x) - \frac{1}{2}Ei(\lambda) + c = x\cdot li(x) - \frac{1}{2}Ei(2t) + c = x\cdot li(x) - \frac{1}{2}Ei(2\ln x) + c$.

Найдем L интеграл этой функции , то есть $L\int li(x)dx = e^{\int \frac{li(x)}{x}dx} = \left(u = li(x)\ ,\ du = d\left(\int \frac{dx}{\ln x}\right) = \frac{dx}{\ln x}\ ,\ dv = \frac{dx}{x}\ ,\ v = \ln x\right) = e^{\ln x\cdot li(x) - \int \ln x\frac{dx}{\ln x}} = e^{\ln x\cdot li(x) - x + c} = x^{li(x)}c$.

Пример . $\int e^{e^x} dx = \left(e^x = t \text{ , } e^x dx = dt \text{ , } dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \right) = \int \frac{e^t}{t} dt = Ei(t) + c = Ei(e^x) + c$. Найдем P интеграл этой функци , то есть $P\int e^{e^x} dx = e^{\int \ln e^{e^x} dx} = e^{\int e^x dx} = e^{e^x} c$.

Пример . $\int \ln(\ln x) dx = \left(u = \ln(\ln x) \text{ , } du = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} dx \text{ , } dv = dx \text{ , } v = x \right) = x\ln(\ln x) - \int x \frac{1}{x \ln x} dx = x\ln(\ln x) - \int \frac{dx}{\ln x} = x\ln(\ln x) - Li(x) + c$.

Пример . $\int \ln(\ln x) dx = \left(u = \ln(\ln x) \text{ , } du = \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} dx \text{ , } dv = dx \text{ , } v = x \right) = x\ln(\ln x) - \int x \frac{1}{x \ln x} dx = x\ln(\ln x) - \int \frac{dx}{\ln x} = x\ln(\ln x) - Li(x) + c$.

Найдем L интеграл этой функци , то есть $L\int \ln(\ln x) dx = e^{\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx} = \left(u = \ln(\ln x) \text{ , } du = \frac{1}{x \ln x} dx \text{ , } dv = \frac{dx}{x} \text{ , } v = \ln x \right) = \ln(\ln x)\ln x - \int \ln x \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x)\ln x - \ln x + c =$

$= \ln x\left(\ln(\ln x) + 1\right) + c$. Найдем P интеграл этой функци , то есть $P\int \ln x dx = e^{\int \ln(\ln x) dx} = e^{x\ln(\ln x) - Li(x) + c} = (\ln x)^x e^{-Li(x)} c$.

Пример . $\int x^{\ln x} dx = \int \left(e^{\ln x}\right)^{\ln x} dx = \int e^{(\ln x)^2} dx = \left(u = \ln x \text{ , } x = e^u \text{ , } dx = e^u du \right) = \int e^{u^2} e^u du = \int e^{u^2 + u} du = \int e^{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} du = \left(u + \frac{1}{2} = t \text{ , } du = dt \right) = e^{-\frac{1}{4}} \int e^{t^2} dt = e^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} erfi(t) + c =$

$= e^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} erfi\left(u + \frac{1}{2} \right) + c = e^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} erfi\left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + c$.

Найдем L интеграл этой функци , то есть $L\int x^{\ln x} dx = e^{\int \frac{x^{\ln x}}{x} dx}$, $\int \frac{x^{\ln x}}{x} dx = \left(u = \ln x \text{ , } x = e^u \text{ , } dx = e^u du \right) = \int e^{u^2} e^u \frac{du}{e^u} = \int e^{u^2} du = erfi(u) + c = erfi(\ln x) + c$, это дает $L\int x^{\ln x} dx = e^{erfi(\ln x)} c$.

Найдем P интеграл этой функци , то есть $P\int x^{\ln x} dx = e^{\int \ln\left(x^{\ln x}\right) dx} = e^{\int (\ln x)^2 dx} = e^{\left(-2\ln x + (\ln x)^2 + 2\right)x} c$.

Функция $LambertW$ это функция обратная для функции $f(x) = xe^x$, функциональное уравнение для $W(x)$ функции $x = W(x)e^{W(x)}$, где $x > -1$.

Формула производной $W'(x) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{W(x)}{x\left(W(x) + 1\right)}$.

Найдем p производную функции $W(x)$, $p'W(x) = e^{\frac{W'(x)}{W(x)}} = e^{\frac{W(x)}{x(W(x)+1)}\frac{1}{W(x)}} = e^{\frac{1}{x(W(x)+1)}}$.

Найдем L производную функции $W(x)$, $L'W(x) = \frac{xW'(x)}{W(x)} = \frac{x}{W(x)} \frac{W(x)}{x\left(W(x) + 1\right)} = \frac{1}{W(x) + 1}$.

Формула интеграла функции $W(x)$, $\int W(x) dx = x\left(W(x) + \frac{1}{W(x)} - 1 \right) + c$.

Найдем P интеграл этой функци , то есть $P\int W(x)\,dx = e^{\int \ln W(x)dx} = \left(\ln W(x) = \ln x - W(x)\right) = e^{\int (\ln x - W(x))dx} = e^{\left(x(\ln x-1)-x\left(W(x)+\frac{1}{W(x)}-1\right)\right)+c} = e^{\ln x - xW(x)+\frac{x}{W(x)}}c = \left(e^{W(x)} = \dfrac{x}{W(x)}\ ,\ e^{-W(x)} = \dfrac{W(x)}{x}\right) =$

$= xW(x)e^{\frac{x}{W(x)}}c$.

Найдем L интеграл этой функци , то есть $L\int W(x)\,dx = e^{\int \frac{W(x)}{x}dx} = \left(u = W(x)\ ,\ du = \dfrac{W(x)}{x(W(x)+1)}dx = \dfrac{u}{x(u+1)}dx\ ,\ dx = x\dfrac{u+1}{u}du\right) = e^{\int \frac{u}{x}\frac{x}{u}(u+1)du} = e^{\int (1+u)du} = e^{\frac{(1+u)^2}{2}} + c = e^{\frac{(W(x)+1)^2}{2}} + c$.

Гамма функция $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $x \neq 0$, -1 , -2 , . . этот интеграл сходиться если $x > 1$. Найдем p производную гамма функции $p'\Gamma(x) = e^{\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}} = e^{\frac{d}{dx}(\ln\Gamma(x))} = e^{\frac{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-x}\ln t dt}{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt}}$,

где $\Gamma'(x) = \dfrac{d}{dx}\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt =$ (дифференцирование интеграла который зависит от параметра) $= \int\limits_0^\infty \dfrac{d}{dx}\left(t^{x-1}e^{-t}\right)dt = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ \ln t dt$, поэтому $p'\Gamma(x) = e^{\phi^{(0)}(x)}$,

где $\phi^{(0)}(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \dfrac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$ это логарифмическая производная гамма функции , которая называется полигамма функция порядка 0 также дигамма функция ,

$\phi^{(0)}(x) = \dfrac{d}{dx}\ln\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{1`(x)}$ , $\phi'(x) = \phi^{(1)}(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\Gamma'(x)}{1`(x)}\right) = \dfrac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x)$, $\phi''(x) = \phi^{(2)}(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\Gamma'(x)}{1`(x)}\right) = \dfrac{d^3}{dx^3}\ln\Gamma(x)$ , .. , $\phi^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{\Gamma'(x)}{1`(x)}\right) = \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\ln\Gamma(x)$.

$\phi^{(n)}(1+x) = \phi^{(n)}(x) + \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $\phi^{(0)}(x) = -\gamma + \int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{1-e^{-t}}dt = -\gamma + \int\limits_0^1 \dfrac{1-t^{x-1}}{1-t}dt$, $\phi^{(0)}(n+1) = -\gamma + \sum\limits_{r=1}^n \dfrac{1}{r}$, $\phi^{(0)}(x) + \phi^{(0)}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) + 2\ln 2 = \phi^{(0)}(2x)$, $\phi^{(0)}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$.

Найдем $p'\Gamma(1) = e^{\frac{\Gamma'(1)}{1`(1)}}$, тогда $p'\Gamma(1) = e^{-\gamma} \approx 0.5615$, по определению найдем $p'\Gamma(x) = e^{\frac{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-x}\ln t dt}{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt}}$, $p'\Gamma(1) = e^{\frac{\int_0^\infty e^{-t}\ln t dt}{\int_0^\infty e^{-t}dt}} = e^{\frac{-\gamma}{1}} \approx 0.5615$.

$\phi^{(n)}x = (-1)^{n+1}\int\limits_0^\infty \dfrac{t^n e^{-xt}}{1-e^{-t}}dt$, эту функцию можно представить в виде ряда $\phi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\ n!\sum\limits_{j=0}^\infty \dfrac{1}{(x+j)^{n+1}}$, $n > 0$.

Найдем $p''\Gamma(x) = e^{\frac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-(\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}} = e^{\phi^{(1)}(x)}$, где $\Gamma''(x) = \dfrac{d}{dx}\Gamma'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ \ln t dt\right) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ (\ln t)^2\ dt$, $\dfrac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \dfrac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x) = \phi^{(1)}(x) = \phi'(x)$,

$\phi^{(1)}(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x) = \dfrac{d\phi^{(0)}(x)}{dx} = \sum\limits_{j=0}^\infty \dfrac{1}{(x+j)^2}$, тогда $\phi^{(1)}(1) = \dfrac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(1) = \sum\limits_{j=0}^\infty \dfrac{1}{(1+j)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\dfrac{\Gamma''(1)\Gamma(1) - (\Gamma'(1))^2}{(\Gamma(1))^2} = \Gamma''(1) - (\Gamma'(1))^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$, отсюда $\Gamma''(1) = \dfrac{\pi^2}{6} + \gamma^2 \approx 1.97$, откуда $p''\Gamma(1)=e^{\frac{\pi^2}{6}}\approx 5.19$. По определению найдем $\Gamma''(1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}(\ln t)^2\,dt=1.97811$, $p''\Gamma(1)=e^{\frac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x)_{x=1}}\approx e^{1.64}\approx 5.19$.

Найдем $p'''\Gamma(x)=e^{\frac{\Gamma'''(x)\Gamma''(x)(\Gamma(x))^2-3\Gamma''(x)\Gamma'(x)\Gamma(x)+2(\Gamma'(x))^3}{(\Gamma(x))^3}}=e^{\phi^{(2)}(x)}$, где $\Gamma^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}\Gamma^{(n-1)}(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\,dt$, $\frac{\Gamma'''(x)(\Gamma(x))^2-3\Gamma''(x)\Gamma'(x)\Gamma(x)+2(\Gamma'(x))^3}{(\Gamma(x))^3}=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)=\frac{d^3}{dx^3}\ln\Gamma(x)$

$\Leftrightarrow \frac{\Gamma'''(x)}{\Gamma(x)}-3\frac{\Gamma''(x)\Gamma'(x)}{(\Gamma(x))^2}+2\frac{(\Gamma'(x))^3}{(\Gamma(x))^3}=\frac{d^3}{dx^3}\ln\Gamma(x)$, $\phi^{(2)}(x)=\frac{d^2\phi^{(0)}(x)}{dx^2}=\frac{d^3}{dx^3}\ln\Gamma(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(x+j)^2}\right)=-\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{2}{(x+j)^3}$, $x=1$, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma'(1)=-\gamma$, $\Gamma''(1)=\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2$,

$\Gamma'''(1)-\left(\frac{\pi^2}{6}+\gamma^2\right)(-\gamma)3+2(-\gamma)^3=-\sum\limits_{j-0}^{\infty}\frac{2}{(1+j)^3}\Leftrightarrow\Gamma'''(1)=-\gamma^3-\frac{\pi^2}{2}\gamma-\sum\limits_{j-0}^{\infty}\frac{2}{(1+j)^3}\approx-5.44486$, $\frac{d^3}{dx^3}\ln\Gamma(1)=-\sum\limits_{j-0}^{\infty}\frac{2}{(1+j)^3}\approx-2.40402$, $p'''\Gamma(1)=e^{-2.40402}\approx 0.09$.

По определению найдем $\Gamma'''(1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}(\ln t)^3\,dt=-5.44486$, $p'''\Gamma(1)=e^{\frac{d^3}{dx^3}\ln\Gamma(x)_{x=1}}\approx e^{-2.40402}\approx 0.09$.

$p''''\Gamma(x)=e^{\phi^{(3)}(x)}=e^{\frac{d^3\phi^{(0)}(x)}{dx^3}}=e^{\frac{d^4}{dx^4}(\ln\Gamma(x))}$, $\phi^{(3)}(x)=\frac{d^3\phi^{(0)}(x)}{dx^3}=\frac{d^4}{dx^4}\ln\Gamma(x)=\frac{d}{dx}\left(-\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{2}{(x+j)^3}\right)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{6}{(x+j)^4}$, $\frac{d^4}{dx^4}\ln\Gamma(1)\approx 2.1647$, $p''''\Gamma(1)\approx 8.7115$.

$p^{(5)}\Gamma(x)=e^{\phi^{(4)}(x)}=e^{\frac{d^4\phi^{(0)}(x)}{dx^4}}=e^{\frac{d^5}{dx^5}(\ln\Gamma(x))}$, $\phi^{(4)}(x)=\frac{d^4\phi^{(0)}(x)}{dx^4}=\frac{d^5}{dx^5}\ln\Gamma(x)=\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{6}{(x+j)^4}\right)=-\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{24}{(x+j)^5}$, $\frac{d^5}{dx^5}\ln\Gamma(1)\approx-248863$, $p^{(5)}\Gamma(x)\approx 1.5560\cdot 10^{-11}$.

$p^{(n)}\Gamma(x)=e^{\phi^{(n)}(x)}=e^{\frac{d^n\phi^{(0)}(x)}{dx^n}}=e^{\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\ln\Gamma(x))}$.

Найдем L производную гамма функции $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, $x>0$, $L'\Gamma(x)=\frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=L'\Gamma(x)=\frac{x\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t}{\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt}dt=x\frac{d}{dx}(\ln(\Gamma(x)))=x\phi^{(0)}(x)$. $L'\Gamma(1)=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\Gamma'(1)=-\gamma\approx 0.5772$.

$L''\Gamma(x)=\frac{x\Gamma''(x)}{\Gamma'(x)}-\frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+1$, $L''\Gamma(1)=\frac{\Gamma''(1)}{\Gamma'(1)}-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+1\approx-1.86$.

Найдем производную уравнения $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, получим $\Gamma'(x+1)=\Gamma(x)+x\Gamma'(x)$, тогда $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x)}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}x+1$, значит $\frac{\Gamma'(x+1)}{\frac{\Gamma(x+1)}{x}}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}x+1$, $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\frac{1}{x}$.

Найдем p производную уравнения $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, получим $p'(\Gamma(x+1))=p'(x\Gamma(x))$, $p'(\Gamma(x+1))=p'x\cdot p'\Gamma(x)$, $e^{\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}}=e^{\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$, тогда $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\frac{1}{x}$.

Найдем L производную уравнения $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, получим $L'(\Gamma(x+1))=L'(x\Gamma(x))$, $L'(\Gamma(x+1))=L'x+L'\Gamma(x)$, $\dfrac{x\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\dfrac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+1$, $\dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\dfrac{1}{x}$.

Рассмотрим выражение $\dfrac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\dfrac{1}{x}$ в виде дифференциального уравнения с опережающим аргументом на отрезке $1\le x\le 2$,

начальная функция $\Gamma(x)=\delta_0(x)=0.46x^2-1.4x+1.94$ получена в форме параболы проходящей через 3 точки $(1\ ,1)$, $(1.44\ ,\ 0.886)$, $(2\ ,\ 1)$, через которые проходит гамма функция на данном отрезке . Найдем решение этого уравнения на отрезке $0<x\le 1$. На этом отрезке аргумент $(x+1)$ функции $\Gamma(x+1)$ находиться на отрезке $1<x+1\le 2$, поэтому можно подставить $\Gamma(x+1)=\delta_0(x+1)=0.46(x+1)^2-1.4(x+1)+1.94=0,46x^2-0.48x+1$, $\Gamma'(x+1)=0.92x-0.48$. Получим дифференциальное уравнение $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{0.92x-0.48}{0.46x^2-0.48x+1}$, $\dfrac{d\Gamma(x)}{\Gamma(x)}=\dfrac{0.92x-0.48}{0.46x^2-0.48x+1}-\dfrac{1}{x}$, решение этого уравнения $\Gamma(x)=\dfrac{0.46x^2-0.48x+1}{x}c$, $\Gamma(1)=1$, это дает $\Gamma(x)=\dfrac{0.46x^2-0.48x+1}{x}1.02$.

Сравним точные значения гамма функции (программа MAPLE) $\Gamma(0.01)\approx 99.43$, $\Gamma(0.1)\approx 9.51$, $\Gamma(0.25)=3.62$, $\Gamma(0.8)\approx 1.16$, $\Gamma(1)=1$,

со значениями по этой апроксимации $\Gamma(0.01)\approx 101.51$, $\Gamma(0.1)\approx 9.75$, $\Gamma(0.25)=3.70$, $\Gamma(0.8)\approx 1.16$, $\Gamma(1)=1$.Чтобы увеличить точность совпадения можно составить более точную сплайн апроксимацию гамма функции на отрезке $1\le x\le 2$, в любом случае находим апроксимацию гамма функции дробно рациональной функцией .

Апроксимация гамма функции $\Gamma(x)=0.46x^2-1.4x+1.94$ на отрезке $1\le x\le 2$ при переходе на отрезк $0<x\le 1$ дает не правильные результаты , то есть $\Gamma(0.01)\approx 1.92$, $\Gamma(0.1)\approx 1,8$, $\Gamma(0.25)=1,62$, $\Gamma(0.8)\approx 1.11$, $\Gamma(1)=1$. Такой метод апроксимации путем масштабирования можно применить для любого отрезка области определения гамма функции $\Gamma(x)$.

Рассмотрим тождество $\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$, $x\ne 0$, ± 1 , ± 2 ,.. Найдем производную от этого тождества $\Gamma'(x)\Gamma(1-x)-\Gamma'(1-x)\Gamma(x)=-\pi^2\dfrac{\cos\pi x}{\sin^2\pi x}$, получим тождество $\Gamma'(1-x)\Gamma(x)-\Gamma'(x)\Gamma(1-x)=\pi^2\dfrac{\cos\pi x}{\sin^2\pi x}$, это дает $\dfrac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\pi^2\dfrac{\cos\pi x}{\sin^2\pi x}\dfrac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$, $\dfrac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\pi^2\dfrac{\cos\pi x}{\sin^2\pi x}\dfrac{\sin\pi x}{\pi}=\dfrac{\pi}{\tan\pi x}$.

Найдем p производную от этого тождества $p'\Gamma(1-x)\cdot p'\Gamma(x)=p'\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\Rightarrow e^{\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}}\cdot e^{\frac{-\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}}=e^{\frac{-\pi}{\tan\pi x}}$, получим тождество $\dfrac{\pi}{\tan\pi x}=\dfrac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Найдем L производную от этого тождества $L'\Gamma(1-x)+L'\Gamma(x)=L'\dfrac{\pi}{\sin\pi x}\Rightarrow\dfrac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}-\dfrac{x\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}=-\dfrac{\pi}{\tan\pi x}$ получим тождество $\dfrac{\pi}{\tan\pi x}=\dfrac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Обратный ход $\dfrac{d}{dx}\ln\Gamma(1-x)+\dfrac{d}{dx}\ln\Gamma(x)=-\dfrac{\pi}{\tan\pi x}$, $\dfrac{d}{dx}(\ln\Gamma(1-x)+\Gamma(x))=-\dfrac{\pi}{\tan\pi x}$, $\dfrac{d}{dx}(\ln(\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x)))=-\dfrac{\pi}{\tan\pi x}$, $\int(\ln(\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x)))'dx=-\pi\int\dfrac{dx}{\tan\pi x}$, $\ln(\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x))=-\pi\dfrac{\ln(\sin\pi x)+\ln c}{\pi}$, $\ln(\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x))=\ln\dfrac{1}{c\sin\pi x}$, $\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x)=\dfrac{1}{c\sin\pi x}$, полагаем $c=\dfrac{1}{\pi}$, $\Gamma(1-x)\Gamma(x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$.

Доказана формула $\phi^{(n)}(1-x)+(-1)^{n+1}\phi^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{\pi}{\tan\pi x}$. Пусть $n=0$, найдем $\phi^{(0)}(1-x)-\phi^{(0)}(x)=\dfrac{\pi}{\tan\pi x}$, то есть $\dfrac{\pi}{\tan\pi x}=\dfrac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Рассмотрим выражение $\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{\pi}{\tan\pi x}$ в виде дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом на интервале $0<x\le\frac{1}{2}$, начальная функция

$\Gamma(x)=\delta_0(x)=\frac{0.869}{x^{1.029}}$ получена в форме гиперболы проходящей через 2 точки $(0.01\ ,99.43)$, $(0.25\ ,\ 3.62)$ через которые проходит гамма функция на данном интервале .

Найдем решение этого уравнения на интервале $\frac{1}{2}\le x<1$. На этом интервале аргумент $(1-x)$ функции $\Gamma(1-x)$ находиться на интервале $0<1-x\le\frac{1}{2}$, поэтому можно

подставить $\Gamma(1-x)=\delta_0(1-x)=\frac{0.869}{(1-x)^{1.029}}$, $\Gamma'(1-x)=\frac{0.894}{(1-x)^{2.03}}$. Получим дифференциальное уравнение $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{1.029}{1-x}-\frac{\pi}{\tan\pi x}$, решение этого уравнения $\Gamma(x)=\frac{(1-x)^{1.029}}{\sin\pi x}c$

$\Gamma(0.5)\approx 1.772$ это дает $c\approx 3,62$, $\Gamma(x)=3.62\frac{(1-x)^{1.029}}{\sin\pi x}$.

Сравним точные значения гамма функции (программа MAPLE) $\Gamma(0.5)\approx 1.772$, $\Gamma(0.75)\approx 1.225$, $\Gamma(0.8)\approx 1.16$, $\Gamma(0.9)\approx 1.07$, $\Gamma(0.99)\approx 1.006$,
со значениями по этой апроксимации $\Gamma(0.5)\approx 1.773$, $\Gamma(0.75)\approx 1.23$, $\Gamma(0.8)\approx 1.18$, $\Gamma(0.9)\approx 1.096$, $\Gamma(0.99)\approx 1.008$.Чтобы увеличить точность совпадения можно составить более точную сплайн апроксимацию гамма функции на отрезке $0<x\le\frac{1}{2}$.

Апроксимация гамма функции $\Gamma(x)=\frac{0.869}{x^{1.029}}$ на отрезке $0<x\le\frac{1}{2}$ при переходе на отрезк $\frac{1}{2}\le x<1$ дает не правильные результаты , то есть
$\Gamma(0.5)\approx 1.773$, $\Gamma(0.75)\approx 1.16$, $\Gamma(0.8)\approx 1.09$, $\Gamma(0.9)\approx 0.97$, $\Gamma(0.99)\approx 0.88$. Такой метод апроксимации путем масштабирования можно применить для любого отрезка области определения гамма функции $\Gamma(x)$.

L производная , свойства .

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция . L производной назовем $L'f(x)=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\left(\dfrac{f(rx)}{f(x)}\right)$,

поэтому $L'f(x)=\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{\ln\dfrac{f(rx)}{f(x)}}{\ln r}=\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{\ln f(rx)-\ln f(x)}{\ln r}$, $x_1=rx$, $x_1=x+\Delta x$, $rx=x+\Delta x$, $r=1+\dfrac{\Delta x}{x}$, если $r\to 1$, тогда $\Delta x\to 0$, отсюда

$L'f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln f(x+\Delta x)-\ln f(x)}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln f(x+\Delta x)-\ln f(x)}{\Delta x}\dfrac{\Delta x}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}=\left(\ln f(x)\right)'\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\dfrac{\Delta x}{x}}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}x=\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$, потому что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\dfrac{\Delta x}{x}$, $\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\sim\dfrac{\Delta x}{x}$.

$L'c=\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{\ln\dfrac{c}{c}}{\ln r}=\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{\ln 1}{\ln r}=\lim\limits_{r\to 1}\dfrac{0}{\ln r}=0$, где $c\neq 0$. Определим $L'0=0$.

$L'cf(x)=L'f(x)$. Доказательство . $L'cf(x)=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{cf(rx)}{cf(x)}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{f(rx)}{f(x)}=L'f(x)$.

$L'f(x)g(x)=L'f(x)+L'g(x)$. Доказательство . $L'f(x)g(x)=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{f(rx)g(rx)}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{f(rx)}{f(x)}+\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{g(rx)}{g(x)}=L'f(x)+L'g(x)$.

$L'\dfrac{f(x)}{g(x)}=L'f(x)-L'g(x)$. Доказательство . $L'\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{\dfrac{f(rx)}{g(rx)}}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{\dfrac{f(rx)}{f(x)}}{\dfrac{g(rx)}{g(x)}}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{f(rx)}{f(x)}-\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{g(rx)}{g(x)}=L'f(x)-L'g(x)$.

$L'f(x)^{g(x)}=g(x)\left(\left(L'g(x)\right)\ln f(x)+L'f(x)\right)$. Доказательство . $L'f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{f(rx)^{g(rx)}}{f(x)^{g(x)}}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{\dfrac{f(rx)^{g(rx)}}{f(rx)^{g(x)}}}{\dfrac{f(x)^{g(x)}}{f(rx)^{g(x)}}}=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{f(rx)^{g(rx)}}{f(rx)^{g(x)}}-\lim\limits_{r\to 1}\log_r\left(\dfrac{f(x)}{f(rx)}\right)^{g(x)}=$

$$=\lim_{r\to1}\frac{\log_r\dfrac{f(rx)^{g(rx)}}{f(rx)^{g(x)}}}{\log_r\dfrac{g(rx)}{g(x)}}\log_r\frac{g(rx)}{g(x)}+\lim_{r\to1}\log_r\left(\frac{f(rx)}{f(x)}\right)^{g(x)}=\lim_{r\to1}\log_{\frac{g(rx)}{g(x)}}\frac{f(rx)^{g(rx)}}{f(rx)^{g(x)}}\log_r\frac{g(rx)}{g(x)}+\lim_{r\to1}\log_r\left(\frac{f(rx)}{f(x)}\right)^{g(x)}\quad,\lim_{r\to1}\log_r\frac{g(rx)}{g(x)}=L'g(x),\lim_{r\to1}\frac{g(rx)}{g(x)}=1\ .$$

Let $\dfrac{g(rx)}{g(x)}=\alpha\to1,\ g(rx)=\alpha g(x)$ откуда $\lim\limits_{r\to1}\log_{\frac{g(rx)}{g(x)}}\dfrac{f(rx)^{g(rx)}}{f(rx)^{g(x)}}=\lim\limits_{\alpha\to1}\log_\alpha\dfrac{f(rx)^{\alpha g(x)}}{f(rx)^{g(x)}}=\lim\limits_{\alpha\to1}\log_\alpha f(rx)^{(\alpha-1)g(x)}=\lim\limits_{\alpha\to1}(\alpha-1)g(x)\log_\alpha f(rx)=\lim\limits_{\alpha\to1}(\alpha-1)g(x)\dfrac{\ln f(rx)}{\ln\alpha}=$

$=\lim\limits_{r\to1}g(x)\ln f(rx)\lim\limits_{\alpha\to1}\dfrac{\alpha-1}{\ln\alpha}=g(x)\ln f(x)$, потому что $\lim\limits_{\alpha\to1}\dfrac{\alpha-1}{\ln\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to1}\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\lim\limits_{\alpha\to1}\alpha=1,\quad\lim\limits_{r\to1}\log_r\left(\dfrac{f(rx)}{f(x)}\right)^{g(x)}=\lim\limits_{r\to1}g(x)\log_r\dfrac{f(rx)}{f(x)}=g(x)L'f(x)$.

$L(f(x))^c=c((L'c)\ln f(x)+L'f(x))=cL'f(x)$.

Другое доказательство $L'(f(x))^c=\dfrac{x\left((f(x))^c\right)'}{(f(x))^c}=\dfrac{xc(f(x))^{c-1}f'(x)}{(f(x))^c}=c\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=cL'f(x)$.

$L'\ln x=\dfrac{1}{\ln x}$. Доказательство $L'\ln x=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{\ln\frac{\ln rx}{\ln x}}{\ln r}=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{\frac{\ln r+\ln x}{\ln x}}{\ln r}=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{\ln\left(1+\frac{\ln r}{\ln x}\right)}{\ln r}=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{\dfrac{\frac{1}{r}\frac{1}{\ln x}}{1+\frac{\ln r}{\ln x}}}{\frac{1}{r}}=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{1}{\ln x\left(1+\frac{\ln r}{\ln x}\right)}=\dfrac{1}{\ln x}$.

Пример . $L'\log_{g(x)}f(x)=\lim\limits_{r\to1}\log_r\dfrac{\log_{g(rx)}f(rx)}{\log_{g(x)}f(x)}=\lim\limits_{r\to1}\log_r\dfrac{\dfrac{\log_{f(x)}f(rx)}{\log_{f(x)}g(rx)}}{\dfrac{\log_{f(x)}f(x)}{\log_{f(x)}g(x)}}=\lim\limits_{r\to1}\log_r\left(\log_{f(x)}f(rx)\dfrac{\log_{f(x)}g(x)}{\log_{f(x)}g(rx)}\right)=\lim\limits_{r\to1}\log_r\left(\log_{f(x)}f(rx)\log_{g(rx)}g(x)\right)=\lim\limits_{r\to1}\log_r\dfrac{\log_{f(x)}f(rx)}{\log_{g(x)}g(rx)}=$

$$\lim_{r\to1}\left(\log_r \log_{f(x)} f(rx)-\log_{g(x)} g(rx)\right)=\lim_{r\to1}\left(\log_r \frac{\ln f(rx)}{\ln f(x)}-\log_r \frac{\ln g(rx)}{\ln g(x)}\right)=\lim_{r\to1}\log_r \frac{\ln f(rx)}{\ln f(x)}-\lim_{r\to1}\log_r \frac{\ln g(rx)}{\ln g(x)}=L'\ln f(x)-L'\ln g(x)=\frac{L'f(x)}{\ln f(x)}-\frac{L'g(x)}{\ln g(x)}\ .$$

$L'f(x)=\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$. Доказательство $L'f(x)=\lim\limits_{r\to1}\dfrac{\ln f(rx)-\ln f(x)}{\ln r}$. Пусть $\ln r=\mu$, значит $\lim\limits_{r\to1}\mu=0, r=e^{\mu}$, тогда

$$L'f=\lim_{\mu\to0}\frac{\ln f(e^{\mu}x)-\ln f(x)}{\mu}=\lim_{\mu\to0}\frac{\ln f(x+\mu x)-\ln f(x)}{\mu}=\lim_{\mu\to0}x\frac{\ln f(x+\mu x)-\ln f(x)}{x\mu}=x\lim_{\mu\to0}\frac{\ln f(x+\mu x)-\ln f(x)}{x\mu}=x(\ln f(x))'=\frac{xf'(x)}{f(x)}\ .$$

$p'f(x)=e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, тогда $\ln p'f(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $x\ln p'f(x)=\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$, $x\ln p'f(x)=L'f(x)$, $L_x'y=\dfrac{xy_x'}{y}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}=\dfrac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}=\dfrac{(\ln y)_x'}{(\ln x)_x'}$.

Сложная функция $y=f(x)$, $y=f(g)$, $g=\phi(x)$, поэтому $f_x'(g(x))=f_g'(g)g_x'(x)$, отсюда $L_x'f(g(x))=\dfrac{xf_x'(g(x))}{f(g(x))}=\dfrac{xf_g'(g)g'(x)}{f(g)}=\dfrac{gf_g'(g)}{f(g)}\dfrac{xg'(x)}{g(x)}=L_g'f(g)\bullet L_x'g(x)$.

Другое доказательство $L_x'y=\dfrac{(\ln y)_x'}{(\ln x)_x'}=\dfrac{(\ln y)_x'}{(\ln x)_x'}\dfrac{(\ln g)_x'}{(\ln g)_x'}=\dfrac{(\ln y)_x'}{(\ln g)_x'}\dfrac{(\ln g)_x'}{(\ln x)_x'}=\dfrac{(\ln y)_x'}{(\ln g)_x'}L_x'g(x)=\dfrac{(\ln y)_g'\bullet g_x'}{(\ln g)_g'\bullet g_x'}L_x'g(x)=\dfrac{(\ln y)_g'}{(\ln g)_g'}L_x'g(x)=L_g'y(g)\bullet L_x'g(x)$.

Другое доказательство $L_x'f(g(x))=\lim\limits_{r\to1}\log_r\dfrac{f(rg(x))}{f(g(x))}=\lim\limits_{r\to1}\left(\dfrac{\log_r\frac{f(rg(x))}{f(g(x))}}{\log_r\frac{g(rx)}{g(x)}}\log_r\dfrac{g(rx)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{r\to1}\left(\log_{\frac{g(rx)}{g(x)}}\dfrac{f(rg(x))}{f(g(x))}\log_r\dfrac{g(rx)}{g(x)}\right)$.

Пусть $\dfrac{g(rx)}{g(x)}=\alpha\to1, g(rx)=\alpha g(x)$, отсюда $\lim\limits_{r\to1}\left(\log_{\frac{g(rx)}{g(x)}}\dfrac{f(rg(x))}{f(g(x))}\log_r\dfrac{g(rx)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{\alpha\to1}\left(\log_{\alpha}\dfrac{f(\alpha g)}{f(g)}\right)\lim\limits_{r\to1}\left(\log_r\dfrac{g(rx)}{g(x)}\right)=L_g'f(g)L_x'g(x)$.

Пример . $L'\ln f(x) = L_g'\ln(g)L_x'f(x) = \dfrac{g(\ln g)_g'}{\ln g}L_x'f(x) = \dfrac{g\frac{1}{g}}{\ln g}L_x'f(x) = \dfrac{1}{\ln g}L_x'f(x) = \dfrac{1}{\ln f(x)}L'f(x)$.

Пример . $L_x'\sin(x^2) = L_g'\sin gL_x'x^2 = \dfrac{g\cos g}{\sin g}\dfrac{2x^2}{x^2} = 2x^2ctg(x^2)$. $L_x'\sin(x^2) = \dfrac{x(\sin(x^2))'}{\sin(x^2)} = 2x^2ctg(x^2)$.

$L_x'f(nx) = L_g'f(g)L_x'(nx) = L_g'f(g)$, потому что $L_x'(nx) = \dfrac{x(nx)'}{nx} = 1.$

Пример . $L'\sin 2x = \dfrac{x(\sin 2x)'}{\sin 2x} = \dfrac{2x\cos 2x}{\sin 2x}$, по формуле $L_x'f(g(x)) = L_g'f(g)\bullet L_x'g(x)$, $L'\sin 2x = L_g'\sin g\bullet L_x'2x = \dfrac{g\cos g}{\sin g}\dfrac{x2}{2x} = \dfrac{g\cos g}{\sin g} = \dfrac{2x\cos 2x}{\sin 2x}$, по формуле $L_x'f(nx) = L_g'f(g)L_x'(nx) = L_g'f(g)$, $L'\sin 2x = L_g'\sin g = \dfrac{g\cos g}{\sin g} = \dfrac{2x\cos 2x}{\sin 2x}$.

Пример . $L'\lambda e^{\mu x} = \dfrac{x(\lambda e^{\mu x})'}{\lambda e^{\mu x}} = \mu x$, по формуле $L_x'f(g(x)) = L_g'f(g)\bullet L_x'g(x)$, $L'\lambda e^{\mu x} = L_g'e^g\bullet L_x'\mu x = \dfrac{ge^g}{e^g}\dfrac{x\mu}{\mu x} = g = \mu x$, по формуле $L_x'f(nx) = L_g'f(g)L_x'(nx) = L_g'f(g)$, $L'\lambda e^{\mu x} = L'e^{\mu x} = L_g'e^g = \dfrac{ge^g}{e^g} = g = \mu x$.

Пусть функция $f(x)$ четная , откуда $L'f(-x) = \dfrac{-xf'(-x)}{f(-x)} = \dfrac{-xf'(x)}{-f(x)} = \dfrac{xf(x)}{f(x)} = L'f(x)$, то есть L производная четной функции нечетная функция .

Пусть функция $f(x)$ нечетная , значит $L'f(-x) = \dfrac{-xf'(-x)}{f(-x)} = \dfrac{-x(-f'(x))}{f(x)} = \dfrac{xf'(x)}{f(x)} = L'f(x)$, то есть L производная нечетной функции четная функция .

Пример .

$$L'c=\frac{xc'}{c}=0, L'x^a=\frac{xax^{a-1}}{x^a}=a,$$

$$L'x=1, L'g(x)^a=\frac{xag(x)^{a-1}g'(x)}{g(x)^a}=a\frac{xg'(x)}{g(x)}=aL'g(x),$$

$$L'a^{g(x)}=\frac{xa^{g(x)}\ln a g'(x)}{a^{g(x)}}=x\ln a g'(x)=x\ln a\frac{g(x)}{x}L'g(x)=g(x)\ln a L'g(x),\ \text{поскольку}\ \ g'(x)=\frac{g(x)}{x}L'g(x), L'a^x=\frac{xa^x\ln a}{a^x}=x\ln a$$

$$L'x^x=\frac{xx^x(1+\ln x)}{x^x}=x(1+\ln x), L'\sin x=\frac{x\cos x}{\sin x}=xctgx\ ,$$

$$L'\cos x=\frac{-x\sin x}{\cos x}=-xtgx, L'tgx=\frac{x\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx}=\frac{2x}{\sin 2x},$$

$$L'ctgx=\frac{-x\frac{1}{\sin^2 x}}{ctgx}=-\frac{2x}{\sin 2x}, L'shx=\frac{xchx}{shx}=xcthx,$$

$$L'chx=\frac{xshx}{chx}=xthx, L'thx=\frac{x\frac{1}{ch^2 x}}{thx}=\frac{2x}{sh2x},$$

$$L'cthx=\frac{-x\frac{1}{sh^2 x}}{cthx}=-\frac{2x}{sh2x}, L'\left(\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{x\left(\frac{1}{\ln x}\right)'}{\frac{1}{\ln x}}=-\frac{1}{\ln x},$$

$$L'\frac{1}{c-\ln x}=\frac{x\left(\frac{1}{c-\ln x}\right)'}{\frac{1}{c-\ln x}}=\frac{1}{c-\ln x}$$

$$L'f(x)+L'\frac{1}{f(x)}=L'f(x)+L'1-L'f(x)=0$$

$$L'(u+v)=x\frac{u'+v'}{u+v}=x\frac{u'+v'}{uv}\frac{uv}{u+v}=\frac{uv}{u+v}\left(\frac{1}{v}\frac{xu'}{u}+\frac{1}{u}\frac{xv'}{v}\right)=\frac{uv}{u+v}\left(\frac{1}{v}L'u+\frac{1}{u}L'v\right)$$

$$L'(u-v)=\frac{-uv}{u-v}\left(-\frac{1}{v}L'u+\frac{1}{u}L'(-v)\right)=\frac{uv}{u-v}\left(\frac{1}{v}L'u-\frac{1}{u}L'v\right).$$

Пусть $y=f(x), x=g(y)$, поэтому $y'_x=\frac{1}{x'_y}, f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$, тогда $L'f(x)=\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{g(y)}{g'(y)f(x)}=\frac{g(y)}{g'(y)y}=\frac{1}{\frac{yg'(y)}{g(y)}}=\frac{1}{L'g(y)}$.

$$L'(af(x)+b)=\frac{af(x)b}{af(x)+b}\left(\frac{1}{b}L'af(x)+\frac{1}{af(x)}L'b\right)=\frac{af(x)b}{af(x)+b}\frac{1}{b}L'f(x)=\frac{af(x)}{af(x)+b}L'f(x),\quad L'(a\ln x+b)=\frac{a\ln x}{a\ln x+b}\frac{1}{\ln x}=\frac{a}{a\ln x+b}$$

Пример. $L'(x+1)=\frac{x(x+1)'}{x+1}=\frac{x}{x+1}, L''(x+1)=L'\left(\frac{x}{x+1}\right)=L'x-L'(x+1)=1-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}, L'''(x+1)=L'\left(\frac{1}{x+1}\right)=L'1-L'(x+1)=0-\frac{x}{x+1}=$

$=-\frac{x}{x+1}, L^{(4)}(x+1)=L'\left(-\frac{x}{x+1}\right)=L'\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{1}{x+1}, L^{(5)}(x+1)=L'\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{x}{x+1}, L^{(6)}(x+1)=L'\left(-\frac{x}{x+1}\right)=\frac{1}{x+1}, L^{(7)}(x+1)=L'\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{x}{x+1}$

$$L^{(2n)}(x+1)=\frac{1}{x+1}, L^{(2n+1)}(x+1)=-\frac{x}{x+1}, n=1,2,..$$

Функция дана параметрически $y=f(x), y=u(t), x=v(t)$, $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{u'(t)}{v'(t)}, t=v^{-1}(x), y=u\left(v^{-1}(x)\right), y'_x=u'\left(v^{-1}(x)\right)\left(v^{-1}(x)\right)'=u'(t)\frac{1}{v'(t)}=\frac{u'(t)}{v'(t)}$,

$L_x'y = L_x'\left(u\left(v^{-1}(x)\right)\right) = L_{v^{-1}}'u\left(v^{-1}(x)\right)L_x'v^{-1}(x) = L'u(t)\frac{1}{L'v(t)} = \frac{L'u(t)}{L'v(t)}$.

$y=\sin t$, $x=\cos t$, $x^2+y^2=1$, $L'\sin t = tctgt$, $L'\cos t = -ttgt$, $L_x'y = \frac{tctgt}{-ttgt} = -ctg^2 t$, $t=\arccos x$, $ctg(\arccos x) = \frac{\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $L_x y = \frac{-x^2}{1-x^2} = \frac{x^2}{x^2-1}$

$y=\sqrt{1-x^2}$, $L_x'y = \frac{1}{2}L_x'\left(1-x^2\right) = \frac{1}{2}\frac{-x^2}{1-x^2}L_x'\left(-x^2\right) = \frac{x^2}{x^2-1}$

Пример . Пусть $y=f(x), x=g(t), t=h(x), y=f\left(g(t)\right)$ Функции $x=g(t), t=h(x)$ обратные , отсюда $\frac{dg}{dt} = \frac{1}{\frac{dh}{dx}}, x_t' = g_t' = \frac{1}{h_x'} = \frac{1}{t_x'}, g_{tt}'' = -\frac{h_{xx}''}{\left(h_x'\right)^2}\frac{1}{h_x'}$,

тогда $\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}, \frac{df}{dg} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}$, производная $\frac{df}{dg}$ эквивалентна производной $\frac{dy}{dx}$, тогда $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dg}{dt}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dg}{dt}}\frac{dy}{dt} = \frac{dh}{dx}\frac{dy}{dt} = h_x'\frac{dy}{dt} = \frac{1}{g_t'}\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow f_g' = \frac{1}{g_t'}f_t'$, $y_x' = \frac{1}{g_t'}y_t'$.

Другое решение . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}h_x' = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x_t'} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{g_t'}$ i.e. $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}\frac{1}{g_t'}$, нахождение производной по x эквивалентно нахождению производной по t умноженной на $\frac{1}{g_t'}$.

Пусть $x=e^t, t=\ln x$ итак $y_x' = y_t't_x' = y_t'\frac{1}{x_t'} = y_t'e^{-t}$, то есть $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}e^{-t}$. Можно найти так $y_t' = f_g'g_t' = f_g'e^t, y_x' = f_g' = \frac{1}{g_t'}y_t' = y_t'\frac{1}{e^t} = y_t'e^{-t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(h_x'\frac{dy}{dt}\right) = h_{xx}''\frac{dy}{dt} + h_x'\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = h_{xx}''\frac{dy}{dt} + \left(h_x'\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\left(g_t'\right)^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{g_{tt}''}{\left(g_t'\right)^2}\frac{1}{g_t'}\frac{dy}{dt}.$$

Другое решение . $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{g_t'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{g_t'}\right)\frac{1}{g_t'} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{g_t'} + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{g_t'}\right)\right)\frac{1}{g_t'} = \frac{1}{\left(g_t'\right)^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{g_{tt}''}{\left(g_t'\right)^2}\frac{1}{g_t'}\frac{dy}{dt}$

$y_{tt}'' = y_t'\left(f_g'g_t'\right) = f_{gg}''g_t'g_t' + f_g'g_{tt}'' = f_{gg}''\left(g_t'\right)^2 + f_g'g_{tt}'' = f_{gg}''e^{2t} + y_t'e^{-t}e^t = f_{gg}''e^{2t} + y_t' = y_{xx}''e^{2t} + y_t'$ so $y_{xx}'' = \left(y_{tt}'' - y_t'\right)e^{-2t}$.

Можно найти так $y_{xx}'' = y_x'\left(y_x'\right) = y_x'\left(y_t'e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(y_t'e^{-t}\right)e^{-t} = \left(y_{tt}''e^{-t} + y_t'\left(-e^{-t}\right)\right)e^{-t} = \left(y_{tt}'' - y_t'\right)e^{-2t}$. Можно найти по формуле $y_{xx}'' = y_{tt}''\frac{1}{e^{2t}} - y_t'\frac{e^t}{e^{2t}}\frac{1}{e^t} = \left(y_{tt}'' - y_t'\right)e^{-2t}$.

Пример . $y=\sin x \quad x=e^t \quad y_x'=\cos x \quad y_x''=-\sin x \quad y=\sin e^t \Rightarrow y_t'=e^t\cos e^t \quad y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{e^t\cos e^t}{e^t}=\cos e^t=\cos x$,

$y_{tt}''=\left(e^t\cos e^t\right)_t'=-e^te^t\sin e^t+e^t\cos e^t=-e^{2t}\sin e^t+e^t\cos e^t \Rightarrow y_{xx}''=\dfrac{-e^{2t}\sin e^t+e^t\cos e^t-e^t\cos e^t}{e^{2t}}=-\sin e^t=-\sin x$.

Функция дана неявно $xy=1$, $L'x+L'y=0$, $L'y=-L'x=-1$, по другому $y=\dfrac{1}{x}$, тогда $L'y=-1$,

$x^2+y^2=1, L'\left(x^2+y^2\right)=L'1, \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\left(\dfrac{1}{y^2}L'x^2+\dfrac{1}{x^2}L'y^2\right)=0$, откуда $\dfrac{L'y}{x^2}=-\dfrac{1}{y^2}$, $L'y=-\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{x^2}{x^2-1}$, по другому $y=\sqrt{1-x^2}$, $L'y=\dfrac{1}{2}\dfrac{-x^2}{1-x^2}2=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Пример . $y=\sin x, L'y=\dfrac{x\cos x}{\sin x}=xctgx$. Let $s(x)=\int\dfrac{1}{x}dx=\ln x$, рассмотрим функцию $g(x)=f(\ln x)=\sin(\ln x)$, отсюда $g'(x)=\cos(\ln x)\dfrac{1}{x}$,

$L_x'g(x)=\dfrac{x\cos(\ln x)\frac{1}{x}}{\sin(\ln x)}=\dfrac{\cos(\ln x)}{\sin(\ln x)}=ctg(\ln x)$, тогда $L_s'g(s)=ctg(s)$, $L''y=1+\dfrac{x(-\sin x)}{\cos x}-\dfrac{x\cos x}{\sin x}=1-x(tgx+ctgx)=1-x\dfrac{2}{\sin 2x}$,

$g''(x)=\dfrac{-\sin(\ln x)\frac{1}{x}x-\cos(\ln x)}{x^2}=\dfrac{-(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))}{x^2}, L_x''g(x)=1+\dfrac{x\frac{-(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))}{x^2}}{\cos(\ln x)\frac{1}{x}}-\dfrac{x\cos(\ln x)\frac{1}{x}}{\sin(\ln x)}=$

$=1-\dfrac{\sin(\ln x)+\cos(\ln x)}{\cos(\ln x)}-\dfrac{\cos(\ln x)}{\sin(\ln x)}=-\left(\dfrac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln x)}+\dfrac{\cos(\ln x)}{\sin(\ln x)}\right)=-\dfrac{2}{\sin(2\ln x)}$.

Другое решение . $L_x''g(x)=L_x'\left(ctg(\ln x)\right)=\dfrac{x\frac{-1}{\sin^2(\ln x)}\frac{1}{x}}{ctg(\ln x)}=-\dfrac{2}{\sin(2\ln x)}$.

$y=f(x), L'y=\frac{xy'}{y}=\frac{xf'(x)}{f(x)}, s(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x, g(x)=f(\ln x)$, поэтому $g'(x)=f_s'(s)\frac{1}{x}, L_x'g(x)=\frac{xg'(x)}{g(x)}=\frac{xf_s'(s)\frac{1}{x}}{f(s)}=\frac{f_s'(s)}{f(s)}=\frac{g'(s)}{g(s)}$

$g''(x)=\left(\frac{f_s'(s)}{x}\right)_x'=\frac{f_s''(s)\frac{1}{x}x-f_s'(s)}{x^2}=\frac{f_s''(s)-f_s'(s)}{x^2}, L_x''g(x)=1+\frac{x\frac{f_s''(s)-f_s'(s)}{x^2}}{f_s'(s)\frac{1}{x}}-\frac{xf_s'(s)\frac{1}{x}}{f(s)}=1+\frac{f_s''(s)-f_s'(s)}{f_s'(s)}-\frac{f_s'(s)}{f(s)}=\frac{f_s''(s)}{f_s'(s)}-\frac{f_s'(s)}{f(s)}=\frac{g''(s)}{g'(s)}-\frac{g'(s)}{g(s)}$.

Другое решение $L_x''g(x)=L_x'\left(L_x'g(x)\right)=L_x'\left(\frac{f_s'(s)}{f(s)}\right)=\frac{x\left(\frac{f_s'(s)}{f(s)}\right)_x'}{\frac{f_s'(s)}{f(s)}}=\frac{x\frac{f_s''(s)\frac{1}{x}f(s)-\left(f_s'(s)\right)^2\frac{1}{x}}{f^2(s)}}{\frac{f_s'(s)}{f(s)}}=\frac{f_s''(s)f(s)-\left(f_s'(s)\right)^2}{f_s'(s)f(s)}=\frac{f_s''(s)}{f_s'(s)}-\frac{f_s'(s)}{f(s)}=\frac{g''(s)}{g'(s)}-\frac{g'(s)}{g(s)}$.

Эти производные $L'g(s), L''g(s)$ не зависят явно от переменной s .

Геометрический смысл L производной .

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция , $f'(x_0)=\tan\alpha=k$, где α это угол который образует касательная к графику функции $f(x)$ в точке касания $y_0=f(x_0)$.

Пусть $u(x)=\ln f(x)$, отсюда $u'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $u(x_0)=\ln f(x_0)=\tan\gamma=k_{\ln}$, где γ это угол который образует касательная к графику функции $u(x)=\ln f(x)$ в точке касания $u_0=\ln f(x_0)$, то есть $\tan\gamma=k_{\ln}=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$. Найдем $L'f(x)=\frac{xf'(x)}{f(x)}$ в точке касания $L'f(x_0)=\frac{x_0f'(x_0)}{f(x_0)}=x_0k_{\ln}$, откуда L производная функции $f(x)$ в точке касания равна угловому коэффициенту $k_{\ln}$ касательной к графику функции $u(x)=\ln f(x)$ в точке касания $u(x_0)=\ln f(x_0)$ умноженному на x_0 . $k_{\ln}=\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$, $f'(x_0)=k$,

$k_{\ln}=\frac{k}{f(x_0)}$, $\frac{L'f(x_0)}{x_0}=\frac{k}{f(x_0)}$, $L'f(x_0)=\frac{x_0k}{f(x_0)}$.

Пример . $f(x)=\lambda e^{\mu x}$, $f'(x)=\lambda\mu e^{\mu x}$, $k=f'(x_0)=\lambda\mu e^{\mu x_0}$, $u(x)=\ln f(x)=\ln\lambda+\mu x$, $u'(x)=\mu$, $k_{\ln}=u(x_0)=\mu$, $L'f(x)=\dfrac{x\left(\lambda e^{\mu x}\right)'}{\lambda e^{\mu x}}=\mu x$, $L'f(x_0)=\mu x_0=x_0k_{\ln}$.

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция $g(x)=\ln f(x)$. Теорема Лагранжа для функции $g(x)$ получим $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$, поскольку $g'(x)=\left(\ln f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

найдем $\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$, $\dfrac{\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$, значит $\dfrac{c}{b-a}\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=\dfrac{cf'(c)}{f(c)}$, поэтому $L'f(c)=\ln\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{c}{b-a}}$.

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция $g(x)=\ln f(x)$. Теорема Лагранжа для функции $g(x)$ получим $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$, поскольку $g'(x)=\left(\ln f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

найдем $\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$, $\dfrac{\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$, значит $\dfrac{c}{b-a}\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=\dfrac{cf'(c)}{f(c)}$, поэтому $L'f(c)=\ln\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{c}{b-a}}$.

L производные высших порядков ,

$L''y=L'(L'y)=L'\left(\dfrac{xy'}{y}\right)=L'x+L'y'-L'y=1+\dfrac{xy''}{y'}-\dfrac{xy'}{y}$, по другому $L'\left(\dfrac{xy'}{y}\right)=\dfrac{x\left(\dfrac{xy'}{y}\right)'}{\dfrac{xy'}{y}}=\dfrac{\dfrac{(y'+xy'')y-x(y')^2}{y^2}}{\dfrac{y'}{y}}=\dfrac{y'y+xy''y-x(y')^2}{y'y}=1+\dfrac{xy''}{y'}-\dfrac{xy'}{y}$,

$$L'x^n = \frac{x\left(x^n\right)'}{x^n} = \frac{nx^n}{x^n} = n \text{ , } L''x^n = L'n = 0 \text{ .}$$

$$L'\left(f(x)\right)^c = \frac{x\left(\left(f(x)\right)^c\right)'}{\left(f(x)\right)^c} = \frac{cx\left(f(x)\right)^{c-1} f'(x)}{\left(f(x)\right)^c} = c\frac{xf'(x)}{f(x)} = cL'f(x) \text{ .}$$

$$L''\left(f(x)\right)^c = L'\left(L'\left(f(x)\right)^c\right) = L'\left(cL'f(x)\right) = L'\left(L'f(x)\right) = L''f(x) \text{ .}$$

$\left(\left(f'(x)\right)^c\right)' = c\left(f'(x)\right)^{c-1} f''(x)$, если $c = 1$ найдем $\left(f'(x)\right)' = f''(x)$.

$L'_x\left(L'_x f(x)\right)^c = c\left(L'_x\left(L'_x f(x)\right)\right) = cL''_{x^2} f(x)$. $L'_x\left(L'_x f(x)\right)^c = cL'_{L'}\left(L'f\right)L'_x\left(L'f(x)\right) = cL_{x^2}{}'' f(x)$, использована формула $L'f\left(g(x)\right) = L_g{}' f(g) L_x{}' g(x)$,

если $c = 1$ получим $L_x{}'\left(L_x{}' f(x)\right) = L_{x^2}{}'' f(x)$.

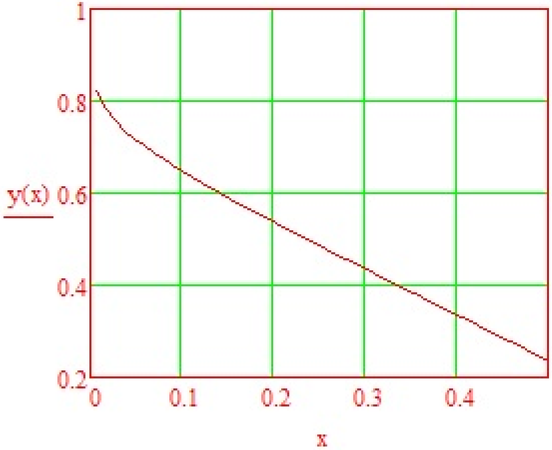
$$L'y' = \frac{x(y')'}{y'} = \frac{xy''}{y'} \text{ .}$$

$$L''y = 1 + x\left(\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y}\right) = 1 + x\left((\ln y')' - (\ln y)'\right) = 1 + x(\ln y' - \ln y)' = 1 + x\left(\ln\frac{y'}{y}\right)' = 1 + x\left(\ln\left(\frac{xy'}{y}\frac{1}{x}\right)\right)' = 1 + x(\ln L'y - \ln x)' = 1 + x\left(\ln\frac{L'y}{x}\right)' \text{ .}$$

$L''y = 1 + L'y' - L'y = 1 + L'\dfrac{y'}{y}$ отсюда $L'\dfrac{y'}{y} = x\left(\ln\dfrac{L'y}{x}\right)'$, $L''y = 1 + \dfrac{xy''}{y'} - \dfrac{xy'}{y}$.

$$L'''y = L'(L'') = L'\left(1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y}\right) = \frac{x\left(1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y}\right)'}{1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y}} = \frac{x}{1 + \frac{xy''}{y'} - \frac{xy'}{y}}\left(\frac{(y'' + xy''')y' - x(y'')^2}{(y')^2} - \frac{(y' + xy'')y - x(y')^2}{y^2}\right) \text{ .}$$

$$y(x) := e^{\frac{1}{\ln(x)}}$$



Пример . $\begin{cases} L'x(t)=x(t) \\ L'y(t)=-y(t) \end{cases}$, откуда $\begin{cases} \dfrac{tx'(t)}{x(t)}=x(t) \\ \dfrac{ty'(t)}{y(t)}=-y(t) \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{dx}{x(t)^2}=\dfrac{dt}{t} \\ \dfrac{dy}{y(t)^2}=-\dfrac{dt}{t} \end{cases}$, then $\begin{cases} \dfrac{1}{x(t)}=-\ln t+c_1 \\ \dfrac{1}{y(t)}=\ln t+c_2 \end{cases}$. Пусть $x(1)=1$, $y(1)=1$,тогда $c_1=1$, $c_2=1$, значит $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$.

Пусть $y(x)=y_1(x)+..+y_n(x)$ положительные функции , $L_{\min imum}$ минимум L производной функции $y_j(x)$ в некоторой точке x_0 , $L_{\max imum}$ максимум L производной функции $y_j(x)$ в некоторой точке x_0 , где $j=1,..,n$. Поэтому $L_{\min imum}\le L'y(x_0)\le L_{\max imum}$.

Доказательство $L'y=\dfrac{xy'}{y}=\dfrac{x\left(y_1'+..+y_n'\right)}{y}=\dfrac{xy_1'+..+xy_n'}{y}$. Пусть $a_j=\dfrac{y_j}{y}$, отсюда $L'y=\dfrac{y_1\dfrac{xy_1'}{y_1}+..+y_n\dfrac{xy_n'}{y_n}}{y}=\dfrac{y_1L'y_1+..+y_nL'y_n}{y}=a_1L'y_1+..+a_nL'y_n$, поскольку $a_1+..+a_n=\dfrac{y_1}{y}+..+\dfrac{y_n}{y}=\dfrac{y_1+..+y_n}{y}=1$, по определению $L'y_j\ge L_{\min imum}$, откуда $L'y(x_0)\ge a_1L_{\min imum}+..+a_nL_{\min imum}=$ $=(a_1+..+a_n)L_{\min imum}=L_{\min imum}$. Аналогично имеем $L'(x_0)\le L_{\max imum}$. Для производной получим $n\left(y_j'(x_0)\right)_{\min imum}\le y'(x_0)\le n\left(y_j'(x_0)\right)_{\max imum}$.

L производная функций нескольких переменных .

Пусть $z=u(x_1,..,x_n)$ непрерывная функция , значит $L_{x_j}'u=\lim\limits_{r\to 1}\log_r\dfrac{u(x_1,..,rx_j,..,x_n)}{u(x_1,..,x_n)}$, тогда $L_{x_j}'u=\dfrac{x_ju_{x_j}'}{u}$.

Рассмотрим функцию $z=u(x,y)$, тогда $L_y'u=\dfrac{yu_y'}{u}, L_{yx}''u=\dfrac{x\left(\dfrac{yu_y'}{u}\right)_x'}{\dfrac{yu_y'}{u}}=\dfrac{xu\dfrac{yu_{yx}''u-yu_y'u_x'}{u^2}}{yu_y'}=\dfrac{x\left(u_{yx}''u-u_y'u_x'\right)}{uu_y'}$,

$$L_x'u=\frac{xu_x'}{u},L_{xy}''u=\frac{y\left(\frac{xu_x'}{u}\right)_y'}{\frac{xu_x'}{u}}=\frac{yu\frac{xu_{xy}''u-xu_x'u_y'}{u^2}}{xu_x'}=\frac{y\left(u_{xy}''u-u_x'u_y'\right)}{uu_x'}$$, поэтому $L_{xy}''u\neq L_{yx}''u,\frac{L_{xy}''u}{L_{yx}''u}=\frac{y}{x}\frac{u_y'}{u_x'}=\frac{\frac{yu_y'}{u}}{\frac{xu_x'}{u}}=\frac{L_y'u}{L_x'u}$

$$L_{yy}''u=\frac{y\left(\frac{yu_y'}{u}\right)_y'}{\frac{yu_y'}{u}}=\frac{\frac{\left(u_y'+yu_{yy}''\right)u-y\left(u_y'\right)^2}{u^2}}{\frac{u_y'}{u}}=\frac{\left(u_y'+yu_{yy}''\right)u-y\left(u_y'\right)^2}{uu_y'},\quad L_{xx}''u=\frac{x\left(\frac{xu_x'}{u}\right)_x'}{\frac{xu_x'}{u}}=\frac{\frac{\left(u_x'+xu_{xx}''\right)u-x\left(u_x'\right)^2}{u^2}}{\frac{u_x'}{u}}=\frac{\left(u_x'+xu_{xx}''\right)u-x\left(u_x'\right)^2}{uu_x'}.$$

Рассмотрим функцию $y=f\left(t,x_1\left(t\right),..,x_n\left(t\right)\right)$, полная производня $\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+..+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$, отсюда

$$L_t'y=\frac{t\frac{dy}{dt}}{y}=\frac{t\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+..+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\right)}{f}=\frac{t\frac{\partial f}{\partial t}}{f}+\frac{x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}}{f}\frac{t\frac{dx_1}{dt}}{x_1}+..+\frac{x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}}{f}\frac{t\frac{dx_n}{dt}}{x_n}=L_t'f+L_{x_1}'f\bullet L_t'x_1+..+L_{x_n}'f\bullet L_t'x_n\ .$$

L неопределенный интеграл его свойства .

Пусть $F\left(x\right)$ первообразная функция в смысле L производной то есть $L'F\left(x\right)=f\left(x\right)$, тогда $L'cF\left(x\right)=f\left(x\right)$.

Поэтому L неопределенный интеграл имеет вид $L\int f\left(x\right)dx=cF\left(x\right)$.

$L'cF\left(x\right)=L'F\left(x\right)=f\left(x\right)$, $L'\left(L\int f\left(x\right)dx\right)=L'\left(cF\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$

$L'\left(L\int L'f\left(x\right)dx\right)=L'cf\left(x\right)=L'f\left(x\right)$, $L\int L'f\left(x\right)dx=cf\left(x\right)$

$L\int adx=cx^a,L'cx^a=a$

$L\int 0dx=c,L'c=0$

$L\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = L\int f(x)\,dxL\int g(x)\,dx$ Доказательство . $L'\left(L\int f(x)+g(x)\right)dx = f(x)+g(x), L'\left(L\int f(x)\,dxL\int g(x)\,dx\right) = L'\left(L\int f(x)\,dx\right) + L'\left(L\int g(x)\,dx\right) = f(x)+g(x)$.

$L\int \left(f(x)-g(x)\right)dx = \dfrac{L\int f(x)\,dx}{L\int g(x)\,dx}$.

$L\int \dfrac{L'f(x)}{\ln f(x)}dx = c\ln f(x)$, $L'c\ln f(x) = \dfrac{L'f(x)}{\ln f(x)}$

$L\int \left(L'f\left(g(x)\right)L'g(x)\right)dx = cf\left(g(x)\right)$, $L'\left(cf\left(g(x)\right)\right) = L'f\left(g(x)\right)L'g(x)$

$L\int xdx = ce^x$, $L'ce^x = x$

$L\int x^n dx = ce^{\frac{x^n}{n}}$, $L'ce^{\frac{x^n}{n}} = x\left(\dfrac{x^n}{n}\right)' = \dfrac{x}{n}nx^{n-1} = x^n$

$L\int x(1+\ln x)\,dx = ce^x$, $L'ce^x = x(1+\ln x)$

$L\int x\cos x dx = ce^{\sin x}$, $L'ce^{\sin x} = x(\sin x)'$

$L\int x\sin x dx = ce^{-\cos x}$, $L'ce^{-\cos x} = x(-\cos x)' = x\sin x$

$L\int \dfrac{1}{\ln x}dx = c\ln x$, $L'c\ln x = \dfrac{1}{\ln x}$

$L\int \left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)dx = \dfrac{c}{\ln x}$, $L'\dfrac{c}{\ln x} = -\dfrac{1}{\ln x}$

$L\int f(x)\,dx = e^{\int \frac{f(x)}{x}dx}$ Доказательство . $L'\left(L\int f(x)\,dx\right) = f(x), L'\left(e^{\int \frac{f(x)}{x}dx}\right) = x\left(\int \dfrac{f(x)}{x}dx\right)' = x\dfrac{f(x)}{x} = f(x)$.

Другое доказательство . $L'F(x) = f(x)$, отсюда $\dfrac{xF'(x)}{F(x)} = f(x)$, $\dfrac{dF}{F(x)} = \dfrac{f(x)}{x}dx$, $\ln F(x) = \int \dfrac{f(x)}{x}dx$ тогда $F(x) = e^{\int \frac{f(x)}{x}dx}$.

$$L\int L'f(x)\,dx = e^{\int \frac{L'f(x)}{x}dx} = e^{\int \frac{xf'(x)}{xf(x)}dx} = e^{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx} = e^{\int \frac{y'}{y}dx} = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y = f(x)\,,$$

$$L\int nf(x)\,dx = e^{\int \frac{nf(x)}{x}dx} = \left(L\int f(x)\,dx\right)^n\,,$$

$$L\int nx^m dx = \left(ce^{\frac{x^m}{m}}\right)^n = ce^{\frac{nx^m}{m}}, L'ce^{\frac{nx^m}{m}} = x\left(\frac{nx^m}{m}\right)' = \frac{xn}{m}mx^{m-1} = nx^m\,.$$

Пусть $L\int f(x)\,dx = cF(x)$, откуда $L\int f(nx)\,dx = cF(nx)$. Доказательство . $L'(cF(nx)) = L'F(nx) = f(nx), L'f(nx) = L_{nx}'f(nx)L_x'nx = L_{nx}'f(nx)$.

Пример . $L'x^m = m, L'(nx)^m = L'n^m x^m = m, L'(nx)^m = \dfrac{x\left((nx)^m\right)'}{(nx)^m} = \dfrac{xm(nx)^{m-1}\,n}{(nx)^m} = m$.

Пример . $L\int nx\cos nx dx = ce^{\sin nx}, L'ce^{\sin nx} = x(\sin nx)' = nx\cos nx$.

L определенный интеграл .

Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, разбиение отрезка $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$, Пусть $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, $x_j = x_{j-1} + \Delta x_j$, $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x_j \to 0$,

$rx_j = \dfrac{x_j}{x_{j-1}}$, $j = 1$, 2 , . . . , n , значит $\lim\limits_{n\to\infty} rx_n = 1$.

Определение $L\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{rx_j\to 1}(rx_1)^{f(\zeta_1)}\bullet..\bullet(rx_n)^{f(\zeta_n)}$, где $\zeta_j \in \left[x_{j-1}, x_j\right]$.

Свойства .

$L\int\limits_a^a f(x)\,dx = 1$. Доказательство $x_{j-1} = a$, $x_j = a$, $rx_j = 1$, $\zeta_j = a$, поэтому $L\int\limits_a^a f(x)\,dx = \lim\limits_{rx_j\to 1} 1^{f(a)}\bullet..\bullet 1^{f(a)} = 1$.

Пусть $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}, x_j = x_{j-1} + \Delta x_j$, отсюда $rx_j = \frac{x_{j-1} + \Delta x_j}{x_{j-1}} = 1 + \frac{\Delta x_j}{x_{j-1}}, \lim\limits_{rx_j \to 1} \Delta x_j = 0$.

Пусть $\frac{\Delta x_j}{x_{j-1}} \to 0$, тогда $\frac{\Delta x_j}{\zeta_j} \to 0$, откуда $\ln\left(1 + \frac{\Delta x_j}{x_{j-1}}\right) \sim \ln\left(1 + \frac{\Delta x_j}{\zeta_j}\right)$, поскольку $\ln\left(1 + \frac{\Delta x_j}{\zeta_j}\right) \sim \frac{\Delta x_j}{\zeta_j}$, то $(rx_j)^{f(\zeta_j)} = e^{f(\zeta_j)\ln(rx_j)} \sim e^{f(\zeta_j)\frac{\Delta x_j}{\zeta_j}}$,

итак найдем $L\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{rx_j \to 1} \prod\limits_{j=1}^{n} (rx_j)^{f(\zeta_j)} = \lim\limits_{rx_j \to 1} \prod\limits_{j=1}^{n} e^{f(\zeta_j)\ln rx_j} = \lim\limits_{rx_j \to 1} \prod\limits_{j=1}^{n} e^{f(\zeta_j)\frac{\Delta x_j}{\zeta_j}} = \lim\limits_{rx_j \to 1} e^{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j}\Delta x_j} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j}\Delta x_j} = e^{\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x}dx}$.

Пусть $F(x) = L\int f(x)\,dx = e^{\int \frac{f(x)}{x}dx}, \Phi(x) = \int \frac{f(x)}{x}dx$, значит $F(x) = e^{\Phi(x)}$, тогда $L\int\limits_a^b f(x)\,dx = e^{\Phi(x)|_a^b} = e^{\Phi(b)-\Phi(a)} == \frac{e^{\Phi(b)}}{e^{\Phi(a)}} = \frac{F(b)}{F(a)}$, поэтому $L\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{F(b)}{F(a)}$.

$L\int\limits_a^b x dx = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{\xi_j}\Delta x_j} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta x_j} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\frac{b-a}{n}\right)} = e^{b-a}$, где $\Delta x_j = \frac{b-a}{n}$, точки ξ_j это левые концы каждого отрезка .

$L\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{L\int\limits_b^a f(x)\,dx}$ Доказательство . $L\int\limits_a^b f(x)\,dx = e^{\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x}dx} = e^{-\int\limits_b^a \frac{f(x)}{x}dx} = \frac{1}{e^{\int\limits_b^a \frac{f(x)}{x}dx}} = \frac{1}{L\int\limits_b^a f(x)\,dx}$.

$L\int\limits_m^p f(x)\,dx = L\int\limits_m^n f(x)\,dx \bullet L\int\limits_n^p f(x)\,dx$, где $m < n < p$ Доказательство . $L\int\limits_m^p f(x)\,dx = e^{\int\limits_m^p \frac{f(x)}{x}dx} = e^{\int\limits_m^n \frac{f(x)}{x}dx + \int\limits_n^p \frac{f(x)}{x}dx} = L\int\limits_m^n f(x)\,dx \bullet L\int\limits_n^p f(x)\,dx$.

$L\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = L\int\limits_a^b f(x)\,dx \cdot L\int\limits_a^b g(x)\,dx$, $L\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \frac{L\int\limits_a^b f(x)dx}{L\int\limits_a^b g(x)\,dx}$.

Пусть $0 < f(x) \le g(x), 0 < a < b, x \in [a, b]$ поэтому $\frac{f(x)}{x} \le \frac{g(x)}{x}, \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \le \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx, L\int_a^b f(x)\,dx \le L\int_a^b g(x)\,dx$.

$a < b < 0$, тогда $\frac{f(x)}{x} \ge \frac{g(x)}{x}, \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \ge \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx, L\int_a^b f(x)\,dx \ge L\int_a^b g(x)\,dx$.

Пример . $L\int_e^x \left(L\int_e^{x_1} \frac{1}{\ln x_2} dx_2 \right) dx_1 = L\int_e^x (\ln x_2)_e^{x_1} dx_1 = L\int_e^x \frac{\ln x_1}{\ln e} dx_1 = e^{\int_e^x \frac{\ln x_1}{x_1} dx_1} = e^{\left.\frac{(\ln x_1)^2}{2}\right|_e^x} = e^{\frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2}} = e^{\frac{(\ln x)^2 - 1}{2}}$

можно ли найти интеграл $L\int_e^x g(x, x_1)\,dx_1$ который равен повторному интегралу $L\int_e^x \left(L\int_e^{x_1} f(x_2)\,dx_2 \right) dx_1$.

Пусть $m \le f(x) \le M, x > 0$, отсюда $L\int_a^b m\,dx \le L\int_a^b f(x)\,dx \le L\int_a^b M\,dx, (x^m)_a^b \le L\int_a^b f(x)\,dx \le (x^M)_a^b, \left(\frac{b}{a}\right)^m \le L\int_a^b f(x)\,dx \le \left(\frac{b}{a}\right)^M$.

Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, тогда существует такая точка $\zeta \in [a, b]$ что $L\int_a^b f(x)\,dx = e^{\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx} = e^{\frac{f(\zeta)}{\zeta}(b-a)}$.

$L\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{b}{a}\right)^{f(\zeta)}$. Доказательство . Поскольку $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ то $m \le f(x) \le M$, тогда $\left(\frac{b}{a}\right)^m \le L\int_a^b f(x)\,dx \le \left(\frac{b}{a}\right)^M$,

итак $m \le \log_{\frac{b}{a}} \left(L\int_a^b f(x)\,dx \right) \le M$, это означает что число $\log_{\frac{b}{a}} \left(L\int_a^b f(x)\,dx \right)$ принадлежит отрезку $[a, b]$, потому что функция $f(x)$ непрерывна , ограниченна числами m, M

тогда существует точка $\zeta \in [a, b]$ что $f(\zeta) = \log_{\frac{b}{a}} \left(L\int_a^b f(x)\,dx \right)$, откуда $L\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{b}{a}\right)^{f(\zeta)}$.

Геометрический смысл L интеграла .

Пусть S криволинейная трапеция ограниченная линиями $x=a, x=b, y=0, y=\frac{f(x)}{x}$, тогда $S=\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$. Отсюда $L\int_a^b f(x)dx = e^{\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx} = e^S$, значит $S=\ln\left(L\int_a^b f(x)dx\right)$.

L интеграл с переменным верхним пределом $L_x'\left(L\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)$. Доказательство . $L\int_a^x f(t)dt = e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt}, L_x'\left(L\int_a^x f(t)dt\right) = \frac{x\left(L\int_a^x f(t)dt\right)_x'}{L\int_a^x f(t)dt}$

найдем производную $\left(L\int_a^x f(t)dt\right)_x' = \left(e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt}\right)_x' = e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt} \cdot \left(\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt\right)_x' = e^{\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt} \cdot \frac{f(x)}{x} = L\int_a^x f(t)dt \cdot \frac{f(x)}{x}$.

Другое доказательство . Пусть $\int_a^x \frac{f(t)}{t}dt = g(x)$ поэтому $g'(x)=\frac{f(x)}{x}, L\int_a^x f(t)dt = e^{g(x)}$ тогда $L_x'\left(L\int_a^x f(t)dt\right) = L_x' e^{g(x)} = xg'(x) = x\frac{f(x)}{x} = f(x)$

Другое доказательство $L_x'\left(L\int_0^x f(t)dt\right) = L_x'\left(F(t)_0^x\right) = L_x'\left(\frac{F(x)}{F(0)}\right) = L_x'F(x) - L_x'F(0) = L_x'F(x) = f(x)$.

$L_x'\left(L\int_a^x f(t)dt\right)^c = cL_x'\left(L\int_a^x f(t)dt\right) = cf(x)$.

Пример . $L\int_1^2 \ln x dx = e^{\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx} = e^{\int_1^2 \ln x d(\ln x)} = e^{\frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}} = e^{\frac{(\ln 2)^2}{2}} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{\ln 2}{2}} = 2^{\frac{\ln 2}{2}}$. Найдем интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j}\Delta x_j$. Пусть деление отрезка $[1,2]$ на n равных частей длины $\Delta x_j = \frac{1}{n}$, точки деления $x_0=1$, $x_1 = 1+\frac{1}{n}$, $x_2 = 1+\frac{2}{n}$, . . . , $x_{n-1} = 1+\frac{n-1}{n}$, $x_n = 2$, берем точки ζ_j левые концы каждого отрезка , то есть

$\zeta_1 = x_0$, $\zeta_2 = x_1$, . . . , $\zeta_n = x_{n-1}$, тогда $\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j} \Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(x_j)}{x_j} \frac{1}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln\left(1+\frac{j-1}{n}\right)}{1+\frac{j-1}{n}} \frac{1}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln\left(1+\frac{j-1}{n}\right)}{n+j-1}$, значит $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln\left(1+\frac{j-1}{n}\right)}{n+j-1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln\left(1+\frac{-1}{n}\right)}{n-1} + \frac{\ln\left(1+\frac{0}{n}\right)}{n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + .. + \frac{\ln\left(1+\frac{n-2}{n}\right)}{2n-1} \right) = 2^{\frac{\ln 2}{2}} .$$

Несобственный интеграл $L\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

Пример . $L\int \frac{1}{x^n} dx = e^{\int \frac{1}{x^n}\frac{1}{x}dx} = e^{\int \frac{1}{x^{n+1}}dx} = \frac{1}{e^{\frac{1}{nx^n}}}$, $L\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{nt^n}}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{na^n}}} \right)$

если $n < 0$ тогда $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{nt^n}}} = e^{+\infty}$ интеграл рассходиться ,

если $n = 0$ тогда $f(x) = 1$ интеграл сходиться ,

если $n > 0$ тогда $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{nt^n}}} = \frac{1}{e^0} = 1$ интеграл сходиться .

Пример . $L\int xs^x dx = e^{\int \frac{xs^x}{x}dx} = e^{\frac{s^x}{\ln s}}$, $L\int_a^{+\infty} xs^x dx = \lim_{t\to+\infty} \left(e^{\frac{s^t}{\ln s}} - e^{\frac{s^a}{\ln s}} \right)$

если $0 < s < 1$, тогда $\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{s^t}{\ln s}} = e^0 = 1$ интеграл сходиться ,

если $s = 1$, тогда $L\int_a^{+\infty} xdx = \lim_{t\to+\infty} \left(e^t - e^a\right) = e^{+\infty} = +\infty$ интеграл рассходиться , если $s > 1$, тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{s^t}{\ln s}} = e^{+\infty} = +\infty$ интеграл рассходиться .

Пусть b точка разрыва функции $f(x)$, $a < b < h$. Отсюда $L\int\limits_a^h f(x)\,dx = \lim\limits_{\zeta_1\to+0} L\int\limits_a^{b-\zeta_1} f(x)\,dx + \lim\limits_{\zeta_2\to+0} L\int\limits_{b+\zeta_2}^h f(x)\,dx$

Пример . $L\int\limits_0^h \frac{dx}{x^q} = \lim\limits_{\zeta\to0}\left(e^{-\frac{x^{-q}}{q}}\right)_\zeta^h = \lim\limits_{\zeta\to0}\left(e^{-\frac{h^{-q}}{q}} - e^{-\frac{\zeta^{-q}}{q}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{qh^q}}} - \lim\limits_{\zeta\to0}\frac{1}{e^{\frac{1}{q\zeta^q}}}$

если $q < 0$, тогда $L\int\limits_0^h \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{e^{\frac{1}{qh^q}}} - 1$ интеграл сходиться ,

если $q = 0$, тогда $L\int\limits_0^h \frac{dx}{x^q} = L\int\limits_0^h dx = h$ интеграл сходиться ,

если $q > 0$, тогда $L\int\limits_0^h \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{e^{\frac{1}{qh^q}}}$ интеграл сходиться .

Пусть $F(y) = L\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = e^{\int_a^b \frac{f(x,y)}{x}dx}$. Поэтому $L_y'F(y) = y\int\limits_a^b \frac{f_y'(x,y)}{x}dx = \ln\left(L\int\limits_a^b f(x,y)L_y'f(x,y)\,dx\right)$.

Доказательство $L_y'F(y) = \frac{yF_y'(y)}{F(y)} = \frac{y\left(e^{\int_a^b \frac{f(x,y)}{x}dx}\right)_y'}{e^{\int_a^b \frac{f(x,y)}{x}dx}} = y\int\limits_a^b \frac{\frac{f(x,y)L_y'f(x,y)}{y}}{x}dx = \int\limits_a^b \frac{f(x,y)L_y'f(x,y)}{x}dx = \ln\left(L\int\limits_a^b f(x,y)L_y'f(x,y)\right)dx$.