$y_1(x), y_2(x)$ решая эту систему получим $c_1'(x)=r_1(x), c_2'(x)=r_2(x)$, отсюда $c_1(x)=\int r_1(x)\,dx+c_1, c_2(x)=\int r_2(x)\,dx+c_2$ значит $y=y_1(x)^{\int r_1(x)dx+c_1}\ y_2(x)^{\int r_2(x)dx+c_2}$.

Дифференциальное уравнение которое не содержит независимую переменную можно решить подстановкой $y'(x)=z(y), y''(x)=z(y)z'(y)$,
после этого получим дифференциальное уравнение которое содержит зависимую переменную .

Другое решение . $y^{a_0}(p'y)^{a_1}(p''y)^{a_2}=f(x)$. Пусть $y(0)=c_0, p'y(0)=c_1, p''y=g(x)$, поэтому $p'y=p'y(0)P\int\limits_0^x g(t)\,dt=c_1P\int\limits_0^x g(t)\,dt, y=P\int\limits_0^x\left(c_1P\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)=c_1^{\,x}P\int\limits_0^x\left(P\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)dx$,

рассмотрим выражение $P\int\limits_0^x\left(P\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)dx=P\int\limits_0^x\left(e^{\int\limits_0^x \ln g(t)dt}\right)dx=e^{\int\limits_0^x\left(\ln e^{\int\limits_0^x \ln g(t)dt}\right)dx}=e^{\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^x \ln g(t)dt\right)dx}=e^{\int\limits_0^x dx\int\limits_0^x \ln g(t)dt}=e^{\int\limits_0^x (x-t)\ln g(t)dt}=e^{\int\limits_0^x \ln g(t)^{(x-t)}dt}=P\int\limits_0^x g(t)^{(x-t)}\,dt$,

тогда $P\int\limits_0^x\left(P\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)dx=P\int\limits_0^x g(t)^{(x-t)}\,dt, y=c_1^{\,x}\left(c_0P\int\limits_0^x g(t)^{(x-t)}\,dt\right)$.

Подставим эти выражения в данное уравнение $g(t)^{a_2}\bullet\left(c_1P\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)\left(c_1^{\,x}c_0P\int\limits_0^x g(t)^{(x-t)}\,dt\right)^{a_0}=f(x)$, $g(x)^{a_2}\bullet\left(P\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)^{a_1}\bullet\left(P\int\limits_0^x g(t)^{(x-t)}\,dt\right)^{a_0}\bullet c^{a_0}\bullet c_1^{\,a_0x+a_1}=f(x)$,

$g(x)\bullet\left(P\int\limits_0^x g(t)^{a_1}\,dt\right)\bullet\left(P\int\limits_0^x g(t)^{a_0(x-t)}\,dt\right)=f_1(x), g(x)\bullet\left(P\int\limits_0^x g(t)^{a_0(x-t)+a_1}\,dt\right)=f_1(x)$, где $f_1(x)=\dfrac{f(x)}{c^{a_0}c_1^{\,a_0x+a_1}}$. Это интегральное уравнение , поэтому если $y(x)$ решение этого

p дифференциального уравнения , то $g(x)$ решение интегрального уравнения $g(x)\bullet e^{\int\limits_0^x \ln g(t)^{a_0(x-t)+a_1}dt}=f_1(x), e^{\int\limits_0^x \ln g(t)^{a_0(x-t)+a_1}dt}=\dfrac{f_1(x)}{g(x)}, \int\limits_0^x\left(a_0(x-t)+a_1\right)\ln g(t)\,dt=\ln\dfrac{f_1(x)}{g(x)}$

Пусть $f(x)=e^{Qx}$, тогда решение неоднородного может быть найденно в виде $y(x)=e^{Tx+R}$ отсюда получим $e^{a_0(Tx+R)}e^{a_1T}=e^{Qx}$, окончательно

$a_0Tx+a_0R+a_1T=Qx, \begin{cases}a_0T=Q\\ a_0R+a_1T=0\end{cases}, T=\dfrac{Q}{a_0}, R=-\dfrac{a_1Q}{a_0^{\,2}}$

Пример . $x(t)^{a_0}\left(p'x(t)\right)^{a_1}\left(p''x(t)\right)^{a_2}p'''x(t)=f(t), a_1x'x^2+a_2\left(x''x-(x')^2+x'''x^2-3x''x-2x'(x')^2\right)=x^3\ln\frac{f}{x^{a_0}}$. Пусть $x'(t)=y(t), x''(t)=y'(t)$,

$x''(t)=z(t)$, значит $x'''(t)=z'(t), y'(t)=z(t)$ система уравнений

$$\begin{cases} x'(t)=y(t) \\ y'(t)=z(t) \\ z'(t)=x(t)\ln\dfrac{f(t)}{x(t)^{a_0}}-a_1y(t)-a_2\dfrac{z(t)x(t)-y(t)^2}{x(t)^2}+\dfrac{3z(t)}{x(t)}+\dfrac{2y(t)^3}{x(t)^2} \end{cases}$$

Пример . $p^{(n)}y(x)=f\left(p^{(n-1)}y(x)\right)$. Пусть $p^{(n-1)}y(x)=u(x)$, тогда $p'u(x)=f(u(x))$.

Пример . $p''y(x)=f\left(y(x),p'y(x)\right)$. Пусть $p'y=u(y)$, отсюда $p''y=p'u(y)=\left(p_y{}'u(y)\right)^{y'}$, поскольку $y'=y\ln p'y$

найдем $p''y=\left(p_y{}'u(y)\right)^{y\ln u(y)}$, значит $\left(p_y{}'u(y)\right)^{y\ln u(y)}=f(y,u), p_y{}'u(y)=f(y,u)^{\frac{1}{y\ln u(y)}}$.

Пример . $p^{(n)}y(x)=f\left(x,p^{(n-1)}y(x)\right)$. Пусть $p^{(n-1)}y(x)=u(x)$, поэтому $p'u(x)=f\left(x,u(x)\right)$.

Рассмотрим уравнение $p'x(t)=Rx(t)f(t)$. Решение этого уравнения найдем в виде $x(t)=u(t)^{v(t)}$, тогда $(p'u)^v u^{v'}=Ru^v f(t)$, $(p'u)^v u^{v'-v}=Rf(t)$, $v'-v=0$, поэтому $v(t)=e^t$, отсюда $(p'u)^{e^t}=Rf(t), p'u=\left(Rf(t)\right)^{e^{-t}}$, $u(t)=P\int\left(Rf(t)\right)^{e^{-t}}dt$. Существует ли для этого уравнения такой интегрирующий множитель $\mu(t)$, что после умножения можно написать это уравнение в виде $\mu(t)p'x(t)=\mu(t)Rx(t)f(t), p'F\left(x(t),\mu(t)\right)=\mu(t)Rf(t)$.

Пример . $y'+y''+..+y^{(n)}+..=x^n$. Найдем производную от обеих частей этого уравнения , откуда $y''+y'''+..+y^{(n)}+y^{(n+1)}+..=nx^{n-1}$, вычтем эти выражения значит $y' = x^n - nx^{n-1}$. Решение этого уравнения $y = \frac{x^{n+1}}{n+1} - x^n + c$. Пусть $y(0) = 0$, это дает $y = \frac{x^{n+1}}{n+1} - x^n$.

Пример . $y' + y'' + .. + y^{(n)} + .. = \sin x$, аналогично решая это уравнение найдем $y' = \sin x - \cos x$. Решение этого уравнения $y = -\cos x - \sin x + c$.
Пусть $y(0) = 0$, это приводит к $y = -\cos x - \sin x + 1$.

Пример . $y' + y'' + .. + y^{(n)} + .. = e^x$, аналогично решая это уравнение найдем $y' = 0$. Решение этого уравнения $y = c$, но эта функция не удовлетворяет начальным условиям то есть данное уравнение не имееет решения . Уравнение $y' + y'' + .. + y^{(n)} = e^x$, очевидно что это уравнение имеет частное решение $y = \frac{1}{n} e^x + c$.

Пример . $y' + y'' + .. + y^{(n)} + .. = a^x$, где $0 < a < e$, $a \neq 1$, аналогично решая это уравнение найдем $y' = a^x (1 - \ln a)$. Решение этого уравнения

$y = a^x \frac{1 - \ln a}{\ln a} + c$. Проверим это решение $a^x (1 - \ln a)\left(1 + \ln a + .. + (\ln a)^{n-1} + ..\right) = a^x (1 - \ln a) \frac{1}{1 - \ln a} = a^x$, здесь использована формула суммы геометрической прогрессии

Пример . $y' + y'' + .. + y^{(n)} + .. = \ln x$, аналогично решая это уравнение найдем $y' = \ln x - \frac{1}{x}$. Решение этого уравнения $y = x(\ln x - 1) - \ln x + c$.

Пример . $p'y \bullet p''y \bullet .. \bullet p^{(n)}y \bullet .. = x^n$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $\frac{y'}{y} + \frac{y''y - y'^2}{y^2} + .. = n \ln x$. Найдем p производную от обеих частей этого дифференциального уравнения поэтому $p''y \bullet p'''y \bullet .. \bullet p^{(n)}y \bullet p^{(n+1)}y \bullet .. = p'x^n$, разделим эти выражения , отсюда $p'y = \frac{x^n}{p'x^n}$, $e^{\frac{y'}{y}} = \frac{x^n}{e^{\frac{n}{x}}}$.

Решение этого уравнения $y = x^{n(x-1)} e^{-nx} c$. Пусть $y(1) = e$, откуда $y = x^{n(x-1)} e^{-nx+n+1}$.

Пример . $p'y \bullet p''y \bullet .. \bullet p^{(n)}y \bullet .. = e^{nx}$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $\frac{y'}{y} + \frac{y''y - y'^2}{y^2} + .. = nx$.

Аналогично решая это уравнение найдем $p'y = \frac{e^{nx}}{p'e^{nx}}$, $e^{\frac{y'}{y}} = e^{nx-n}$, Решение этого уравнения $y = e^{n\left(\frac{x^2}{2}-x\right)}c$. Пусть $y(1) = e^{-\frac{n}{2}}$, значит $y = e^{n\left(\frac{x^2}{2}-x\right)}$.

Пример . $p'y \bullet p''y \bullet .. \bullet p^{(n)}y \bullet .. = a^{e^x}$, где $a > 0$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $\frac{y'}{y} + \frac{y''y - y'^2}{y^2} + .. = e^x \ln a$.

Аналогично решая это уравнение найдем $p'y = \frac{a^{e^x}}{p'a^{e^x}}$, $e^{\frac{y'}{y}} = 1$, поскольку $p'a^{e^x} = a^{e^x}$, $\frac{y'}{y} = 0$, $y = c$, эта функция не удовлетворяет начальным условиям ,

то есть это уравнение не имеет общих решений . Уравнение $p'y \bullet p''y \bullet .. \bullet p^{(n)}y = a^{e^x}$, очевидно имеет частное решение $y = \left(a^{e^x}\right)^{\frac{1}{n}}$, потому что $p'\left(a^{e^x}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{e^x}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Системы p дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p'y_1(x) = y_1^{a_{11}}(x)\, y_2^{a_{12}}(x) \\ p'y_2(x) = y_1^{a_{21}}(x)\, y_2^{a_{22}}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(x) = y_1(x)\left(a_{11} \ln y_1(x) + a_{12} \ln y_2(x)\right) \\ y_2'(x) = y_2(x)\left(a_{21} \ln y_1(x) + a_{22} \ln y_2(x)\right) \end{cases}$$

Найдем p производную от первого уравнения этой системы $p''y_1(x) = \left(p'y_1(x)\right)^{a_{11}} \left(p'y_2(x)\right)^{a_{12}}$.

Подставим выражения для $p'y_1(x), p'y_2(x)$, отсюда $p''y_1 = y_1^{a_{11}^2} y_2^{a_{11}a_{12}} y_2^{a_{12}a_{22}} y_1^{a_{12}a_{21}}$.

Example $(y(x))^8(p'y(x))^{-10}(p''y(x))(p'''y(x)) = e^{2x}$ $\left[y''' + y'' - \frac{3y''y'}{y} + \frac{2(y')^3}{y^2} - 10y' - \frac{(y')^2}{y} + 8y\ln(y) - 2xy = 0\right]$

Initial condition $y(0) = e$ $y'(0) = e$ $y''(0) = e$

The coresponding homogeneous equation $(y(x))^8(p'y(x))^{-10}(p''y(x))(p'''y(x)) = 1$

The solution of this equation we find in the form $y(x) = e^{g(x)}$ hence obtain $8g(x) - 10g'(x) + g''(x) + g'''(x) = 0$

The general solution of this equation is $g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-4x}$ then we have $y(x) = e^{c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-4x}}$

The partical solution of this equation we find in the form $u(x) = e^{Ax+B}$ thus we have $p'u = e^A$ $p''u = 1$ $p'''u = 1$

$e^{8(Ax+B)} \cdot e^{-10A} = e^{2x}$ so we have $A = \frac{1}{4}$ $B = \frac{5}{16}$ $u(x) = e^{\left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)}$

The general solution of this equation is $y(x) = e^{c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-4x} + \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)}$

Using the initial condition we get $y(x) = e^{\frac{4e^{x}}{5} - \frac{e^{2x}}{12} - \frac{7e^{-4x}}{240} + \frac{x}{4} + \frac{5}{16}}$

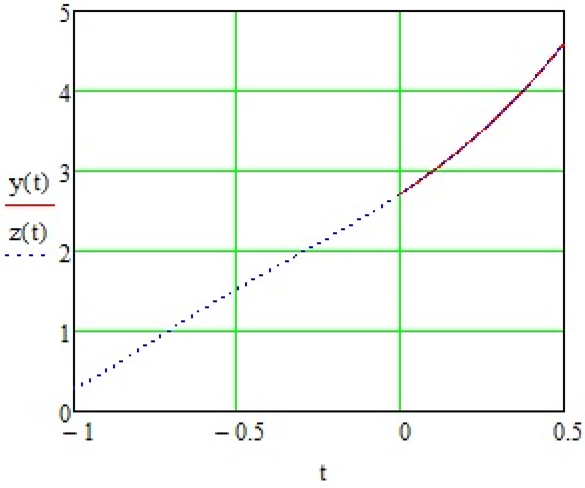
Ussualy this equation solving from the substitution $\frac{d}{dx}y(x) = z(y)$ $\quad \frac{d^2}{dx^2}y(x) = z(y)\cdot\left(\frac{d}{dy}z(y)\right)$

Therefore we get $\left[\frac{d^3}{dx^3}y(x) = (z(y))^2\cdot\frac{d^2}{dy^2}z(y)\right] + z(y)\cdot\left(\frac{d}{dy}z(y)\right)^2$

Given $\quad \frac{d^3}{dt^3}(y(t)) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 3\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)}{y(t)}\cdot\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + \frac{2\cdot\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^3}{(y(t))^2} - 10\cdot\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) - \frac{\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}{y(t)} + 8\,y(t)\cdot\ln(y(t)) - 2\cdot t\cdot y(t) = 0$

$y(0) = e \quad y'(0) = e \quad y''(0) = e \quad y := \mathrm{Odesolve}(t,2)$

$z(t) := e^{\left[\left(\frac{4}{5}e^{t} - \frac{1}{12}e^{2\cdot t} - \frac{7\cdot e^{-4t}}{240}\right) + \frac{t}{4}\right] + \frac{5}{16}}$

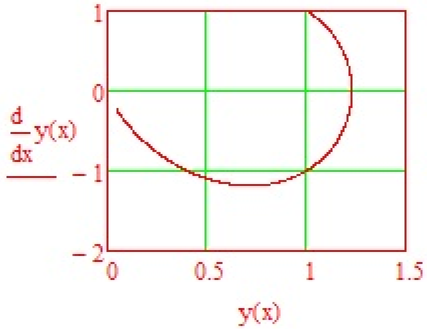


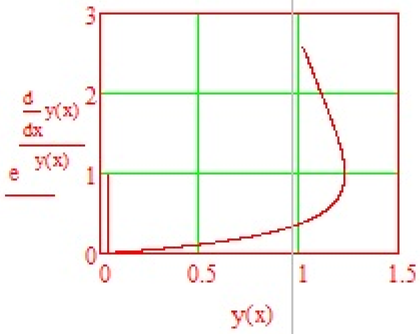
y(0) = 2.718281828459045

z(0) = 2.718281828459045

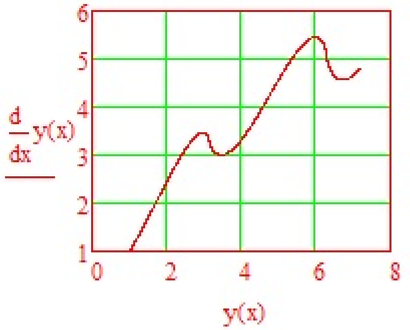
Example $p''y(x) = a\cdot|\sin(y(x))|$

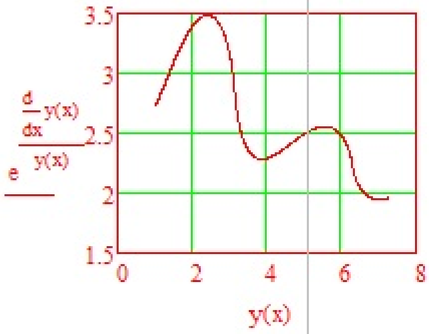
Given $a := 0.1$ $\frac{y''(x)\cdot y(x) - (y'(x))^2}{(y(x))^2} = \ln(a\,|\sin(y(x))|)$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$ $y := \mathrm{Odesolve}(x, 2)$





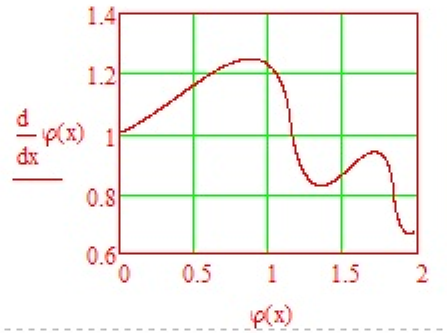
Given $a := 1.5$ $\frac{y''(x)\cdot y(x) - (y'(x))^2}{(y(x))^2} = \ln(a\,|\sin(y(x))|)$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$ $y := \mathrm{Odesolve}(x, 2)$



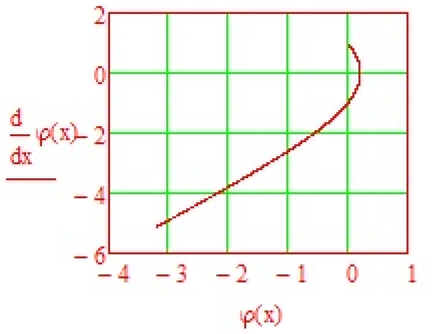


Let $y(x) = e^{\varphi(x)}$ hence obtain the equation $e^{\varphi''(x)} = a \cdot \left|\sin\left(e^{\varphi(x)}\right)\right|$

Given $a := 1.5$ $\quad \varphi''(x) = \ln\left(a \cdot \left|\sin\left(e^{\varphi(x)}\right)\right|\right)$ $\quad \varphi(0) = 0$ $\quad \varphi'(0) = 1$ $\quad \varphi := \mathrm{Odesolve}(x, 2)$



Given $a := 0.1$ $\quad \varphi''(x) = \ln\left(a \cdot \left|\sin\left(e^{\varphi(x)}\right)\right|\right)$ $\quad \varphi(0) = 0$ $\quad \varphi'(0) = 1$ $\quad \varphi := \mathrm{Odesolve}(x, 2)$



Для первого уравнения $y_2^{a_{12}} = y_1^{-a_{11}} p' y_1$, тогда $p'' y_1 = y_1^{a_{11}^2 + a_{12}a_{21}} y_1^{-a_{11}(a_{11}+a_{12})} \left(p' y_1\right)^{a_{11}+a_{12}} = y_1^{a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11}} \left(p' y_1\right)^{a_{11}+a_{22}}$.

Пусть $r_1 = -\left(a_{11} + a_{22}\right), r_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, поэтому $p'' y_1 \left(p' y_1\right)^{r_1} \; y_1^{r_2} = 1$. Найдем решение этого уравнения в виде

$y_1(x) = e^{\phi_1(x)} \Rightarrow \phi_1''(x) + r_1 \phi_1'(x) + r_2 \phi_1(x) = 0$ это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициэнтами .

Найдем решение этой системы в виде $y_1(x) = e^{\phi_1(x)}, y_2(x) = e^{\phi_2(x)} \Rightarrow p' y_1(x) = e^{\phi_1'(x)}, p' y_2(x) = e^{\phi_2'(x)}$, значит

$$\begin{cases} e^{\phi_1'(x)} = e^{a_{11}\phi_1(x)} e^{a_{12}\phi_2(x)} \\ e^{\phi_2'(x)} = e^{a_{21}\phi_1(x)} e^{a_{22}\phi_2(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1'(x) = a_{11}\phi_1(x) + a_{12}\phi_2(x) \\ \phi_2'(x) = a_{21}\phi_1(x) + a_{22}\phi_2(x) \end{cases}$$ это система дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами .

Рассмотрим систему $\begin{cases} p_t' x(t) = f_1\left(x(t), y(t)\right) \\ p_t' y(t) = f_2\left(x(t), y(t)\right) \end{cases}$. Пусть $x(t) = \phi_1(t), y(t) = \phi_2(t)$ решение этой системы .

Пусть $u(x, y)$ произвольная непрерывная функция , тогда $\omega(t) = u(x, y)_{x=\phi_1(t),\, y=\phi_2(t)} = u\left(\phi_1(t), \phi_2(t)\right)$, отсюда

$p_t' \omega(t) = e^{\frac{\omega_t'(t)}{\omega(t)}} = e^{\frac{u_x' x_t' + y_t' u_y'}{u(x,y)}} = e^{\frac{u_x'}{u} x_t' + y_t \frac{u_y'}{u}} = e^{\frac{u_x'}{u} x_t'} e^{\frac{u_y'}{u} y_t'} = \left(p_x' u\right)^{x_t'} \left(p_y' u\right)^{y_t'}$. $p_t' x = e^{\frac{x_t'}{x}} \Rightarrow \dfrac{x_t'}{x} = \ln p_t' x, x_t' = x \ln p_t' x = x \ln f_1(x, y)$,

аналогично $p_t' y = e^{\frac{y_t'}{y}} \Rightarrow \dfrac{y_t'}{y} = \ln p_t' y, y_t' = y \ln p_t' y = y \ln f_2(x, y)$, поэтому $p_t' \omega(t) = \left(p_x' u\right)^{x \ln f_1(x,y)} \left(p_y' u\right)^{y \ln f_2(x,y)}$.

Назовем это выражение pL производной векторного поля $F\left(f_1\left(x(t), y(t)\right), f_2\left(x(t), y(t)\right)\right)$.

Пусть $u(x, y)$ первый интеграл этой системы , значит $\omega(t) = u\left(\phi_1(t), \phi_2(t)\right) = c$, отсюда $p_t' \omega(t) = p_t' u\left(\phi_1(t), \phi_2(t)\right) = p_t' c = 1$,

поэтому $\left(p_x' u\right)^{x \ln f_1(x,y)} \left(p_y' u\right)^{y \ln f_2(x,y)} = 1$.

Отсюда чтобы функция $u(x, y)$ была первым интегралом системы необходимо и достаточно , чтобы функция удовлетворяла уравнению

$\left(p_x' u\right)^{x \ln f_1(x,y)} \left(p_y' u\right)^{y \ln f_2(x,y)} = 1$, то есть чтобы производная Ли векторного поля $F\left(f_1\left(x(t), y(t)\right), f_2\left(x(t), y(t)\right)\right)$ была равна 1 .

Пример $\begin{cases} p_t' x(t) = y(t) \\ p_t' y(t) = x(t) \end{cases}$. Решение этой системы найдем в виде $x(t) = \phi_1(t),\ y(t) = \phi_2(t)$. Поэтому $p_t' x(t) = e^{\phi_1'(t)},\ p_t' y(t) = e^{\phi_2'(t)}$.

Значит $\begin{cases} e^{\phi_1'(t)} = e^{\phi_2(t)} \\ e^{\phi_2'(t)} = e^{\phi_1(t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1'(t) = \phi_2(t) \\ \phi_2'(t) = \phi_1(t) \end{cases}$. Решение этой системы $\begin{cases} \phi_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ \phi_2(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{c_1 e^t + c_2 e^{-t}} \\ y(t) = e^{c_1 e^t - c_2 e^{-t}} \end{cases}$.

Рассмотрим функцию $u(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)\ln(xy)$. Отсюда $\omega(t) = u(x, y)_{x-\phi_1(t),\, y-\phi_2(t)} = \ln e^{c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_1 e^t + c_2 e^{-t}} \ln e^{c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_1 e^t - c_2 e^{-t}} = \ln e^{2c_2 e^{-t}} \ln e^{2c_1 e^t} = c$,

окончательно $u(x, y)$ первый интеграл системы .

Рассмотрим систему $\begin{cases} p_t' x(t) = \left(p_y' H(x, y)\right)^y \\ p_t' y(t) = \dfrac{1}{\left(p_x' H(x, y)\right)^x} \end{cases}$, где $H(x, y)$ произвольная непрерывная функция .

Доказательство $\left(p_x' H\right)^{x \ln\left(p_y' H\right)^y} \left(p_y' H\right)^{y \ln \frac{1}{\left(p_x' H\right)^x}} = e^{\frac{H_x'}{H} x \ln\left(p_y' H\right)^y} e^{\frac{H_y'}{H} y \ln \frac{1}{\left(p_x' H\right)^x}} = e^{\frac{H_x'}{H} xy \ln\left(p_y' H\right)} e^{\frac{H_y'}{H} y(-x) \ln\left(p_x' H\right)} = \left(e^{\ln\left(p_y' H\right)}\right)^{\frac{H_x'}{H} xy} \left(e^{\ln\left(p_x' H\right)}\right)^{\frac{H_y'}{H}(-xy)} =$

$= \left(p_y' H\right)^{\frac{H_x'}{H} xy} \left(p_x' H\right)^{-\frac{H_y'}{H} xy} = \left(e^{\frac{H_y'}{H}}\right)^{\frac{H_x'}{H} xy} \left(e^{\frac{H_x'}{H}}\right)^{-\frac{H_y'}{H} xy} = e^0 = 1$.

$\begin{cases} e^{\frac{x'(t)}{x(t)}} = e^{\frac{H_y'(x,y)}{H(x,y)} y(t)} \\ e^{\frac{y'(t)}{y(t)}} = e^{-\frac{H_x'(x,y)}{H(x,y)} x(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t)\, y(t) \dfrac{H_y'(x.y)}{H(x, y)} \\ y'(t) = x(t)\, y(t) \left(-\dfrac{H_x'(x, y)}{H(x, y)}\right) \end{cases}$. Функция $H(x, y)$ первый интеграл этой системы .

Производная Ли этой системы $\frac{dH}{dt}=H_x'(x,y)\,xy\frac{H_y'(x,y)}{H(x,y)}+H_y'(x,y)\,xy\left(-\frac{H_x'(x,y)}{H(x,y)}\right)=0$

Пример $\begin{cases} p_x'u_1(x,y)\left(p_y'u_2(x,y)\right)^a=1 \\ p_y'u_1(x,y)\left(p_x'u_2(x,y)\right)^b=1 \end{cases}$, поэтому $\begin{cases} p_x'u_1\left(p_y'u_2\right)^a=1 \\ \left(p_y'u_1\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}\left(p_x'u_2\right)^{b\sqrt{\frac{a}{b}}}=1 \end{cases}$, $\begin{cases} p_x'u_1\left(p_y'u_2\right)^a=1 \\ \left(p_y'u_1\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}\left(p_x'u_2\right)^{\sqrt{ab}}=1 \end{cases}$

умножим разделим эти уравнения $\begin{cases} p_x'\left(u_1u_2^{\sqrt{ab}}\right)p_y'\left(u_1^{\sqrt{\frac{a}{b}}}u_2^{a}\right)=1 \\ p_x'\left(\frac{u_2^{\sqrt{ab}}}{u_1}\right)p_y'\left(\frac{u_1^{\sqrt{\frac{a}{b}}}}{u_2^{a}}\right)=1 \end{cases}$, $\begin{cases} p_x'\left(u_1u_2^{\sqrt{ab}}\right)p_y'\left(u_1u_2^{\sqrt{ab}}\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}=1 \\ p_x'\left(\frac{u_2^{\sqrt{ab}}}{u_1}\right)p_y'\left(\frac{u_1}{u_2^{\sqrt{ab}}}\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}=1 \end{cases}$. Пусть $u_1u_2^{\sqrt{ab}}=v_1(x,y),\frac{u_2^{\sqrt{ab}}}{u_1}=v_2(x,y)$,

тогда $\begin{cases} p_x'v_1\left(p_y'v_1\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}=1 \\ p_x'v_2\left(p_y'\frac{1}{v_2}\right)^{\sqrt{\frac{a}{b}}}=1 \end{cases}$, значит $\begin{cases} (v_1)_x'+(v_1)_y'\sqrt{\frac{a}{b}}=0 \\ (v_2)_x'-(v_2)_y'\sqrt{\frac{a}{b}}=0 \end{cases}$.

Другое решение $\begin{cases} p_x'u_1(x,y)\left(p_y'u_2(x,y)\right)^a=1 \\ p_y'u_1(x,y)\left(p_x'u_2'(x,y)\right)^b=1 \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} p_{xy}''u_1\left(p_{y^2}''u_2\right)^a=1 \\ p_{yx}''u_1\left(p_{x^2}''u_2\right)^b=1 \end{cases}\Rightarrow\frac{\left(p_{x^2}''u_2\right)^b}{\left(p_{y^2}''u_2\right)^a}=1,\left(p_{x^2}''u_2\right)^b=\left(p_{y^2}''u_2\right)^a\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{(u_2)_{x^2}''u_2-\left((u_2)_x'\right)^2}{u_2}\right)^b=\left(\frac{(u_2)_{y^2}''u_2-\left((u_2)_y'\right)^2}{u_2}\right)^a.$$

Пример $\begin{cases} p'x(t) = x^{-4}y^{2} \\ p'y(t) = x^{2}y^{-1} \end{cases}$, тогда $p''x(t) = (p'x)^{-4}(p'y)^{2} = (p'x)^{-4}x^{4}y^{-2} = (p'x)^{-4}x^{4}\frac{1}{x^{4}p'x} = (p'x)^{-5}$, значит $p''x(t)\left(p'x(t)\right)^{5} = 1$. Пусть $x(t) = e^{\phi(t)}$,

отсюда $p'x(t) = e^{\phi'(t)}$, $p''x(t) = e^{\phi''(t)}$, окончательно $e^{\phi''(t)}e^{5\phi'(t)} = 1$, $\phi''(t) + 5\phi'(t) = 0$, $\phi(t) = c + c_1e^{-5t}$, $x(t) = e^{c+c_1e^{-5t}}$, $y(t) = e^{2c+\frac{c_1}{2}e^{-5t}}$.

Другое решение. Пусть $x(t) = e^{\gamma_1(t)}$, $y(t) = e^{\gamma_2(t)}$, поэтому $\begin{cases} e^{\gamma_1'(t)} = e^{-4\gamma_1(t)}e^{2\gamma_2(t)} \\ e^{\gamma_2'(t)} = e^{2\gamma_1(t)}e^{-\gamma_2(t)} \end{cases}$, $\begin{cases} \gamma_1'(t) = -4\gamma_1 + 2\gamma_2 \\ \gamma_2'(t) = 2\gamma_1 - \gamma_2 \end{cases}$, тогда $\gamma_1(t) = c + c_1e^{-5t}$, $\gamma_2(t) = 2c + \frac{c_1}{2}e^{-5t}$,

$x(t) = e^{c+c_1e^{-5t}}$, $y(t) = e^{2c+\frac{c_1}{2}e^{-5t}}$.

p интегральные уравнения

Пример $\phi(x) = \lambda p\int_a^b m(x)n(t)\phi^r(t)\,dt$, отсюда $\phi(x) = \lambda e^{\int_a^b \ln\left(m(x)n(t)\phi^r(t)\right)dt} \Rightarrow \ln\phi(x) = \lambda_1 + \int_a^b \ln\left(m(x)n(t)\phi^r(t)\right)dt =$

$= \lambda_1 + \int_a^b \ln m(x)\,dt + \int_a^b \ln n(t)\,dt + r\int_a^b \ln\phi(t)\,dt = \lambda_1 + (b-a)\ln m(x) + \int_a^b \ln n(t)\,dt + r\int_a^b \ln\phi(t)\,dt$. Пусть $\ln\phi(x) = u(x) \Rightarrow$

$u(x) = \lambda_1 + (b-a)\ln m(x) + N + r\int_a^b u(t)\,dt$, где $N = \int_a^b \ln n(t)\,dt, \lambda_1 = \ln\lambda$.

Пример $\phi(x) = \lambda p\int_1^2 xt\sqrt{\phi(t)}dt$, значит $\phi(x) = \lambda e^{\int_1^2 \ln\left(xt\sqrt{\phi(t)}\right)dt} = \lambda e^{\int_1^2 \ln x dt + \int_1^2 \ln t dt + \frac{1}{2}\int_1^2 \ln\phi(t)dt} = \lambda x e^{2\ln 2-1}e^{\frac{1}{2}\int_1^2 \ln\phi(t)dt} = \lambda x\frac{4}{e}e^{\frac{1}{2}\int_1^2 \ln\phi(t)dt}$.

Пусть $C = e^{\frac{1}{2}\int_1^2 \ln\phi(t)dt}$, тогда $\phi(x) = C\lambda x\frac{4}{e} \Rightarrow C\lambda x\frac{4}{e} = \lambda x\frac{4}{e}e^{\frac{1}{2}\int_1^2 \ln\left(C\lambda t\frac{4}{e}\right)dt}, C = e^{\frac{1}{2}\int_1^2\left(\ln\left(C\lambda\frac{4}{e}\right)+\ln t\right)dt} \Rightarrow C = \frac{\lambda}{e^2}8$, отсюда $\phi(x) = \frac{\lambda^2}{e^3}32x$.

Пример $y(x) = e^x p\int_1^2 xty(t)\,dt$, значит $y(x) = e^x e^{\int_1^2 \ln(xty(t))dt} = e^{x+\int_1^2 \ln(xty(t))dt}$. Пусть $y_0(x) = 1$, тогда $y_1(x) = e^{x+\int_1^2 \ln(xt)dt} = e^{x+\int_1^2 \ln x dt + \int_1^2 \ln t dt} = e^{x+\ln x+2\ln 2-1}$,

$y_2(x) = e^{x+\int_1^2 \ln\left(xte^{x+\ln x+2\ln 2-1}\right)dt} = e^{2(x+\ln x+2\ln 2-1)}$, $y_n(x) = e^{n(x+\ln x+2\ln 2-1)}$, окончательно $y(x) = \lim_{n\to\infty} e^{n(x+\ln x+2\ln 2-1)} \to \infty$.

Пример. $y(x) = \left(p\int_1^2 xty(t)\,dt\right)^{\lambda}$, отсюда $y(x) = e^{\lambda\int_1^2 \ln(xty(t))dt} = e^{\lambda\int_1^2(\ln x+\ln(ty(t)))dt} = e^{\lambda\int_1^2 \ln x dt}e^{\lambda\int_1^2 \ln(ty(t))dt} = x^{\lambda}e^{\lambda\int_1^2 \ln(ty(t))dt}$. Пусть $C = e^{\lambda\int_1^2 \ln(ty(t))dt}$, тогда

$y(x)=Cx^{\lambda}\Rightarrow C=e^{\lambda\int_1^2\ln\left(tCt^{\lambda}\right)dt}=e^{\lambda\int_1^2\ln\left(Ct^{\lambda+1}\right)dt}=e^{\lambda\left(\int_1^2\ln C+\int_1^2(\lambda+1)\ln t\,dt\right)}=e^{\lambda\left(\ln C+(\lambda+1)(\ln 4-1)\right)}$, это уравнение имеет решение $\lambda=0,\lambda=-1,C=1$, поэтому $y(x)=\dfrac{1}{x}$.

Пример . $y(x)=\left(p\int_1^2\dfrac{ty(t)}{x}dt\right)^{\lambda}$, поэтому $y(x)=e^{\lambda\int_1^2\ln\left(\frac{ty(t)}{x}\right)dt}=e^{\lambda\int_1^2\left(\ln(ty(t))-\ln x\right)dt}=e^{\lambda\int_1^2\ln(ty(t))dt}e^{-\lambda\int_1^2\ln x\,dt}=e^{\lambda\int_1^2\ln(ty(t))dt}e^{-\lambda\ln x}=e^{\lambda\int_1^2\ln(ty(t))dt}\dfrac{1}{x^{\lambda}}$. Пусть $C=e^{\lambda\int_1^2\ln(ty(t))dt}$, тогда

$y(x)=\dfrac{C}{x^{\lambda}}\Rightarrow C=e^{\lambda\int_1^2\ln\left(t\frac{C}{t^{\lambda}}\right)dt}=e^{\lambda\int_1^2\ln\left(\frac{C}{t^{\lambda-1}}\right)dt}=e^{\lambda\left(\int_1^2\ln(C)dt-\int_1^2(\lambda-1)\ln(t)dt\right)}=e^{\lambda\left(\ln C-(\lambda-1)(\ln 4-1)\right)}$, это уравнение имеет решение $C=1,\lambda=1$, значит $y(x)=\dfrac{1}{x}$.

Пример . $y(x)=P\int_1^x\dfrac{ty(t)}{x}dt$, отсюда $y(x)=e^{\int_1^x\ln\left(\frac{ty(t)}{x}\right)dt}$, тогда $\ln y(x)=\int_1^x\ln\left(\dfrac{ty(t)}{x}\right)dt$, найдем производную по x , получим $\left(\ln y(x)\right)_x'=\left(\int_1^x\ln\left(\dfrac{ty(t)}{x}\right)dt\right)_x'$,

$\dfrac{y'(x)}{y(x)}=\left(\int_1^x\ln(ty(t))\,dt\right)_x'-\left(\int_1^x\ln x\,dt\right)_x'=\ln(xy(x))-\left(\ln x\int_1^x dt\right)_x'=\ln(xy(x))-\left((x-1)\ln x\right)_x'=\ln x+\ln y(x)-\left(\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}\right)=\ln x+\ln y(x)-\ln x-1+\dfrac{1}{x}=\ln y(x)+\dfrac{1}{x}-1$,

значит $y'(x)=y(x)\left(\ln(y(x))+\dfrac{1}{x}-1\right)$. Решение этого уравнения $y(x)=ce^{1+e^{x}-Ei(1,x)e^{x}}$, где $Ei(n,x)$ представляет экспотенциальный интеграл $\int_1^{\infty}\dfrac{e^{-xt}}{t^n}dt$.

Пример . $y(x)=P\int_1^x xty(t)\,dt$, отсюда $y(x)=e^{\int_1^x\ln(xty(t))dt}$ тогда $\ln y(x)=\int_1^x\ln(xty(t))\,dt$, найдем производную по x , получим $\left(\ln y(x)\right)_x'=\left(\int_1^x\ln(xty(t))\,dt\right)_x'$,

$\dfrac{y'(x)}{y(x)}=\left(\int_1^x\ln x\,dt\right)_x'+\left(\left(\int_1^x\ln(ty(t))\,dt\right)_x'\right)=\left(\ln x\int_1^x dt\right)_x'+\ln(xy(x))=\left((x-1)\ln x\right)_x'+\ln x+\ln y(x)=\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}+\ln y(x)+\ln x=2\ln x+\ln y(x)-\dfrac{1}{x}+1$, значит

$y'(x)=y(x)\left(2\ln x+\ln y(x)-\dfrac{1}{x}+1\right)$. Решение этого уравнения $y(x)=ce^{e^{x}-Ei(1,x)e^{x}-1}x^{-2}$, где $Ei(n,x)$ представляет экспотенциальный интеграл $\int_1^{\infty}\dfrac{e^{-xt}}{t^n}dt$.

Пример . $y(x)\left(p'y(x)\right)^{a_1(x)}\left(p''y(x)\right)^{a_2(x)}=f(x)\quad y(0)=c_0,p'y(0)=c_1$. Пусть $y(x)=e^{\varphi(x)}$, значит $p'y(x)=e^{\varphi'(x)},p''y(x)=e^{\varphi''(x)}$, тогда $\varphi(x)+a_1(x)\varphi'(x)+a_2(x)\varphi''(x)=\ln f(x)$,

$c_0=e^{\varphi(0)},\varphi(0)=\ln c_0$, $p'y(0)=e^{\frac{y'(0)}{y(0)}},c_1=e^{\frac{y'(0)}{y(0)}},\ \ln c_1=\dfrac{y'(0)}{c_0},y'(0)=c_0\ln c_1$, $p'y(0)=e^{\varphi'(0)},\ \varphi'(0)=\ln p'y(0),\ \varphi'(0)=\ln c_1$.

Линейное дифференциальное уравнение $\varphi(x)+a_1(x)\varphi'(x)+a_2(x)\varphi''(x)=\ln f(x)$ эквивалентно уравнению

$u(x)=\int_0^x k(x,t)\varphi(t)\,dt+F(x)$, где $u(x)=\varphi''(x), k(x,t)=-\left(a_1(x)+a_2(x)(x-t)\right), F(x)=\ln f(x)-c_1a_1(x)-c_0a_2(x)$.

Пример . $y(x)\left(p'y(x)\right)^{a_1}\left(p''y(x)\right)^{a_2}=f(x)$, поэтому $p''y(x)=\left(\dfrac{f(x)}{y(x)\left(p'y(x)\right)^{a_1}}\right)^{\frac{1}{a_2}}$, если $y_1(x)=y(x), y_2(x)=p'y(x)$,

то $p'y_1(x)=p'y(x)=y_2(x), p'y_2(x)=p''y(x)=\left(\dfrac{f(x)}{y(x)\left(p'y(x)\right)^{a_1}}\right)^{\frac{1}{a_2}}=\left(\dfrac{f(x)}{y_1(x)\,y_2(x)^{a_1}}\right)^{\frac{1}{a_2}}$, получаем систему диффуренциальных уравнений

$\begin{cases} p'y_1(x)=y_2(x) \\ p'y_2(x)=\left(\dfrac{f(x)}{y_1(x)\,y_2(x)^{a_1}}\right)^{\frac{1}{a_2}} \end{cases}$ эта система эквивалентна системе интегральных уравнений $\begin{cases} y_1(x)=c_1p\int_0^x y_2(t)\,dt \\ y_2(x)=c_2p\int_0^x \left(\dfrac{f(t)}{y_1(t)\,y_2(t)^{a_1}}\right)^{\frac{1}{a_2}}dt \end{cases}$.

Пример . $y(x)=\cos xp\int_a^x e^{(x-t)}y(t)\,dt$, отсюда $p'y(x)=p'\cos xp'\left(p\int_a^x e^{(x-t)}y(t)\,dt\right)=e^{-\tan x}p'\left(e^{\int_a^x \ln\left(e^{(x-t)}y(t)\right)dt}\right)=e^{-\tan x}e^{\frac{\left(e^{\int_a^x \ln\left(e^{(x-t)}y(t)\right)dt}\right)'_x}{e^{\int_a^x \ln\left(e^{(x-t)}y(t)\right)dt}}}=e^{-\tan x}e^{\frac{e^{\int_a^x \ln\left(e^{(x-t)}y(t)\right)dt}\left(\int_a^x \ln\left(e^{(x-t)}y(t)\right)dt\right)'_x}{e^{\int_a^x \ln\left(e^{(x-t)}y(t)\right)dt}}}=e^{-\tan x}e^{\left(\int_a^x \ln\left(e^{(x-t)}y(t)\right)dt\right)'_x}=$

$=e^{-\tan x}e^{\left(\int_a^x \left((x-t)+\ln y(t)\right)dt\right)'_x}=e^{-\tan x}e^{(x-x)+\ln y(x)+\int_a^x dt}=e^{\ln y(x)+x-\tan x-a}$, тогда $e^{\frac{y'(x)}{y(x)}}=e^{\ln y(x)+x-\tan x-a}$, окончательно $y'(x)=y(x)\left(\ln y(x)+x-\tan x-a\right)$

Пример . $y(x)=ap\int_0^x \dfrac{e^{t^2}}{e^x}y(t)\,dt$. Let $u(x)=p\int_0^x e^{t^2}y(t)\,dt$, поэтому $p'u(x)=p'\left(p\int_0^x e^{t^2}y(t)\,dt\right)=e^{x^2}y(x), y(x)=\dfrac{ap\int_0^x e^{t^2}y(t)\,dt}{\left(e^x\right)^x}=\dfrac{au(x)}{e^{x^2}}$,

тогда $p'u(x)=e^{x^2}\dfrac{au(x)}{e^{x^2}}=au(x)$, отсюда $e^{\frac{u'(x)}{u(x)}}=au(x)\Rightarrow\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\ln u(x)+\ln a, u'(x)=u(x)\left(\ln u(x)+\ln a\right)$.

Пример . $y(x)=\lambda e^{\gamma x}P\int\limits_a^x t^2 y(t)e^{\gamma t}\,dt$, $\lambda>0$, $\gamma>0$. найдем p производную по x , получим

$p'y(x)=p'\left(\lambda e^{\gamma x}P\int\limits_a^x t^2 y(t)e^{\gamma t}\,dt\right)=p'\left(e^{\gamma x}\right)p'\left(P\int\limits_a^x t^2 y(t)e^{\gamma t}\,dt\right)=e^{\gamma}x^2y(x)e^{\gamma x}=e^{\gamma(x+1)}x^2y(x)$, откуда $e^{\frac{y'(x)}{y(x)}}=e^{\gamma(x+1)}x^2y(x)$, значит

$y'(x)=y(x)\left(\gamma(x+1)+2\ln x+\ln y(x)\right)$. Решение этого уравнения $y(x)=ce^{e^x(1-2Ei(1,x))-\gamma x-2\gamma}x^{-2}$, где $Ei(n,x)$ представляет экспотенциальный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\,dt$.

Пример . $y(x)=1+\rho\int\limits_0^1 y^2(t)\,dt$. Правая часть уравнения не зависит от переменной x , значит функция $y(x)$ постоянная . Пусть $y(x)=a$, это дает $a=1+\rho\int\limits_0^1 a^2dt=1+\rho a^2$, $\rho a^2-a+1=0$, $a=\frac{1\pm\sqrt{1-4\rho}}{2}$, если $\rho<\frac{1}{4}$ то уравнение имеет два действительных решения , если $\rho>\frac{1}{4}$ то уравнение не имеет действительных решений , если $\rho=\frac{1}{4}$ то уравнение имеет точку бифуркации .

Пример . $y(x)=1+\rho P\int\limits_0^1 y^2(t)\,dt$, это уравнение эквивалентно уравнению $y(x)=1+\rho e^{\int_0^1 \ln y^2(t)dt}$. Правая часть уравнения не зависит от переменной x , значит функция $y(x)$ постоянная . Пусть $y(x)=a$, это дает $a=1+\rho P\int\limits_0^1 a^2dt=1+\rho e^{\int_0^1 \ln a^2dt}=1+\rho a^2$, $\rho a^2-a+1=0$, $\rho a^2-a+1=0$, $a=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$, если $\rho<\frac{1}{4}$ то уравнение имеет два действительных решения , если $\rho>\frac{1}{4}$ то уравнение не имеет действительных решений , если $\rho=\frac{1}{4}$ то уравнение имеет точку бифуркации .

Пример . $y(x)=1+\rho P\int\limits_0^1 R(y(t))\,dt$, это уравнение эквивалентно уравнению $y(x)=1+\rho e^{\int_0^1 \ln R(y(t))dt}$. Правая часть уравнения не зависит от переменной x , это приводит что функция $y(x)$ постоянная . Пусть $y(x)=a$, поэтому $a=1+\rho P\int\limits_0^1 R(a)\,dt=1+\rho e^{\int_0^1 \ln R(a)dt}=1+\rho R(a)$, отсюда $a=1+\rho R(a)$.

Пример . Интегро дифференциальное уравнение $\left(p'y(x)\right)^n=\left(y(x)\right)^r P\int\limits_1^e ty(t)\,dt$, $y(1)=y_0$, $ny'(x)=y(x)\left(\ln\left(y(x)\right)^r+\int\limits_1^e \ln\left(ty(t)\right)dt\right)$

Найдем от этого выражения p производную $p'\left(\left(p'y(x)\right)^n\right) = p'\left(\left(y(x)\right)^r P\int_1^e ty(t)\,dt\right)$, $\left(p''y(x)\right)^n = \left(p'y(x)\right)^r$. Пусть $y(x) = e^{g(x)}$, значит $p'y(x) = e^{g'(x)}$, $p''y(x) = e^{g''(x)}$,

тогда $e^{ng''(x)} = e^{rg'(x)}$, $ng''(x) - rg'(x) = 0$ решение этого уравнения $g(x) = c_1 e^{\frac{r}{n}x} + c_2$, $y(x) = e^{c_1 e^{\frac{r}{n}x} + c_2}$, используя начальные условия получим

$y_0 = e^{c_1 e^{\frac{r}{n}} + c_2}$, $\left(p'y(1)\right)^n = y(1)^r P\int_1^e ty(t)\,dt = y_0^r P\int_1^e t e^{c_1 \frac{r}{n} t + c_2} dt = y_0^r e^{\int_1^e \ln\left(te^{c_1 \frac{r}{n} s + c_2}\right) ds} = y_0^r e^{c_1 \frac{r}{2n}\left(e^2 - 1\right) + c_2(e-1)}$, $p'y(x) = p'\left(e^{c_1 e^{\frac{r}{n}x} + c_2}\right) = e^{c_1 \frac{r}{n} e^{\frac{r}{n}x}}$, $\left(p'y(1)\right)^n = e^{c_1 r e^{\frac{r}{n}}}$, тогда имеем систему уравнений

$\begin{cases} e^{c_1 r e^{\frac{r}{n}}} = y_0^r e^{c_1 \frac{r}{2n}\left(e^2-1\right) + c_2(e-1)} \\ e^{c_1 e^{\frac{r}{n}} + c_2} = y_0 \end{cases}$, $\begin{cases} c_1\left(re^{\frac{r}{n}} - \frac{r}{2n}\left(e^2 - 1\right)\right) - c_2(e-1) = r\ln y_0 \\ c_1 e^{\frac{r}{n}} + c_2 = \ln y_0 \end{cases}$ решение этой системы $c_1 = \dfrac{(r+e-1)\ln y_0}{(r+e-1)e^{\frac{r}{n}} - \frac{r}{2n}\left(e^2-1\right)}$, $c_2 = \dfrac{\left((r+e-1)\left(e^{\frac{r}{n}} - 1\right) - \frac{r}{2n}\left(e^2-1\right)\right)\ln y_0}{(r+e-1)e^{\frac{r}{n}} - \frac{r}{2n}\left(e^2-1\right)}$.

Пример . Интегро дифференциальное уравнение $p'y(x) = x^n \cdot P\int_1^e ty(t)dt$, $y(1) = 1$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $y' = y\left(n\ln x + \int_1^e (\ln t + \ln y)dt\right)$.

Пусть $\gamma = P\int_1^e ty(t)dt$, это дает $p'y(x) = \gamma x^n$, $e^{\frac{y'}{y}} = \gamma x^n$, $\frac{y'}{y} = n\ln x + \ln\gamma$, решение этого уравнения $y = \gamma^x x^{xn} e^{-nx} c$, используя начальные условия получим $c = \frac{e^n}{\gamma}$, тогда

$y = \gamma^{x-1} x^{xn} e^{n(1-x)}$. Делаем подстановку $\gamma = P\int_1^e \gamma^{t-1} t^{tn+1} e^{n(1-t)} dt = e^{\int_1^e \ln\left(\gamma^{t-1} t^{tn+1} e^{n(1-t)}\right) dt} = e^{\left.\left(\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\ln\gamma + \left(\frac{nt^2}{2} + t\right)\ln t - \frac{nt^2}{4} - t\right)\right|_1^e} = \gamma^{\frac{e^2 - 2e - 1}{2}} e^{\frac{n\left(4e - e^2 - 1\right) + 4}{4}}$, тогда $\gamma = e^{\frac{n\left(4e - e^2 - 1\right)}{2\left(2e + 3 - e^2\right)}}$, поэтому решение этого уравнения

$y = e^{\frac{2\left(2e - e^2 - 2\right)}{2e + 3 - e^2} n(x-1)} x^{xn}$. Другое решение . $p'y(x) = \gamma x^n$. P интегрируем две части уравнения $P\int p'y(x)\,dx = P\int \gamma x^n\,dx$, отсюда $y = \gamma^x x^{xn} e^{-nx} c$, дальше уравнение решается аналогично

Пример . Интегро дифференциальное уравнение $p''y(x) = x^n \cdot P\int_1^e ty(t)dt$, $y(e) = 1$, $y'(e) = 1$, это уравнение эквивалентно следующему уравнению $\frac{y''y - (y')^2}{y^2} =$

$= n\ln x + \int_1^e (\ln t + \ln y)\,dt$. Пусть $\gamma = P\int_1^e ty(t)dt$, откуда $p''y = x^n\gamma$. L интегрируем две части уравнения $P\int p''y dx = P\int x^n \gamma dx$, тогда $p'y = c\left(x^x e^{-x}\right)^{\gamma n}$. L интегрируем две части

уравнения $P\int p'y dx = P\int c\left(x^x e^{-x}\right)^{\gamma n} dx$, тогда $y(x) = c_1 e^{cx + \left(\frac{n\gamma}{2}x^2(\ln x - 1.5)\right)}$. Значит $y' = c_1 e^{cx + \left(\frac{n\gamma}{2}x^2(\ln x - 1.5)\right)}\left(n\gamma x(\ln x - 1) + c\right)$, используя начальные условия получим $c = 1$, $c_1 = e^{\frac{n\gamma}{4}e^2 - e}$,

$y = e^{x + \left(\frac{n\gamma}{2}x^2(\ln x - 1.5)\right) + \frac{n\gamma}{4}e^2 - e}$. Делаем подстановку $\gamma = P\int_1^e t e^{t + \left(\frac{n\gamma}{2}t^2(\ln t - 1.5)\right) + \frac{n\gamma}{4}e^2 - e} dt = e^{\int_1^e \ln\left(te^{t + \left(\frac{n\gamma}{2}t^2(\ln t - 1.5)\right) + \frac{n\gamma}{4}e^2 - e}\right) dt}$. Получаем что решение этого уравнения $y = e^{x + \left(\frac{n\gamma}{2}x^2(\ln x - 1.5)\right) + \frac{n\gamma}{4}e^2 - e}$,

где $\gamma = e^{\ln 1012.4 - \mathrm{LambertW}(6892.7n)}$, для $n = 1$ найдем $\gamma \approx 1.027$.

Другое решение . $\frac{y''y - (y')^2}{y^2} = n\ln x + \int_1^e (\ln t + \ln y)\,dt$, let $y(x) = e^{g(x)}$. Выводим уравнение $g''(x) = n\ln x + \gamma$, где $\gamma = \int_1^e (\ln t + g(t))\,dt$, дальше уравнение решается аналогично .

Пример . Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} p'x(t) = x(t)\,y(t) \\ p'y(t) = \dfrac{x(t)}{y(t)} \end{cases}$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, для второго уравнения $p'y(t) = \dfrac{x(t)}{y(t)}$ берем что $x(t)$ известная функция .

Пусть $x(t) = e^{\phi_1(t)}$, $y(t) = e^{\phi_2(t)}$, $p'y(t) = e^{\phi_2'(t)}$, $p'x(t) = e^{\phi_1'(t)}$, $\phi_2(t) = \ln y(t)$, $\phi_2(0) = \ln y_0$, $\phi_1(t) = \ln x(t)$, $\phi_1(0) = \ln x_0$, отсюда $e^{\phi_2'(t)} = \dfrac{x(t)}{e^{\phi_2(t)}}$, $e^{\phi_2'(t)+\phi_2(t)} = x(t)$,

$\phi_2'(t) + \phi_2(t) = \ln x(t)$, $\phi_2'(t) = -\phi_2(t) + \ln x(t)$, решение этого линейного дифференциального уравнения $\phi_2(t) = e^{\int_0^t -d\eta} \ln y_0 + \int_0^t e^{\int_\xi^t -d\eta} \ln x(\xi)\, d\xi = e^{-t} \ln y_0 + \int_0^t e^{-t+\xi} \ln x(\xi) d\xi$,

поэтому $y(t) = e^{e^{-t}\ln y_0 + \int_0^t e^{-t+\xi} \ln x(\xi) d\xi} = y_0^{e^{-t}} e^{e^{-t}\int_0^t e^{\xi} \ln x(\xi) d\xi}$. Подставим это выражение в первое уравнение системы $p'x(t) = x(t)\, y_0^{e^{-t}} e^{e^{-t}\int_0^t e^{\xi}\ln x(\xi) d\xi}$, $e^{\frac{x'(t)}{x(t)}} = x(t)\, y_0^{e^{-t}} e^{e^{-t}\int_0^t e^{\xi}\ln x(\xi) d\xi}$,

тогда $x'(t) = x(t)\left(\ln x(t) - t\ln y_0 + e^{-t}\int_0^t e^{\xi} \ln x(\xi)\, d\xi\right)$, это интегро дифференциальное уравнение .

Пример . $\begin{cases} u(x) = \sin x \cdot P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \left(xu(t)\cdot v(t)\,x\right) dt \\ v(x) = \cos x \cdot P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{u(t)}{v(t)}\right) dt \end{cases}$, эта система эквивалентна следующей системе $\begin{cases} u(x) = \sin x \cdot e^{\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(xu(t)\cdot v(t)x\right) dt} \\ 2v(x) = \cos x \cdot e^{\int_1^{\frac{\pi}{42}} \ln\left(\frac{u(t)}{v(t)}\right) dt} \end{cases}$. Откуда $\begin{cases} u(x) = \sin x \cdot \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} xu(t)\, dt\right)\cdot\left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} xv(t)\, dt\right) \\ v(x) = \cos x \cdot \dfrac{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, dt}{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt} \end{cases}$,

$\begin{cases} u(x) = x^{\pi-2} \sin x \cdot \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, dt\right)\cdot\left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt\right) \\ v(x) = \cos x \cdot \dfrac{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, dt}{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt} \end{cases}$. Пусть $\delta = \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, dt\right)\cdot\left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt\right)$, $\gamma = \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, dt\right)\cdot\left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt\right)$, значит $\begin{cases} u(x) = \delta x^{\pi-2} \sin x \\ v(x) = \gamma \cos x \end{cases}$, это дает

$$\begin{cases} \delta x^{\pi-2}\sin x = x^{\pi-2}\sin x \cdot \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \delta t^{\pi-2}\sin t dt \right) \cdot \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cos t dt \right) \\ \gamma \cos x = \cos x \cdot \dfrac{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \delta t^{\pi-2}\sin t dt}{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cos t dt} \end{cases}$$, получим $$\begin{cases} \delta = \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \delta t^{\pi-2}\sin t dt \right) \cdot \left(P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cos t dt \right) \\ \gamma = \dfrac{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \delta t^{\pi-2}\sin t dt}{P\int_1^{\frac{\pi}{2}} \gamma \cos t dt} \end{cases}$$, тогда $$\begin{cases} \delta = 0.46(\delta \cdot \gamma)^{\frac{\pi}{2}-1} \\ \gamma = 2.79\left(\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{\pi}{2}-1} \end{cases}$$, эту алгебраическую систему можно решить численным методом $\begin{cases} \delta \approx 0.000296 \\ \gamma \approx 0.052162 \end{cases}$, thus $\begin{cases} u(x) = 0.000296 x^{\pi-2}\sin x \\ v(x) = 0.052162\cos x \end{cases}$.

p дифференциальные уравнения с частными производными

Пример . $\left(p_x' u(x,y)\right)^{u(x,y)} p_y' u(x,y) = 1$, $\left(e^{\frac{u_x'(x,y)}{u(x,y)}} \right)^{u(x,y)} e^{\frac{u_y(x,y)}{u(x,y)}} = 1$, $\frac{u_x'}{u} u + \frac{u_y'}{u} = 0$, $uu_x' + u_y' = 0$ это уравнение Хопфа .

Пример . $\left(p_x' u(x,y)\right)^{x\ln y} \left(p_y' u(x,y)\right)^{y\ln x} = 1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{u_x'}{u}} \right)^{x\ln y} \left(e^{\frac{u_y'}{u}} \right)^{y\ln x} = 1$, отсюда $u_x' x\ln y + u_y' y\ln x = 0$.

Функция $u(x,y) = \ln^2 x - \ln^2 y$ решение данного уравнения , это можно проверить подстановкой .

Пример . $p_x' u(x,y) + p_y' u(x,y) = 1$ это уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению $e^{\frac{u_x'}{u}} + e^{\frac{u_y'}{u}} = 1$. Напишем функцию $F(x,y,p,q,u) = e^{\frac{p}{u}} + e^{\frac{q}{u}} - 1$, рассмотрим уравнение $F_p'\Phi_x' + F_q'\Phi_y' + \left(pF_p' + qF_q'\right)\Phi_u' - \left(F_x' + pF_u'\right)\Phi_p' - \left(F_y' + qF_u'\right)\Phi_q' = 0$,

где $\Phi\left(x, y, u, p, q\right)$ произвольная функция $\frac{1}{u}e^{\frac{p}{u}}\Phi_x' + \frac{1}{u}e^{\frac{q}{u}}\Phi_y' + \left(\frac{p}{u}e^{\frac{p}{u}} + \frac{q}{u}e^{\frac{q}{u}}\right)\Phi_u' - \frac{p}{u^2}\left(pe^{\frac{p}{u}} + qe^{\frac{q}{u}}\right)\Phi_p' - \frac{q}{u^2}\left(pe^{\frac{p}{u}} + qe^{\frac{q}{u}}\right)\Phi_q' = 0$

$\frac{udx}{e^{\frac{p}{u}}} = \frac{udy}{e^{\frac{q}{u}}} = \frac{udu}{pe^{\frac{p}{u}} + qe^{\frac{q}{u}}} = \frac{-u^2dp}{p\left(pe^{\frac{p}{u}} + qe^{\frac{q}{u}}\right)} = \frac{-u^2dq}{q\left(pe^{\frac{p}{u}} + qe^{\frac{q}{u}}\right)}$, нужно найти функции $p = u_x'\left(x, y\right), q = u_y'\left(x, y\right)$.Отсюда получим $e^{\frac{p}{u}} + e^{\frac{q}{u}} = 1$, $\frac{-u^2dp}{p\left(pe^{\frac{p}{u}} + qe^{\frac{q}{u}}\right)} = \frac{-u^2dq}{q\left(pe^{\frac{p}{u}} + qe^{\frac{q}{u}}\right)} \Rightarrow$

$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$ $p = q + c$. Поэтому получим систему дифференциальных уравнений , где c произвольная постоянная $\begin{cases} p - q = c \\ e^{\frac{p}{u}} + e^{\frac{q}{u}} = 1 \end{cases}$

Решение этой системы $p=-u\ln\left(e^{-\frac{c}{u}}+1\right), q=-u\ln\left(e^{-\frac{c}{u}}+1\right)-c$.Напишем дифференциальное уравнение $p(x,y,u,c)\,dx+q(x,y,u,c)\,dy-r(x,y,u,c)\,du=0$.

Это уравнение интегрируется если $p(r_y-q_u)+q(p_u-r_x)+r(q_x-p_y)=0$. Подставим эти выражения найдем $c\ln\left(e^{-\frac{c}{u}}+1\right)+c^2\frac{e^{-\frac{c}{u}}}{u\left(e^{-\frac{c}{u}}+1\right)}=0\Rightarrow c=0$,

значит $p=q, e^{\frac{p}{u}}+e^{\frac{p}{u}}=1, e^{\frac{p}{u}}=\frac{1}{2}, \frac{p}{u}=-\ln 2, p=q=-u\ln 2\Rightarrow u_x'=-u\ln 2, \frac{du}{dx}=-u\ln 2, \frac{du}{u}=-\ln 2dx\Rightarrow \ln u=-x\ln 2+z(y)$, где $z(y)$ произвольная функция от y ,

$u(x,y)=e^{-x\ln 2+z(y)}\Rightarrow u_y'=e^{-x\ln 2+z(y)}z'(y)$, тогда $u_y'=-u\ln 2\Rightarrow e^{-x\ln 2+z(y)}z'(y)=-e^{-x\ln 2+z(y)}\ln 2, z'(y)=-\ln 2\Rightarrow \frac{dz}{dy}=-\ln 2, dz=-\ln 2dy\Rightarrow z(y)=-y\ln 2+c$,

отсюда $u(x,y)=e^{-x\ln 2-y\ln 2+c}=e^{-(x+y)\ln 2+c}=2^{-(x+y)}c$.

Пример . $\prod_{j=1}^{n}p_{x_j}'u(\vec{x})^{a_j(\vec{x})}=1\Rightarrow\prod_{j=1}^{n}\left(e^{\frac{u_j'(\vec{x})}{u(\vec{x})}}\right)^{a_j(\vec{x})}=1$, поэтому $\sum_{j=1}^{n}a_j(\vec{x})u_{x_j}'(\vec{x})=0$, где $\vec{x}=(x_1,....,x_n)$.Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Пример . $\prod_{j=1}^{n}p_{x_j}'u(\vec{x})^{a_j(\vec{x},u)}=b(\vec{x},u)\Rightarrow\prod_{j=1}^{n}\left(e^{\frac{u_j'(\vec{x})}{u(\vec{x})}}\right)^{a_j(\vec{x},u)}=b(\vec{x},u)$ отсюда $\sum_{j=1}^{n}a_j(\vec{x})u_{x_j}'(\vec{x})=\ln b(\vec{x},u),$ где $\vec{x}=(x_1,..,x_n)$.

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

Пример . $p_y'u(x,y)=1$, значит $e^{\frac{u_y'(x,y)}{u(x,y)}}=1, \frac{u_y'}{u}=0,$ тогда $u_y'=0$ поэтому $u(x,y)=f(x)$ где $f(x)$ произвольная функция от x .

Пример . $p_x'u(x,y)=p_y'u(x,y)$ отсюда $e^{\frac{u_x'(x,y)}{u(x,y)}}=e^{\frac{u_y'(x,y)}{u(x,y)}}$, $\frac{u_x'}{u}=\frac{u_y'}{u}$ тогда $u_x'=u_y'$. Пусть $\zeta=x+y,\eta=x-y\Rightarrow u_x'=u_\zeta'\zeta_x'+u_\eta'\eta_x'=u_\zeta'+u_\eta', u_y'=u_\zeta'\zeta_y'-u_\eta'\eta_y'=u_\zeta'-u_\eta'$,

значит $u_\zeta'+u_\eta'=u_\zeta'-u_\eta' \Rightarrow 2u_\eta'=0, u_\eta'=0, u=f(\zeta)$, тогда $u(x,y)=f(x+y)$, где $f(x+y)$ произвольная функция от $(x+y)$.

Пример $\begin{cases} p_x'u=xy \\ p_y'u=\frac{x}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} e^{\frac{u_x'}{u}}=xy \\ e^{\frac{u_y'}{u}}=\frac{x}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} u_x'=u\ln xy \\ u_y'=u\ln\frac{x}{y}\end{cases}$ $\begin{cases} u_x'=A(x,y,u) \\ u_y'=B(x,y,u)\end{cases}$. Эта система интегрируется если $A_y'+BA_u'-B_x'-AB_u'=0$ $A_y'=\frac{u}{y}, A_u'=\ln x+\ln y, B_x'=\frac{u}{x}$,

$B_u'=\ln x-\ln y$, поэтому $\frac{u}{y}+u(\ln x-\ln y)(\ln x+\ln y)-\frac{u}{x}-u(\ln x+\ln y)(\ln x-\ln y)=0\Rightarrow\frac{u}{y}-\frac{u}{x}=0, u\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow u(x,y)=0$.

Пример . $p_x^{(m)}u(x,y)+p_y^{(n)}u(x,y)=f(x)+g(y)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$, значит $p_x^{(m)}u=p^{(m)}X(x), p_yu=p^{(n)}Y(y)\Rightarrow$

$p^{(m)}X(x)+p^{(n)}Y(y)=f(x)+g(y)$, тогда $p^{(m)}X(x)-f(x)=p^{(n)}Y(y)-g(y)=\lambda\Rightarrow p^{(m)}X(x)-f(x)=\lambda, p^{(n)}Y(y)-g(y)=\lambda$,

решая эти два дифференциальных уравнения получим функции $X(x)$, $Y(y)$.

Пример . $p_t'u(x,y)=e^a p_x'\left(u^n(x,y)p_x'u(x,y)\right)$, отсюда $p_t'u=e^a\left(p_x'u\right)^n p_{x^2}''u$ $e^{\frac{u_t'}{u}}=e^a\left(e^{\frac{u_x'}{u}}\right)^n e^{\frac{u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2}{u^2}}$. Это уравнение эквивалентно следующему $\frac{u_t'}{u}=a+\frac{mu_x'}{u}+\frac{u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2}{u^2}$.

Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)T(t)\Rightarrow p_t'u=p'T(t), p_x'u=p'X(x), p_{x^2}''u=p''X(x)$, тогда $p'T(y)=e^a\left(p'X(x)\right)^n p''X(x)$,

$p'T(t)=e^a\left(p'X(x)\right)^n p''X(x)=\lambda$, $p'T(t)=\lambda$, $e^a\left(p'X(x)\right)^n p''X(x)=\lambda$, решая эти два дифференциальных уравнения получим функции $X(x)$, $T(t)$.

Другое решение . Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)T(t)$, поэтому $u_x'=X'(x)T(t), u_{x^2}''=X''(x)T(t), u_y'=X(x)T'(t)$,тогда

$\frac{XT'}{XT}=a+\frac{nX'T}{XT}+\frac{X''TTX-(X')^2}{X^2T^2}=\lambda\Rightarrow\frac{T'}{T}=\lambda$, $\frac{\frac{dT}{dt}}{T}=\lambda$, $\frac{dT}{T}=\lambda dt$, $T(t)=ce^{\lambda t}$, $a+\frac{nX'}{X}+\frac{X''X-(X')^2}{X^2}=\lambda$, решая это дифференциальное уравнения найдем функцию $T(t)$.

Другое решение . Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t'=e^{\omega}\omega_t'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2+\omega_{t^2}''\right)$,

$u_{xt}''=e^{\omega}\left(\omega_t'\omega_x'+\omega_{xt}''\right)$, тогда $\omega_t'=a+n\omega_x'+\omega_{x^2}''$. Это уравнение параболического типа .

Пример . $p_y^{(n)}u(x,y)=e^a p_x^{(m)}\left(u(x,y)\,p_x^{(k)}u(x,y)\right)\Rightarrow p_y^{(n)}u=e^a p_x^{(m)}up_x^{(m+k)}u$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$

тогда $p_x^{(m)}u=p^{(m)}X(x),\ p_x^{(m+k)}u=p^{(m+k)}X(x),\ p_y^{(n)}u=p^{(n)}Y(y)\Rightarrow p^{(n)}Y(y)=e^a p^{(n)}X(x)\,p^{(m+k)}X(x)=\lambda$, отсюда $p^{(n)}Y(y)=\lambda, e^a p^{(n)}X(x)\,p^{(m+k)}X(x)=\lambda$,

решая эти два дифференциальных уравнения найдем функции $X(x),Y(y)$.

Пример . $p_x'\left(f(x)\,p_x^{(m)}u(x,y)\right)+p_y'\left(g(y)\,p_y^{(n)}u(x,y)\right)=a\ln u(x,y)\Rightarrow p_x'f(x)\,p_x^{(m+1)}u+p_y'g(y)\,p_y^{(n+1)}u=a\ln u$.

Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$, тогда $p_x'u=p'X(x),\ p_y'u=p'Y(y),\ p_y^{(n+1)}u=p^{(n+1)}Y(y),\ p_x^{(m+1)}u=p^{(m+1)}X(x)$,

значит $p'f(x)\,p^{(m+1)}X(x)+p'g(y)\,p^{(n+1)}Y(y)=a\left(\ln X(x)+\ln Y(y)\right)\Rightarrow p'f(x)\,p^{(m+1)}X(x)-a\ln X(x)=a\ln Y(y)-p'g(y)\,p^{(n+1)}Y(y)=\lambda$

$p'f(x)\,p^{(m+1)}X(x)-a\ln X(x)=\lambda, a\ln Y(y)-p'g(y)\,p^{(n+1)}Y(y)=\lambda$, решая эти два дифференциальных уравнения найдем функции $X(x),Y(y)$.

Пример . $p_y'u(x,y)=f(y)\,p_{x^2}''u(x,y)+u(x,y)\left(p_x'u(x,y)-e^a\right)$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$,

тогда $p_x'u=p'X(x),\ p_y'u=p'Y(y),\ p_{y^2}''u=p''Y(y),\ p_{x^2}''u=p''X(x)$ отсюда $p'Y(y)=f(y)\,p''X(x)+X(x)Y(y)\left(p'X(x)-e^a\right)$.

Пусть $p'X(x)-e^a=0\Rightarrow p'X(x)=e^a, e^{\frac{X'(x)}{X(x)}}=e^a, \dfrac{X'(x)}{X(x)}=a, \dfrac{dX(x)}{X(x)\,dx}=a, \dfrac{dX(x)}{X(x)}=adx, \ln X(x)=ax+c, X(x)=e^{ax+c}=ce^{ax}, p'X(x)=e^a, p''X(x)=1, p'Y(y)=f(y)$,

$e^{\frac{Y'(y)}{Y(y)}}=f(y), \dfrac{Y'(y)}{Y(y)}=\ln f(y), \dfrac{dY}{Y(y)\,dy}=\ln f(y), \dfrac{dY}{Y(y)}=\ln f(y)\,dy, \ln Y(y)=\int\ln f(y)\,dy, Y(y)=e^{\int\ln f(y)dy}$, $p_y'u(x,y)=f(y)\,p_x^{(n)}u(x,y)+u(x,y)\left(p_x'u(x,y)-e^a\right)$.

Другое решение , Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y)=e^{\omega(x,y)}$, тогда $u_y'=e^{\omega}\omega_y'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2+\omega_{x^2}''\right)$,

$u_{y^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y'\right)^2 + \omega_{y^2}''\right)$, $u_{xy}'' = e^{\omega}\left(\omega_y'\omega_x' + \omega_{xy}''\right)$, thus $e^{\omega_y'} = f(y)e^{\omega_{x^2}''} + e^{\omega}\left(e^{\omega_y'} - e^{a}\right)$.

Пример . $p_y'u(x,y) = ap_x'\left(u(x,y)\,p_x'u(x,y)\right) + bp_x'u(x,y) \Rightarrow p_y'u = ap_x'up_{x^2}''u + bp_x'u$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде

$u(x,y) = X(x)Y(y)$, тогда $p_x'u = p'X(x), p_y'u = p'Y(y),\ p'Y(y) = \lambda$, $e^{\frac{Y'(y)}{Y(y)}} = \lambda$, $\dfrac{Y'(y)}{Y(y)} = \ln\lambda$, $\dfrac{dY}{Y} = \ln\lambda dy$, $Y(y) = \lambda^y c$, $p_{y^2}''u = p''Y(y), p_{x^2}''u = p''X(x)$,

поэтому $p'Y(y) = ap'X(x)\,p''X(x) + bp'X(x) = \lambda \Rightarrow p'Y(y) = \lambda, ap'X(x)\,p''X(x) + bp'X(x) = \lambda$ решая это два дифференциальное уравнения найдем функцию $X(x)$.

Другое решение . Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y) = e^{\omega(x,y)}$, then $u_y' = e^{\omega}\omega_y'$, $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{x^2}''\right)$, $u_{y^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y'\right)^2 + \omega_{y^2}''\right)$,

$u_{xy}'' = e^{\omega}\left(\omega_y'\omega_x' + \omega_{xy}''\right)$, тогда $e^{\omega_y'} = e^{\omega_x'}\left(ae^{\omega_{x^2}''} + b\right)$.

Пример . $p_y'u(x,y)\,p_{x^2}''u(x,y) + p_x'u(x,y)\,p_{y^2}''u(x,y) = p_x'u(x,y)\,p_y'u(x,y)$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде

$u(x,y) = X(x)Y(y) \Rightarrow p_x'u = p'X, p_y'u = p'Y, p_{y^2}''u = p''Y, p_{x^2}''u = p''X$, отсюда $p'Yp''X + p'Xp''Y = p'Xp'Y$ тогда $\dfrac{p''X}{p'X} + \dfrac{p''Y}{p'Y} = 1, \dfrac{p''X}{p'X} = 1 - \dfrac{p''Y}{p'Y} = \lambda$.

The solution of the ordinary differential equation $\dfrac{p''X}{p'X} = \lambda \Leftrightarrow X''X - (X')^2 - X'X = X^2\ln\lambda$ is $X(x) = \dfrac{c}{e^{c_1e^x + x\ln\lambda}\lambda}$. The solution of the ordinary differential equation

$1 - \dfrac{p''Y}{p'Y} = \lambda \Leftrightarrow Y'' - (Y')^2 - Y'Y = Y^2\ln(1-\lambda)$ is $Y(y) = \dfrac{r}{e^{r_1e^y + y\ln(1-\lambda)}(1-\lambda)}$. We conclude that $u(x,y) = \dfrac{\gamma}{e^{r_1e^y + y\ln(1-\lambda) + x\ln\lambda + c_1e^x}\lambda(1-\lambda)}$, where $\gamma = rc$.

Пример . $p_x'u(x,y)\,p_{y^2}''u(x,y) + p_y'u(x,y)\,p_{x^2}''u(x,y) = u(x,y)$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y) = X(x)^{Y(y)} \Rightarrow p_x'u = (p'X)^Y = e^{\frac{X'}{X}Y}$,

$p_y'u = X^{Y'}, p_{y^2}''u = X^{Y''}, p_{x^2}''u = p_x'\left(\left(p_x'X\right)^Y\right) = p_x'\left(e^{\frac{X'}{X}Y}\right) = e^{\left(\frac{X'}{X}Y\right)_x'} = e^{\frac{X''X-(X')^2}{X^2}Y}$, значит $e^{\frac{X'}{X}Y}X^{Y''} + X^{Y'}e^{\frac{X''X-(X')^2}{X^2}Y} = X^Y$. Пусть $u(x,y) = u(z), z(x,y) = \phi(x) + \varphi(y)$,

$p'f(g) = \left(p_g{}'f(g)\right)^{g'(x)}$, тогда $p_x{}'u(z) = \left(p_z{}'u(z)\right)^{z_x{}'} = \left(p_z{}'u(z)\right)^{\phi'(x)}$, $p_y{}'u(z) = \left(p_z{}'u(z)\right)^{z_y{}'} = \left(p_z{}'u(z)\right)^{\varphi'(y)}$, $p_{y^2}{}''u(z) = p_y{}'\left(\left(p_z{}'u(z)\right)^{\varphi'(y)}\right) = \left(p_z{}'u(z)\right)^{\varphi''(y)}$,

$p_{x^2}{}''u(z) = p_x{}'\left(\left(p_z{}'u(z)\right)^{\phi'(x)}\right) = \left(p_z{}'u(z)\right)^{\phi''(x)} \Rightarrow \left(p_z{}'u(z)\right)^{\phi'(x)}\left(p_z{}'u(z)\right)^{\varphi''(y)} + \left(p_z{}'u(z)\right)^{\varphi'(y)}\left(p_z{}'u(z)\right)^{\phi''(x)} = u(z), \left(p_z{}'u(z)\right)^{\phi'(x)+\varphi''(y)} + \left(p_z{}'u(z)\right)^{\varphi'(y)+\phi''(x)} = u(z)$.

Другое решение . Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x, y) = e^{\omega(x, y)}$, тогда $u_y{}' = e^{\omega}\omega_y{}'$, $u_x{}' = e^{\omega}\omega_x{}'$, $u_{x^2}{}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x{}'\right)^2 + \omega_{x^2}{}''\right)$, $u_{y^2}{}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y{}'\right)^2 + \omega_{y^2}{}''\right)$

$u_{xy}{}'' = e^{\omega}\left(\omega_y{}'\omega_x{}' + \omega_{xy}{}''\right)$, thus $e^{\omega_x{}' + \omega_{y^2}{}''} + e^{\omega_y{}' + \omega_{x^2}{}''} = e^{\omega}$.

Пример . $p_{xy}{}''u(x, y) = \sin u(x, y), e^{\frac{u_{xy}{}''u - u_x{}'u_y{}'}{u^2}} = \sin u$. Пусть $u(x, y) = f(z)$, где $z = xy$, отсюда $u_x{}'(x, y) = f_x{}'(x, y) = f_z{}'(z)\, z_x{}' = f_z{}'(z)\, y$,

$u_y{}'(x, y) = f_y{}'(x, y) = f_z{}'(z)\, z_y{}' = f_z{}'(z)\, x, u_{yy}{}''(x, y) = \left(f_z{}'(z)\, x\right)_y{}' = f_{zz}{}''(z)\, z_y{}'x = f_{zz}{}''(z)\, x^2, u_{xx}{}''(x, y) = \left(f_z{}'(z)\, y\right)_x{}' = f_{zz}{}''(z)\, z_x{}'y =$

$= f_{zz}{}''(z)\, y^2, u_{xy}{}''(x, y) = \left(f_z{}'(z)\, y\right)_y{}' = f_{zz}{}''(z)\, z_y{}'y + f_z{}'(z)\, y = f_{zz}{}''(z)\, xy + f_z{}'(z)\, 1 = f_{zz}{}''(z)\, z + f_z{}'(z)$, тогда $p_{xy}{}''u(x, y) = e^{\frac{\left(f_{zz}{}''(z)z + f_z{}'(z)\right)f(z) - f_z{}'yxf_z{}'}{f^2(z)}} = e^{\frac{\left(f_{zz}{}''(z)z + f_z{}'(z)\right)f(z) - \left(f_z{}'(z)\right)^2 z}{f^2(z)}}$,

тогда $e^{\frac{\left(f_{zz}{}''(z)z + f_z{}'(z)\right)f(z) - \left(f_z{}'(z)\right)^2 z}{f^2(z)}} = \sin f(z)$. Пусть $g(z) = e^{jf(z)}$, значит $f(z) = \frac{\ln g(z)}{j}, f_z{}'(z) = \frac{1}{j}\frac{g_z{}'(z)}{g(z)}$,

$f_{zz}''(z) = \frac{1}{j}\frac{g_{zz}''(z)g(z) - \left(g_z'(z)\right)^2}{g^2(z)}$, $\sin\frac{\ln g(z)}{j} = \frac{e^{\ln g(z)} - e^{-\ln g(z)}}{2j} = \frac{g(z) - \frac{1}{g(z)}}{2j} = \frac{g^2(z)-1}{2jg(z)}$,

поэтому $e^{\frac{\left(\frac{1}{j}\frac{g_{zz}''(z)g(z)-\left(g_z'(z)\right)^2}{g^2(z)} + \frac{1}{j}\frac{g_z'(z)}{g(z)}\right)\frac{\ln g(z)}{j} - \left(-\frac{g_z'(z)}{g(z)}\right)^2 z}{\frac{\ln^2 g(z)}{-1}}} = \frac{g^2(z)-1}{2jg(z)}$, $\frac{\left(\frac{g_{zz}''(z)g(z)-\left(g_z'(z)\right)^2}{g^2(z)} + \frac{g_z'(z)}{g(z)}\right)\ln g(z) - \left(\frac{g_z'(z)}{g(z)}\right)^2 z}{\ln^2 g(z)} = \ln\frac{g^2(z)-1}{2jg(z)}$.

Другое решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y) = e^{\omega(x,y)}$, тогда $u_y' = e^{\omega}\omega_y'$, $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{x^2}''\right)$, $u_{y^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y'\right)^2 + \omega_{y^2}''\right)$,

$u_{xy}'' = e^{\omega}\left(\omega_y'\omega_x' + \omega_{xy}''\right)$, $e^{\omega_{xy}''} = \sin e^{\omega}$.

Другое решение . Найдем волновое рещение . Пусть $u(x,y) = f(\xi)$, где $\xi = x - vy$, поэтому $u_x' = f_\xi'\xi_x' = f_\xi'$, $u_y' = f_\xi'\xi_y' = -vf_\xi'$, $u_{xy}'' = \left(u_x'\right)_y' = \left(f_\xi'\right)_y' = f_{\xi\xi}''\xi_y' = -vf_{\xi\xi}''$,

значит $e^{\frac{-v\left(f_{\xi\xi}''f + \left(f_\xi'\right)^2\right)}{f^2}} = \sin f$.

Пример $p_{xy}''u(x,y) = f\left(u(x,y)\right)$ это уравнение эквивалентно следующему $u_{xy}''(x,y)u(x,y) - u_y'(x,y)u_x'(x,y) = u^2(x,y)\ln f\left(u(x,y)\right)$

Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y) = v(\rho)$, где $\rho = xy$, тогда $u_x'(x,y) = v_\rho'(x,y) = v_\rho'(\rho)\rho_x' = v_\rho'(\rho)y$,

$u_y'(x,y) = v_\rho'(x,y) = v_\rho'(\rho)\rho_y' = v_\rho'(\rho)x$, $u_{yx}''(x,y) = \left(v_\rho'(\rho)x\right)_\rho' = v_{\rho\rho}''(\rho)z_\rho'x + v_\rho'(\rho)x_x' = v_\rho''(\rho)xy + v_\rho'(\rho) = v_{\rho\rho}''(\rho)\rho + v_\rho'(\rho)$, поэтому получим уравнение

$\left(v_{\rho\rho}''(\rho)\rho + v_\rho'(\rho)\right)v(\rho) - \left(v_\rho'(\rho)\right)^2\rho = v^2(\rho)\ln f\left(v(\rho)\right)$. Решение этого уравнения $v(\rho) = 2c^2\tan\left(c\left(\ln\rho + c_1\right)^2 + 1\right)$, это дает $u(x,y) = 2c\tan\left(c\left(\ln xy + c_1\right)^2 + 1\right)$.

Линейные p дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных

$\left(p_{xy}''u(x,y)\right)^{a(x,y)}\left(p_{xx}''u(x,y)\right)^{b(x,y)}\left(p_{yy}''u(x,y)\right)^{c(x,y)}\left(p_x'u(x,y)\right)^{k(x,y)}\left(p_y'u(x,y)\right)^{m(x,y)}u(x,y)^{n(x,y)} = F(x,y),$

где произвольная функция $F(x, y) \geq 0$, $p_x' u = e^{\frac{u_x'}{u}}$ $p_y' u = e^{\frac{u_y'}{u}}$ $p_{xx}'' u = e^{\frac{u_{xx}'' u - (u_x')^2}{u^2}}$ $p_{xy}'' u = p_{yx}'' u = e^{\frac{u_{xy}'' u - u_x' u_y'}{u^2}}$ $p_{yy}'' u = e^{\frac{u_{yy}'' u - (u_y')^2}{u^2}}$

решение этого уравнения найдем в виде $u(x, y) = e^{\omega(x, y)}$, поэтому $p_x' u = e^{\omega_x'}$, $p_y' u = e^{\omega_y'}$, $p_{yy}'' u = e^{\omega_{yy}''}$, $p_{xx}'' u = e^{\omega_{xx}''}$, $p_{xy}'' u = e^{\omega_{xy}''}$,

тогда $e^{a\omega_{xy}''} e^{b\omega_{xx}''} e^{c\omega_{yy}''} e^{k\omega_x'} e^{m\omega_y'} e^{n\omega} = F(x, y)$, итак $a\omega_{xy}'' + b\omega_{xx}'' + c\omega_{yy}'' + k\omega_x' + m\omega_y' + n\omega = \ln F(x, y)$.

Пример $p_x' u(x,t) \left(p_{t^2}'' u(x,t) \right)^{a^2} = 1$, $u_x' u + a^2 \left(u_{t^2}'' u - (u_t')^2 \right) = 0$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t) = e^{\omega(x,t)}$,

тогда $u_t' = e^{\omega} \omega_t', u_x' = e^{\omega} \omega_x', u_{x^2}'' = e^{\omega} (\omega_x')^2 + e^{\omega} \omega_{x^2}''$, тогда $e^{2\omega} \omega_t' + a^2 \left(e^{2\omega} \left((\omega_x')^2 + \omega_{x^2}'' \right) \right) - e^{2\omega} (\omega_x')^2 = 0$, $\omega_t' + a^2 \left((\omega_x')^2 + \omega_{x^2}'' - (\omega_x')^2 \right) = 0$, $\omega_x' + a^2 \omega_{x^2}'' = 0$.

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x, y) = X(x) T(t) \Rightarrow p_x' u = p_x' X(x), p_{t^2}'' u = p_{t^2}'' T(t)$, поэтому $p_x' X(x) p_{t^2}'' T(t) = 1$,

значит $p_x' X(x) = \dfrac{1}{\left(p_{t^2}'' T(t) \right)^{a^2}} = \lambda \Rightarrow X(x) = A\lambda^x, T(t) = B_1 B_2^t \lambda^{\frac{-t^2}{2a^2}}$, тогда $u(x,t) = AB_1 B_2^t \lambda^{x - \frac{t^2}{2a^2}} = AB^t \lambda^{x - \frac{t^2}{2a^2}}$, где A, B произвольные постоянные.

Начальные условия $u(x,0) = qe^x \Rightarrow qe^x = A\lambda^x$, $\ln q + x = x \ln \lambda + \ln A$, $x(1 - \ln \lambda) = \ln \dfrac{A}{q} \Rightarrow \lambda = e, A = q$, тогда $u(x,t) = qB^t e^{x - \frac{t^2}{2a^2}}$.

Начальные условия $p_t' u(x,0) = R \Rightarrow p_t' u = Be^{-t}$ значит $B = R, u(x,t) = qR^t e^{x - \frac{t^2}{2a^2}}$. Граничные условия $p_x' u(0,t) = e$, $p_x' u(x,t) = \lambda \Rightarrow \lambda = e$.

Пример $p_t' u(x,t) = \left(p_{x^2}'' u(x,t) \right)^{a^2}$ это уравнение эквивалентно следующему уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}} = e^{a^2 \frac{u_{x^2}'' u - (u_x')^2}{u^2}}$, отсюда $u_t' u = a^2 \left(u_{x^2}'' u - (u_x')^2 \right)$.

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t) = e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t' = e^{\omega} \omega_t', u_x' = e^{\omega} \omega_x', u_{x^2}'' = e^{\omega} (\omega_x')^2 + e^{\omega} \omega_{x^2}''$,

тогда $e^{2\omega} \omega_t' = a^2 \left(e^{2\omega} \left((\omega_x')^2 + \omega_{x^2}'' \right) \right) - e^{2\omega} (\omega_x')^2, \omega_t' = a^2 \left((\omega_x')^2 + \omega_{x^2}'' - (\omega_x')^2 \right)$, $\omega_t' = a^2 \omega_{x^2}''$ это однородное уравнение теплопроводности ,

$0 < x < r$, $t > 0$, Начальные условия $\omega(x,0) = \phi(x)$, граничные условия $\omega(0,t) = 0$, $\omega(r,t) = 0$, $0 \le t \le T$, для функции $u(x,t)$ эти условия $u(x,0) = e^{\phi(x)}$,

$u(0,t) = 1$, $u(r,t) = 1$. Периодическое решение $\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) \sin\frac{n\pi}{r}x$, где $\omega_n(t) = \left(\frac{2}{r}\int_0^r \phi(\xi)\sin\frac{n\pi}{r}\xi d\xi\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{r}\right)^2 t}$, решение данного уравнения $u(x,t) = e^{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\sin\frac{n\pi}{r}x}$.

Пусть $u(x,t) = T(t)X(x)$, отсюда $p_t' T(t) = a^2 p_{x^2}'' X(x) = \lambda$, значит $X(x) = B_1 B_2^x \lambda^{\frac{x^2}{2a^2}}$, $T(t) = A\lambda^t$, тогда $u(x,t) = AB^x \lambda^{t+\frac{x^2}{2a^2}}$, $AB^x\lambda^{t+\frac{x^2}{2a^2}} = e^{\omega(x,t)}$,

$\omega(x,t) = \ln A + x\ln B + \left(t + \frac{x^2}{2a^2}\right)\ln\lambda$, это частное решение однородного уравнения теплопроводности .

Пример $p_t' u(x,t) = \left(p_{x^2}'' u(x,t)\right)^{a^2}$ это уравнение эквивалентно следующему $e^{\frac{u_t'}{u}} = e^{a^2\frac{u_{x^2}''u - (u_x')^2}{u^2}}$, $u_t' u = a^2\left(u_{x^2}''u - \left(u_x'\right)^2\right)$. Пусть $\zeta = x - vt, \eta = 1$,

тогда $u_t' = -vu_\zeta', u_x' = u_\zeta', u_{x^2}'' = u_{\zeta^2}''$, итак $-vu_\zeta' u = a^2\left(u_{\zeta^2}''u - \left(u_\zeta'\right)^2\right)$. Пусть $u(\zeta) = e^{\varphi(\zeta)}$ получим $u_\zeta' = e^\varphi \varphi_\zeta', u_{\zeta^2}'' = e^\varphi\left(\varphi_\zeta'\right)^2 + e^\varphi\varphi''$,

значит $-ve^\varphi\varphi' e^\varphi = a^2\left(e^{2\varphi}\left(\left(\varphi'\right)^2 + \varphi''\right) - e^{2\varphi}\left(\varphi'\right)^2\right), -v\varphi' = a^2\varphi'', a^2\varphi'' + v\varphi' = 0, a^2n^2 + vn = 0, n = 0, n = -\frac{v}{a^2}$ отсюда $\varphi(\zeta) = c_1 e^{0\zeta} + c_2 e^{-\frac{v}{a^2}\zeta} = c_1 + c_2 e^{-\frac{v}{a^2}\zeta} \Rightarrow$

$u(x,t) = e^{c_1 + c_2 e^{-\frac{v}{a^2}(x-vt)}} = e^{c_1} e^{c_2 e^{-\frac{v}{a^2}(x-vt)}} = c_1 e^{c_2 e^{-\frac{v}{a^2}(x-vt)}}$. Поэтому $e^{\omega(x,t)} = c_1 e^{c_2 e^{-\frac{v}{a^2}(x-vt)}}$, $\omega(x,t) = \ln c_1 + c_2 e^{-\frac{v}{a^2}(x-vt)}$, это частное решение однородного уравнения теплопроводности .

Пример $p_t' u(x,t)\left(p_{x^2}'' u(x,t)\right)^{-a^2} = f(x,t)$ это уравнение эквивалентно следующему $e^{\frac{u_t'}{u}} e^{-a^2\frac{u_{x^2}''u - (u_x')^2}{u^2}} = f(x,t)$, значит $u_t' u - a^2\left(u_{x^2}''u - \left(u_x'\right)^2\right) = u^2 \ln f(x,t)$.

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t) = e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t' = e^\omega\omega_t', u_x' = e^\omega\omega_x', u_{x^2}'' = e^\omega\left(\omega_x'\right)^2 + e^\omega\omega_{x^2}'' \Rightarrow e^{2\omega}\omega_t' - e^{2\omega}a^2\omega_{x^2}'' = e^{2\omega}\ln f(x,t)$,

итак $\omega_t' = a^2\omega_{x^2}'' + \ln f(x,t) = a^2\omega_{x^2}'' + g(x,t)$ это неоднородное уравнение теплопроводности , $0 < x < r$, $t > 0$, начальные условия $\omega(x,0) = 0$,

граничные условия $\omega(0,t) = 0$, $\omega(r,t) = 0$, $0 \le t \le T$, для функции $u(x,t)$ это условие $u(x,0) = 1$, $u(0,t) = 1$, $u(r,t) = 1$. Периодическое решение

$\omega(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^r e^{-\left(\frac{n\pi}{r}a\right)^2(t-\tau)} g_n(\tau)\,d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{r}x$, где $g_n(t)=\frac{2}{r}\int_0^r g(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{r}\xi\,d\xi$, периодическое решение данного уравнения $u(x,t)=e^{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^r e^{-\left(\frac{n\pi}{r}a\right)^2(t-\tau)} g_n(\tau)d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{r}x}$.

Пример $p_x{}'u(x,t)\,p_{t^2}{}''u(x,t)=1$ это уравнение эквивалентно следующему $e^{\frac{u_x{}'}{u}}e^{\frac{u_{tt}{}''u-(u_t{}')^2}{u^2}}=1$, $u_x{}'u+u_{tt}{}''u-(u_t{}')^2=0$. Найдем автономное решение этого дифференциального уравнения . Дифференциальное уравнение в частных производных , если существуют функции $A(t), g(t)$ такие что решение может быть написано в виде $u(x,t)=A(t)\,f\left(\frac{x}{g(t)}\right)$, тогда решение уравнения получается решением обыкновенного дифференциального уравнения . Обычно решение представленно в виде $u(x,t)=t^{\alpha}v(\xi)$, где $\xi=xt^{\beta}$. Профили этих решений в различные моменты времени могут быть полученны из каждого другого автономного преобразования . Решение существует если расстяжение независимых зависимых переменных осуществляется по правилу $x=c^k\overline{x}$, $t=c\overline{t}$, $u(x,t)=c^m\overline{u}(\overline{x},\overline{t})$, где $c>0$ произвольная постоянная .

Пусть $(\overline{x},\overline{t})=\overline{t}^{\,\alpha}v(\overline{\xi})=\overline{t}^{\,\alpha}v(\overline{x}\,\overline{t}^{\,\beta})$, тогда $\frac{u(x,t)}{c^m}=\left(\frac{t}{c}\right)^{\alpha}v\left(\frac{x}{c^k}\left(\frac{t}{c}\right)^{\beta}\right)=c^{-\alpha}t^{\alpha}v\left(c^{-k-\beta}xt^{\beta}\right)$, тогда $u(x,t)=c^{m-\alpha}t^{\alpha}v\left(c^{-k-\beta}xt^{\beta}\right)$. Чтобы решение соответствующее решению $u(x,t)=t^{\alpha}v(\xi)$ существовало должны выполняться условия $m-\alpha=0$, $-k-\beta=0$, $\alpha=m$, $\beta=-k$.

Найдем производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial\left(c^m\overline{u}(\overline{x},\overline{t})\right)}{\partial(c\overline{t})}=\frac{c^m\partial\overline{u}}{c\partial\overline{t}}=c^{m-1}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial\left(c^m\overline{u}(\overline{x},\overline{t})\right)}{\partial(c^k\overline{x})}=\frac{c^m\partial\overline{u}}{c^k\partial\overline{x}}=c^{m-k}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}$,

$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial(c^k\overline{x})}\left(c^{m-k}\frac{\partial\overline{u}(\overline{x},\overline{t})}{\partial\overline{x}}\right)=\frac{c^{m-k}}{c^k}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x}^2}=c^{m-2k}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x}^2}$,

$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial(c\overline{t})}\left(c^{m-1}\frac{\partial\overline{u}(\overline{x},\overline{t})}{\partial\overline{t}}\right)=\frac{c^{m-1}}{c}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}=c^{m-2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}$.

Подставим эти выражения в данное уравнение $c^{m-k}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}c^m\overline{u}+c^{m-2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{t}^2}c^m\overline{u}-c^{2(m-1)}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}\right)^2$, тогда получим $2m-k=2m-2$, $k=2$, итак автономное решение имеет вид $u(x,t)=t^{\alpha}v(\xi)=t^{m}v(\xi)$, $\xi=xt^{\beta}=xt^{-2}$. Значит

$$\frac{\partial u}{\partial t}=mt^{m-1}v(\xi)+t^{m}\frac{dv}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=mt^{m-1}v(\xi)+t^{m}\frac{dv}{d\xi}\left(-2xt^{-3}\right)=mt^{m-1}v(\xi)-2xt^{-2}t^{m-1}\frac{dv}{d\xi}=t^{m-1}\left(mv(\xi)-2\xi\frac{dv}{d\xi}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=t^{m}\frac{dv}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=t^{m}\frac{dv}{d\xi}t^{-2}=t^{m-2}\frac{dv}{d\xi}\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(t^{m-2}\frac{dv}{d\xi}\right)=t^{m-2}\frac{d^2v}{d\xi^2}\frac{d\xi}{dx}=t^{m-2}\frac{d^2v}{d\xi^2}t^{-2}=t^{m-4}\frac{d^2v}{d\xi^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{m-1}\left(mv(\xi)-2\xi\frac{dv}{d\xi}\right)\right)=(m-1)t^{m-2}\left(mv(\xi)-2\xi\frac{dv}{d\xi}\right)+t^{m-1}\left(m\frac{dv}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}-2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{dv}{d\xi}+\xi\frac{d^2v}{d\xi^2}\frac{d\xi}{dt}\right)\right)=$$

$$=t^{m-2}\left((m-1)\left(mv(\xi)-2\xi\frac{dv}{d\xi}\right)+t\left(m\frac{dv}{d\xi}\left(-2xt^{-3}\right)-2\left(\frac{dv}{d\xi}\left(-2xt^{-3}\right)+\xi\frac{d^2v}{d\xi^2}\left(-2xt^{-3}\right)\right)\right)\right)=$$

$$=t^{m-2}\left((m-1)mv(\xi)-2(m-1)\xi\frac{dv}{d\xi}-2m\xi\frac{dv}{d\xi}+4\xi\frac{dv}{d\xi}+4\xi^2\frac{d^2v}{d\xi^2}\right)=t^{m-2}\left((m-1)mv(\xi)+(6-4m)\xi\frac{dv}{d\xi}+4\xi^2\frac{d^2v}{d\xi^2}\right)$$

. Подставим эти выражения в данное уравнение

$$t^{m-2}\frac{dv}{d\xi}t^{m}v(\xi)+t^{m-2}\left((m-1)mv(\xi)+(6-4m)\xi\frac{dv}{d\xi}+4\xi^2\frac{d^2v}{d\xi^2}\right)t^{m}v(\xi)-t^{2m-2}\left(mv(\xi)-2\xi\frac{dv}{d\xi}\right)^2=0\ ,$$

$$m(m-1)v^2(\xi)+\left(\left(1+\xi(6-4m)\right)v(\xi)\frac{dv}{d\xi}+4\xi^2v(\xi)\frac{d^2v}{d\xi^2}\right)+4\xi^2v(\xi)\frac{d^2v}{d\xi^2}-\left(mv(\xi)-2\xi\frac{dv}{d\xi}\right)^2=0\ .$$

Пример . $p_t{}'u(t,x)\left(p_{x^2}{}''u(t,x)\right)^a = u(t,x)$ это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}+\frac{u_{x^2}{}''u-\left(u_x{}'\right)^2}{u^2}a} = u$, $u_t' + au_{x^2}{}'' - a\frac{\left(u_x{}'\right)^2}{u} = u\ln u$. Пусть $u(t,x) = e^{\omega(t,x)} \Rightarrow u_t{}' = e^{\omega}\omega_t{}', u_x{}' = e^{\omega}\omega_x{}'$,

$u_{x^2}{}'' = \left(e^{\omega}\omega_x{}'\right)_x' = e^{\omega}\left(\omega_x{}'\right)^2 + e^{\omega}\omega_{x^2}{}''$, тогда $e^{\omega}\omega_t{}' + ae^{\omega}\left(\left(\omega_x{}'\right)^2 + \omega_{x^2}{}''\right) - a\frac{\left(e^{\omega}\omega_x{}'\right)^2}{e^{\omega}} = e^{\omega}\omega$, $\omega_t{}' + a\left(\left(\omega_x{}'\right)^2 + \omega_{x^2}{}''\right) - a\left(\omega_x{}'\right)^2 = \omega$, $\omega_t{}' + a\omega_{x^2}{}'' = \omega$. Это уравнение параболического вида

Пусть $\omega(t,x) = T(t) + X(x)$, тогда $\omega_t{}' = T'$, $\omega_{x^2}{}'' = X''$, поэтому $T' + aX'' = T + Y \Rightarrow T' - T = X' - aX'' = \lambda$. Дифференциальное уравнение $T' - T = \lambda$, имеет решение

$T(t) = ce^{x} - \lambda$. Дифференциальное уравнение $X' - aX'' = \lambda$ имеет решение $X(x) = r + r_1 e^{\frac{x}{a}} + \lambda x$.

Другое решение . Let $u(t,x) = T(t)X(x) \Rightarrow p_t{}'u = p'T, p_x{}'u = p'X, p_{x^2}{}''u = p''X, p_{t^2}{}''u = p''T$, отсюда $p'T\left(p''X\right)^a = TY$, $\frac{p'T}{T} = \frac{X}{\left(p''X\right)^a} = \lambda$,

Дифференциальное уравнение $\frac{p'T}{T} = \lambda$ имеет решение $T(t) = \frac{1}{\lambda}e^{c^t}$. Решение дифференциального уравнения $\frac{X}{\left(p''X\right)^a} = \lambda \Leftrightarrow \frac{X''X - \left(X'\right)^2}{X^2} = \left(\frac{X}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}}$ можно найти численно .

Другое решение. Пусть $u(x,y) = T(t)^{X(x)}$, тогда $p_t{}'u = \left(p'T\right)^X = e^{\frac{T'}{T}X}$, $p_x{}'u = T^{X'}$, $p_{x^2}{}''u = T^{X''}$, $p_{t^2}{}''u = p_t{}'\left(\left(p_t{}'T\right)^X\right) = p_t{}'\left(e^{\frac{T'}{T}X}\right) = e^{\left(\frac{T'}{T}X\right)_t'} = e^{\frac{T''T-\left(T'\right)^2}{T^2}X}$, откуда

$e^{\frac{T'}{T}X}T^{aX''} = T^X$, $\frac{T'}{T}X + aX''\ln T = X\ln T$, $\frac{T'}{T}X = \left(X - aX''\right)\ln T$, $\frac{T'}{T\ln T} = 1 - a\frac{X''}{X} = \lambda$. Дифференциальное уравнение $\frac{T'}{T\ln T} = \lambda$ имеет решение $T(t) = \gamma^{e^{\lambda x}}$,

где γ постоянная . Дифференциальное уравнение $\frac{X''}{X} = \eta$ имеет решение $X(x) = r\sin\eta x + r_1\cos\eta x$, если $\eta < 0$, $X(x) = re^{-\eta x} + r_1 e^{\eta x}$, где $\eta = \frac{1-\lambda}{a}$.

Пример . $p_t{}'u(t,x)\left(p_{x^2}{}''u(t,x)\right)^a = F\left(u(t,x)\right)$ это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}+\frac{u_{x^2}{}''u-\left(u_x{}'\right)^2}{u^2}a} = F\left(u(t,x)\right)$, $u_t{}' + au_{x^2}{}'' - a\frac{\left(u_x{}'\right)^2}{u} = u\ln F(u)$.

Пусть $u(t,x) = e^{\omega(t,x)} \Rightarrow u_t{}' = e^{\omega}\omega_t{}', u_x{}' = e^{\omega}\omega_x{}', u_{x^2}{}'' = \left(e^{\omega}\omega_x{}'\right)_x' = e^{\omega}\left(\omega_x{}'\right)^2 + e^{\omega}\omega_{x^2}{}''$, тогда $e^{\omega}\omega_t{}' + ae^{\omega}\left(\left(\omega_x{}'\right)^2 + \omega_{x^2}{}''\right) - a\frac{\left(e^{\omega}\omega_x{}'\right)^2}{e^{\omega}} = e^{\omega}F\left(e^{\omega}\right)$,

$\omega_t{}' + a\left(\left(\omega_y{}'\right)^2 + \omega_{y^2}{}''\right) - a\left(\omega_y{}'\right)^2 = \ln F\left(e^{\omega}\right), \omega_t{}' + a^2\omega_{y^2}{}'' = \ln F\left(e^{\omega}\right)$. Это уравнение параболического вида.

Другое решение . Пусть $u(t,x)=e^{\omega(t,x)}$, тогда $p_t'u=e^{\omega_t'}$, $p_x'u=e^{\omega_x'}$, $p_{x^2}''u=e^{\omega_{x^2}''}$, $p_{t^2}''u=e^{\omega_{t^2}''}$, $p_{t^n}^{(n)}u=e^{\omega_{t^n}^{(n)}}$, $p_{x^n}^{(n)}u=e^{\omega_{x^n}^{(n)}}$ $\Rightarrow e^{\omega_t'}e^{a\omega_{x^2}''}=e^{\omega}$, $e^{\omega_t'+a\omega_{x^2}''}=F(e^{\omega})$,

значит $\omega_t'+a\omega_{x^2}''=\ln F(e^{\omega})$.

Пусть $F(u)=u, \ln F(u)=\ln u=\ln e^{\omega}=\omega$, отсюда $\omega_t'+a\omega_{x^2}''=\omega$. Пусть $\omega(t,x)=T(t)+X(x)$, тогда $\omega_t'=T'$, $\omega_{x^2}''=X''$,

поэтому $T'+aX''=T+X\Rightarrow T'-T=X'-aX''=\lambda$ решая эти два обыкновенных дифференциальных уравнения получим функции $T(t),X(x)$.

Пример . $p_t'u(x,y,t)=\left(p_{x^2}''u(x,y,t)\,p_{y^2}''u(x,y,t)\right)^a$ это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_t'}{u}}=e^{a\left(\frac{u_{x^2}''u-(u_x')^2}{u^2}+\frac{u_{y^2}''u-(u_y')^2}{u^2}\right)}$, поэтому $u_t'u=a^2\left(u_{x^2}''u-(u_x')^2+u_{y^2}''u-(u_y')^2\right)$.

Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y,t)=e^{\omega(x,y,t)}$, тогда $u_t'=e^{\omega}\omega_t'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_y'=e^{\omega}\omega_y'$, $u_{y^2}''=e^{\omega}\left((\omega_y')^2+\omega_{y^2}''\right)$, $u_{x^2}''=e^{\omega}\left((\omega_x')^2+\omega_{x^2}''\right)$,

тогда $\omega_t'=a\left(\omega_{x^2}''+\omega_{y^2}''\right)$ это однородное уравнение теплопроводности для прямоугольной области $0<x<r$, $0<y<q$, $t>0$, начальные условия

$\omega(x,y,0)=\phi(x,y)$, $\omega(0,y,t)=0$, $\omega(r,y,t)=0$, $\omega(x,q,t)=0$, $\omega(x,0,t)=0$.

Пусть $a<0$ получим уравнение гиперболического вида . Пусть $a>0$ получим уравнение эллиптического вида .

Периодическое решение $\omega(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}e^{-a\pi^2\left(\frac{m^2}{r^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)}\sin\frac{m\pi}{r}x\sin\frac{n\pi}{q}y$, где $A_{m,n}=\frac{4}{rq}\int_0^r\int_0^q\phi(x,y)\sin\frac{m\pi}{r}x\sin\frac{n\pi}{q}ydxdy$,

итак периодическое решение данного уравнения $u(x,y,t)=e^{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{r^2}+\frac{n^2}{q^2}\right)}\sin\frac{m\pi}{r}x\sin\frac{n\pi}{q}y}$. Это уравнение параболического вида .

Пример . $p_{t^2}''u(x,t)\left(p_{x^2}''u(x,t)\right)^a=1$ это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_{t^2}''u-(u_t')^2}{u}}e^{a\frac{u_{x^2}''u-(u_x')^2}{u}}=1$, $u_{t^2}''u-(u_t')^2+a\left(u_{x^2}''u-(u_x')^2\right)=0$.

Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, значит $u_t'=e^{\omega}\omega_t', u_x'=e^{\omega}\omega_x', u_{x^2}''=e^{\omega}(\omega_x')^2+e^{\omega}\omega_{x^2}'', u_{t^2}''=e^{\omega}(\omega_t')^2+e^{\omega}\omega_{t^2}''$

тогда $\omega_{t^2}'' + a\omega_{x^2}'' = 0$ это однородное волновое уравнение , начальные условия $\omega(x,0) = \mu(x)$, $\omega_t'(x,0) = \phi(x)$, $0 < x < r$, граничные условия $\omega(0,t) = 0$, $\omega_x'(r,t) = 0$, $t \geq 0$, для функции $u(x,t)$ эти условия $u(x,0) = e^{\phi(x)}$, $u(0,t) = 1$, $u(r,t) = 1$.

Периодическое решение этого уравнения $\omega(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{n\pi at}{r} + \beta_n \sin\frac{n\pi at}{r}\right)\sin\frac{n\pi}{r}x$, где $\beta_n = \frac{2}{r}\int_0^r \phi(\xi)\sin\frac{n\pi}{r}\xi d\xi$, $\alpha_n = \frac{2}{r}\int_0^r \mu(\xi)\sin\frac{n\pi}{r}\xi d\xi$,

тогда $u(x,t) = e^{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{n\pi at}{r} + \beta_n \sin\frac{n\pi at}{r}\right)\sin\frac{n\pi}{r}x}$.

Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$ so $p_{x^2}''X(x)\left(p_{t^2}''T(t)\right)^a = 1$, значит $p_{x^2}''X(x) = \frac{1}{\left(p_{t^2}T(t)\right)^a} = \lambda$,

отсюда $X(x) = A_2A_1^x\lambda^{\frac{x^2}{2}}, T(t) = B_2B_1^t\lambda^{\frac{-t^2}{2a}} \Rightarrow u(x,t) = AA_1^xB_1^t\lambda^{\frac{x^2}{2}-\frac{t^2}{2a}}$. Начальное условие $p_t'u(x,0) = \gamma$.Граничные условия $p_x'u(0,t) = q_1, p_x'u(s,t) = q_2$, $p_t'u(x,t) = B_1\lambda^{\frac{-t}{a^2}} \Rightarrow$ $\gamma = B_1\lambda^0 = B_1$, тогда $u(x,t) = AA_1^x\gamma^t\lambda^{\frac{x^2}{2}-\frac{t^2}{2a}}$, отсюда $p_x'u(x,t) = A_1\lambda^x \Rightarrow q_1 = A_1\lambda^0 = A_1$. Поэтому $u(x,t) = Aq_1^x\gamma^t\lambda^{\frac{x^2}{2}-\frac{t^2}{2a}}$. Пусть $p_x'u(r,t) = q_2$, тогда $q_2 = A_1\lambda^r, q_2 = q_1\lambda^r \Rightarrow$ $\lambda^r = \frac{q_2}{q_1}, \lambda = \frac{1}{r}\ln\frac{q_2}{q_1}$. Частное решение однородного волнового уравнения $\omega(x,t) = \ln u(x,t) = \ln A + x\ln A_1 + t\ln B_1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{t^2}{2a}\right)\ln\lambda$.

Другое решение . $u(x,t) = A^{\alpha(x)}B^{\beta(t)} \Rightarrow p_{x^2}''u = A^{\alpha''(x)}, p_{t^2}''u = B^{\beta''(t)}$ поэтому $A^{\alpha''(x)}B^{a\beta''(t)} = 1$, значит $\alpha''(x) = 0,\ \alpha'(x) = A_1, \alpha(x) = A_1x + A_2, \beta''(t) = 0,$ $\beta'(t) = B_1, \beta(t) = B_1t + B_2 \Rightarrow u(x,t) = A^{A_1x+A_2}B^{a(B_1t+B_2)} = 1,\ u(x,t) = AA_1^xB_1^{at}$ это уравнение также имеет решение $u(x,t) = AA_1^xB_1^t\lambda^{xt}$, это можно проверить подстановкой .

Пример . $p_x^{(n)}u(x,y)\,p_y^{(j)}u(x,y) = 1$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u(x,y) = A^{\alpha(x)}B^{\beta(y)}$, где A, B произвольная постояная $p_x^{(n)}u = A^{\alpha^{(n)}(x)}, p_y^{(j)}u = B^{\beta^{(j)}(y)}$. Значит $A^{\alpha^{(n)}(x)}B^{\beta^{(j)}(y)} = 1 \Rightarrow \alpha^{(n)}(x) = 0, \beta^{(j)}(y) = 0$.

Пример . $p_{x^2}''u(x,t)\,p_{t^2}''u(x,t) = f(x)$, это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_{t^2}''u-(u_t)^2}{u^2}}e^{a^2\frac{u_{x^2}''u-(u_x')^2}{u^2}} = f(x)$, значит

$u_{t^2}''u-\left(u_t'\right)^2+a^2\left(u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2\right)=u^2\ln f\left(x\right)$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u\left(x,t\right)=A^{\alpha(x)}B^{\beta(t)}v\left(x\right)\Rightarrow$

$p_x'u=A^{\alpha'(x)}p_x'v\left(x\right),p_t'u=B^{\beta'(t)},p_{t^2}''u=B^{\beta''(t)},p_{x^2}''u=A^{\alpha''(x)}p_{x^2}''v\left(x\right)$ отсюда $A^{\alpha''(x)}p_{x^2}''v\left(x\right)B^{\beta''(t)}=f\left(x\right)$. Пусть $A^{\alpha''(x)}B^{\beta''(t)}=1\Rightarrow$

$\alpha''\left(x\right)=0,\alpha'\left(x\right)=A_1,\alpha\left(x\right)=A_1x+A_2$, $\beta''\left(t\right)=0,\beta'\left(t\right)=B_1,\beta\left(t\right)=B_1t+B_2,p_{x^2}''v\left(x\right)=f\left(x\right),v\left(x\right)=c_1e^{\int\ln\left(ce^{\int\ln f(x)dx}\right)dx}$

Другое решение . $u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right)v\left(x\right)\Rightarrow p_x'u=p_x'X\left(x\right)p_x'v\left(x\right),p_t'u=p_t'T\left(t\right),p_{t^2}''u=p_{t^2}''T\left(t\right),p_{x^2}''u=p_{x^2}''X\left(x\right)p_{x^2}''v\left(x\right)$, отсюда

$p_{x^2}''X\left(x\right)p_{x^2}''v\left(x\right)p_{t^2}''T\left(t\right)=f\left(x\right)$ Пусть $p_{x^2}''X\left(x\right)p_{t^2}''T\left(t\right)=1$, тогда $p_{x^2}''v\left(x\right)=f\left(x\right)$.

$p_x^{(n)}u\left(x,t\right)p_t^{(j)}u\left(x,t\right)=f\left(x\right)$

Пример . $p_{t^2}''u\left(x,t\right)\left(p_{x^2}''u\left(x,t\right)\right)^a=f\left(x,t\right)$, это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_{t^2}''u-\left(u_t\right)^2}{u^2}}e^{a\frac{u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2}{u^2}}=f\left(x,t\right)$, поэтому

$u_{t^2}''u-\left(u_t'\right)^2+a\left(u_{x^2}''u-\left(u_x'\right)^2\right)=u^2\ln f\left(x,t\right)$. Решение этого дифференциального уравнения найдем в виде $u\left(x,t\right)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t'=e^{\omega}\omega_t',u_x'=e^{\omega}\omega_x'$,

$u_{x^2}''=e^{\omega}\left(\omega_x'\right)^2+e^{\omega}\omega_{x^2}'',u_{t^2}''=e^{\omega}\left(\omega_t'\right)^2+e^{\omega}\omega_{t^2}''$, тогда $\omega_{t^2}''+a\omega_{x^2}''=\ln f\left(x,t\right)$ это неоднородное волновое уравнение , начальное условие

$\omega\left(x,0\right)=\mu\left(x\right)$, $\omega_t'\left(x,0\right)=\phi\left(x\right)$, $0<x<r$, граничное условие $\omega\left(0,t\right)=0$, $\omega\left(r,t\right)=0$, $t\geq 0$. Периодическое решение этого уравнения

$\omega\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n\cos\frac{n\pi at}{r}+\phi_n\sin\frac{n\pi at}{r}+\frac{r}{n\pi}\frac{1}{a}\int_0^t\ln f_n\left(\tau\right)\sin\frac{n\pi}{r}a\left(t-\tau\right)d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{r}x$, где $\ln f_n\left(t\right)=\frac{2}{r}\int_0^r\ln f\left(\xi,t\right)\sin\frac{n\pi}{r}\xi d\xi$,

$\mu_n=\frac{2}{r}\int_0^r\mu\left(\xi\right)\sin\frac{n\pi}{r}\xi d\xi$, $\phi_n=\frac{2}{r}\int_0^r\phi\left(\xi\right)\sin\frac{n\pi}{r}\xi d\xi$, so $u\left(x,t\right)=e^{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n\cos\frac{n\pi at}{r}+\phi_n\sin\frac{n\pi at}{r}+\frac{r}{n\pi}\frac{1}{a}\int_0^r\ln f_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{r}a(t-\tau)d\tau\right)\sin\frac{n\pi}{r}x}$.

Пример . $p_{x^2}{}''u(x,t)\,p_{t^2}{}''u(x,t)=e^{a}$ это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_{x^2}''u-(u_x')^2}{u^2}}e^{\frac{u_{t^2}''u-(u_t')^2}{u^2}}=e^{a}$, поэтому $u_{x^2}''u-(u_x')^2+u_{t^2}''u-(u_t')^2=au^2$

Пусть $\zeta=x-vt,\eta=1$, тогда $u_x'=u_\zeta',u_t'=-vu_\zeta',u_{t^2}''=v^2u_{\zeta^2}'',u_{x^2}''=u_{\zeta^2}'',u_{\zeta^2}''u-(u_\zeta')^2+v^2u_{\zeta^2}''u-v^2(u_\zeta')^2=au^2$

Пусть $u(\zeta)=e^{\varphi(\zeta)}$, отсюда $u_\zeta'=e^{\varphi}\varphi_\zeta',u_{\zeta^2}''=e^{\varphi}(\varphi_\zeta')^2+e^{\varphi}\varphi_{\zeta^2}''$ тогда $(1+v^2)u_{\zeta^2}''u-(1+v^2)(u_\zeta')^2=au^2,(1+v^2)\left(u_{\zeta^2}''u-(u_\zeta')^2\right)=au^2,\ (1+v^2)\left(e^{2\varphi}\left((\varphi')^2+\varphi''\right)-e^{2\varphi}(\varphi')^2\right)=ae^{2\varphi}$

$\Rightarrow(1+v^2)\varphi''=a\ ,\ \varphi''=\frac{a^2}{1+v^2},\varphi'=\frac{a^2\zeta}{1+v^2}+c_1,\ \varphi(\zeta)=\frac{a\zeta^2}{2(1+v^2)}+c_1\zeta+c_2$, откуда $u(x,t)=e^{\frac{a\zeta^2}{2(1+v^2)}+c_1\zeta+c_2}=e^{\frac{a(x-vt)^2}{2(1+v^2)}+c_1(x-vt)+c_2}=c_2e^{\frac{a(x-vt)^2}{2(1+v^2)}+c_1(x-vt)}$.

Пример . $p_{x^2}{}''u(x,y)\,p_{y^2}{}''u(x,y)=1$, это уравнение эквивалентно уравнению $e^{\frac{u_{x^2}''u-(u_x')^2}{u^2}}e^{\frac{u_{y^2}''u-(u_x')^2}{u^2}}=1$, $u_{x^2}''u-(u_x')^2+u_{y^2}''u-(u_y')^2=0$.

Пусть $u(x,y)=e^{\omega(x,y)}$, тогда $u_y'=e^{\omega}\omega_y'$, $u_x'=e^{\omega}\omega_x'$, $u_{x^2}''=e^{\omega}(\omega_x')^2+e^{\omega}\omega_{x^2}''$, $u_{y^2}''=e^{\omega}(\omega_y')^2+e^{\omega}\omega_{y^2}''$, тогда $\omega_{x^2}''+\omega_{y^2}''=0$ это уравнение Лапласа .

Дифференцируемая функция , которая удовлетворяет уравнению Лапласа является гармонической . Это уравнение эллиптического типа .

Найдем эти функции в виде $u=f(x^2+y^2)$, чтобы удовлетворяли уравнению . Пусть $t=x^2+y^2$, значит $u=f(t)$, $t=t(x,y)$, это дает

$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t)2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)2y$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+f'(t)\frac{\partial^2t}{\partial y^2}=f''(t)4y^2+f'(t)2$, $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+f'(t)\frac{\partial^2t}{\partial x^2}=f''(t)4x^2+f'(t)2$,

из этого следует $(u_y')^2+(u_x')^2=4(f'(t))^2(x^2+y^2)=4(f'(t))^2\,t$, $u_{x^2}''+u_{y^2}''=4f''(t)(y^2+x^2)+4f'(t)=4(f''(t)t+f'(t))$,

после подстановки найдем уравнение $(t)(f''(t)t+f'(t))-t(f'(t))^2=0$. Пусть $f(t)=e^{\phi(t)}$, получим $f'(t)=e^{\phi(t)}\phi'(t)$, $f''(t)=e^{\phi(t)}\left((\phi'(t))^2+\phi''(t)\right)$ значит $t\phi''(t)+\phi'(t)=0$.

Решение этого уравнения $\phi(t)=c+c_1\ln t$, откуда $f(t)=t^{c_1}c$, $u(x,y)=(y^2+x^2)^{c_1}c$.

Пример . $p_{x^n}{}^{(n)}u(x,y)\,p_{y^j}{}^{(j)}u(x,y)=f(x)g(y)$. Пусть $u(x,y)=e^{\omega(x,y)}$, тогда $p_x{}'u=e^{\omega_x{}'}$, $p_y{}'u=e^{\omega_y{}'}$, $p_{y^2}{}''u=e^{\omega_{y^2}{}''}$, $p_{x^2}{}''u=e^{\omega_{x^2}{}''}$, $p_{x^n}{}^{(n)}u=e^{\omega_{x^n}{}^{(n)}}$, $p_{y^j}{}^{(j)}u=e^{\omega_{y^j}{}^{(j)}}$, тогда

$\omega_{x^n}{}^{(n)}+\omega_{y^j}{}^{(j)}=f(x)g(y)$

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$, откуда $p_{x^n}{}^{(n)}u=p^{(n)}X(x)$, $p_{y^j}{}^{(j)}u=p^{(j)}Y(y)$, тогда $p^{(n)}X(x)\,p^{(j)}Y(y)=f(x)g(y)$,

тогда $\dfrac{p^{(n)}X(x)}{f(x)}=\dfrac{g(y)}{p^{(j)}Y(y)}=\lambda$, итак $\dfrac{p^{(n)}X(x)}{f(x)}=\lambda,\dfrac{g(y)}{p^{(j)}Y(y)}=\lambda$ решая эти два обыкновенных дифференциальных уравнения найдем функции $X(x),Y(y)$.

Пример . $p''_{x^2}\,u(x,y)\,p''_{y^2}\,u(x,y)=e^{x+y}$, это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $e^{\frac{u''_{xx}(x,y)u(x,y)-(u'_x(x,y))^2}{u^2(x,y)}}e^{\frac{u''_{yy}(x,y)u(x,y)-(u'_y(x,y))^2}{u^2(x,y)}}=e^{x+y}$,

$\dfrac{u''_{xx}(x,y)u(x,y)-(u'_x(x,y))^2}{u^2(x,y)}+\dfrac{u''_{yy}(x,y)u(x,y)-(u'_y(x,y))^2}{u^2(x,y)}=x+y$, $(u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y))u(x,y)-\left((u'_x(x,y))^2+(u'_y(x,y))^2\right)=(x+y)u^2(x,y)$.

Пусть $u(x,y)=e^{\omega(x,y)}$, тогда $u_y{}'=e^{\omega}\omega_y{}'$, $u_x{}'=e^{\omega}\omega_x{}'$, $u_{x^2}{}''=e^{\omega}\left(\omega_x{}'\right)^2+e^{\omega}\omega_{x^2}{}''$, $u_{y^2}{}''=e^{\omega}\left(\omega_y{}'\right)^2+e^{\omega}\omega_{y^2}{}''$ so $\omega_{y^2}{}''+\omega_{x^2}{}''=x+y$. Это уравнение эллиптического типа .

Рассмотрим функцию $u(x,y)=e^{x+y}$, найдем функцию $v(x,y)$ которая удовлетворяет условиям $p'_x\,u(x,y)\,p'_y\,v(x,y)=1$, $\dfrac{p'_y\,u(x,y)}{p'_x\,v(x,y)}=1$ отсюда ,

$u'_x(x,y)v(x,y)=-v'_y(x,y)u(x,y)$, $u'_y(x,y)v(x,y)=v'_x(x,y)u(x,y)$, поскольку $u'_x(x,y)=e^{x+y}$, из первого условия найдем $e^{x+y}v(x,y)=-v'_y(x,y)e^{x+y}$,

тогда $v(x,y)=-v'_y(x,y)$, $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}=-v(x,y)$, тогда $\ln|v(x,y)|=-y+\phi(x)$, где $\phi(x)$ произвольная функция , $v(x,y)=e^{-y+\phi(x)}$, значит $v'_x(x,y)=e^{-y+\phi(x)}\phi'(x)$,

из второго условия найдем $e^{x+y}e^{-y+\phi(x)}=e^{-y+\phi(x)}\phi'(x)e^{x+y}$, $\phi'(x)=1$, $\phi(x)=x+c$, итак $v(x,y)=e^{-y+x+c}$.

Пример . $p_{t^2}{}''u(x,y,t)=\left(p_{x^2}{}''u(x,y,t)\,p_{y^2}{}''u(x,y,t)\right)^a$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $e^{\frac{u_{t^2}{}''u-(u_t{}')^2}{u^2}}=e^{a^2\left(\frac{u_{x^2}{}''u-(u_x{}')^2}{u^2}+\frac{u_{y^2}{}''u-(u_y{}')^2}{u^2}\right)}$, получаем

$u_{t^2}{}''u-\left(u_t{}'\right)^2=a\left(u_{x^2}{}''u-\left(u_x{}'\right)^2+u_{y^2}{}''u-\left(u_y{}'\right)^2\right)$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,y,t)=e^{\omega(x,y,t)}$, тогда $u_t{}'=e^{\omega}\omega_t{}'$, $u_x{}'=e^{\omega}\omega_x{}'$, $u_y{}'=e^{\omega}\omega_y{}'$, $u_{y^2}{}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_y{}'\right)^2+\omega_{y^2}{}''\right)$,

$u_{x^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{x^2}''\right)$, $u_{t^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2 + \omega_{t^2}''\right)$, тогда $\omega_t' = a\left(\omega_{x^2}'' + \omega_{y^2}''\right)$ это однородное уравнение теплопроводности для прямоугольной области

$0 < x < r$, $0 < y < q$, $t > 0$, начальные условия $\omega(x, y, 0) = \phi(x, y)$, $\omega_t'(x, y, 0) = \mu(x, y)$, граничные условия $\omega(0, y, t) = 0$, $\omega(r, y, t) = 0$, $\omega(x, q, t) = 0$, $\omega(x, 0, t) = 0$.

Периодическое решение $\omega(x, y, t) = \sum_{m-1}^{\infty}\sum_{n-1}^{\infty}\left(A_{m,n}\cos\sqrt{\lambda_{m,n}}at + B_{m,n}\sin\sqrt{\lambda_{m,n}}at\right)\sigma_{m,n}(x, y)$, где $\sigma_{m,n}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{rq}}\sin\frac{m\pi}{r}x\sin\frac{n\pi}{q}y$, $A_{m,n} = \int_0^r\int_0^q \phi(x, y)\sigma_{m,n}(x, y)\,dxdy$,

$B_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{a\lambda_{m,n}}}\int_0^r\int_0^q \mu(x, y)\sigma_{m,n}(x, y)\,dxdy$, $\lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{r}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2$, итак периодическое решение данного уравнения $u(x, y, t) = e^{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{m,n}\cos\sqrt{\lambda_{m,n}}at + B_{m,n}\sin\sqrt{\lambda_{m,n}}at\right)\sigma_{m,n}(x,y)}$.

Пример . $p_{x^2}''u(x, y, z)\,p_{y^2}''u(x, y, z)\,p_{z^2}''u(x, y, z) = \left(f(x, y, z)\right)^{\frac{1}{u^2(x,y,z)}}$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению

$e^{\frac{u_{x^2}''u - \left(u_x'\right)^2}{u^2}}e^{\frac{u_{y^2}''u - \left(u_y'\right)^2}{u^2}}e^{\frac{u_{z^2}''u - \left(u_z'\right)^2}{u^2}} = \left(f(x, y, z)\right)^{\frac{1}{u^2(x,y,z)}}$, поэтому $\left(u_{x^2}''u - \left(u_x'\right)^2\right) + \left(u_{y^2}''u - \left(u_y'\right)^2\right) + \left(u_{z^2}''u - \left(u_z'\right)^2\right) = \ln f(x, y, z)$. Решение этого уравнения найдем в виде

$u(x, y.z) = e^{\omega(x,y,z)}$, тогда $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_y' = e^{\omega}\omega_y'$, $u_z' = e^{\omega}\omega_z'$, $u_{z^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_z'\right)^2 + \omega_{z^2}''\right)$, $u_{y^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y'\right)^2 + \omega_{y^2}''\right)$, $u_{x^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{x^2}''\right)$,

тогда $\omega_{x^2}'' + \omega_{y^2}'' + \omega_{z^2}'' = \ln f(x, y, z)$ это уравнение Пуассона .

Пример . $p_{x^2}''u(x, y, z, t)\,p_{y^2}''u(x, y, z, t)\,p_{z^2}''u(x, y, z, t)\left(p_{t^2}''u(x, y, z, t)\right)^{-a^2} = f\left(u(x, y, z, t)\right)$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению

$e^{\frac{u_{x^2}''u - \left(u_x'\right)^2}{u^2}}e^{\frac{u_{y^2}''u - \left(u_y'\right)^2}{u^2}}e^{\frac{u_{z^2}''u - \left(u_z'\right)^2}{u^2}}e^{-a^2\frac{u_{t^2}''u - \left(u_t'\right)^2}{u^2}} = f(u)$, итак $\left(u_{x^2}''u - \left(u_x'\right)^2\right) + \left(u_{y^2}''u - \left(u_y'\right)^2\right) + \left(u_{z^2}''u - \left(u_z'\right)^2\right) - a^2\left(u_{t^2}''u - \left(u_t'\right)^2\right) = u^2\ln f(u)$.

Решение этого уравнения найдем в виде $u(x, y, z, t) = e^{\omega(x,y,z,t)}$, отсюда $u_x' = e^{\omega}\omega_x'$, $u_y' = e^{\omega}\omega_y'$, $u_z' = e^{\omega}\omega_z'$, $u_t' = e^{\omega}\omega_t'$, $u_{x^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_x'\right)^2 + \omega_{x^2}''\right)$, $u_{y^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_y'\right)^2 + \omega_{y^2}''\right)$,

$u_{z^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_z'\right)^2 + \omega_{z^2}''\right)$, $u_{t^2}'' = e^{\omega}\left(\left(\omega_t'\right)^2 + \omega_{t^2}''\right)$, откуда $\omega_{x^2}'' + \omega_{y^2}'' + \omega_{z^2}'' - a^2\omega_{t^2}'' = \ln f\left(e^{\omega}\right)$, это нелинейное уравнение Клейна Гордона .

Пример . $\left(p_{t^2}{}''u(x,t)\right)^{\alpha}\left(p_t{}'u(x,t)\right)^{\beta}=\left(\frac{1}{u(x,t)}\right)^{\gamma}p_{x^2}{}''u(x,t)$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $e^{\alpha\frac{u_{t^2}{}''u-\left(u_t{}'\right)^2}{u^2}}e^{\beta\frac{u_t{}'}{u}}=e^{\gamma\ln\frac{1}{u}}e^{\frac{u_{x^2}{}''u-\left(u_x{}'\right)^2}{u^2}}$,

тогда $\alpha\left(u_{t^2}{}''u-\left(u_t{}'\right)^2\right)+\beta uu_t{}'=\gamma u^2\ln\frac{1}{u}+u_{x^2}{}''u-\left(u_x{}'\right)^2$ Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t{}'=e^{\omega}\omega_t{}'$, $u_x{}'=e^{\omega}\omega_x{}'$,

$u_{x^2}{}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x{}'\right)^2+\omega_{x^2}{}''\right)$, $u_{t^2}{}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t{}'\right)^2+\omega_{t^2}{}''\right)$, откуда $\alpha\omega_{t^2}{}''+\beta\omega_t{}'=-\gamma\omega+\omega_{x^2}{}''$ это телеграфное уравнение .

Пусть $u(x,t)=T(t)X(x)$, итак $\left(p_{t^2}{}''T(t)\right)^{\alpha}\left(p_t{}'T(t)\right)^{\beta}=\left(\frac{1}{T(t)X(x)}\right)^{\gamma}p_{x^2}{}''X(x)$, $\left(p_{t^2}{}''T(t)\right)^{\alpha}\left(p_t{}'T(t)\right)^{\beta}\left(T(t)\right)^{\gamma}=\left(\frac{1}{X(x)}\right)^{\gamma}p_{x^2}{}''X(x)=\lambda$,

решая эти два дифференциальных уравнения , получим решение телеграфного уравнения .

Пример . $\left(p_t{}'u\right)^{j\hbar}=\left(p_{x^2}{}''u\right)^{-\frac{\hbar^2}{2m}}u^{F(x)}$ это уравнение эквивалентно следующему дифференциальному уравнению $\left(e^{\frac{u_t{}'}{u}}\right)^{j\hbar}=\left(e^{\frac{u_{x^2}{}''u-\left(u_x{}'\right)^2}{u^2}}\right)^{-\frac{\hbar^2}{2m}}e^{F(x)\ln u}$,

значит $j\hbar u_t{}'=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(u_{x^2}{}''u-\left(u_x{}'\right)^2\right)+F(x)u^2\ln u$. Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=e^{\omega(x,t)}$, тогда $u_t{}'=e^{\omega}\omega_t{}'$, $u_x{}'=e^{\omega}\omega_x{}'$,

$u_{x^2}{}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_x{}'\right)^2+\omega_{x^2}{}''\right)$, $u_{t^2}{}''=e^{\omega}\left(\left(\omega_t{}'\right)^2+\omega_{t^2}{}''\right)$, тогда $j\hbar\omega_t{}'=-\frac{\hbar^2}{2m}\omega_{x^2}{}''+F(x)\omega$ это стационарное уравнение Шредингера ,

где m это масса частицы , $F(x)$ это потенциальная энергия , $\omega(x,t)$ это волновая функция

Пусть $F(x)=0$, итак $\left(p_t{}'u\right)^{j\hbar}=\left(p_{x^2}{}''u\right)^{-\frac{\hbar^2}{2m}}$, Решение этого уравнения найдем в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$, отсюда

$\left(p_t{}'T(t)\right)^{j\hbar}=\left(p_{x^2}{}''X(x)\right)^{-\frac{\hbar^2}{2m}}=\lambda$ решая эти два уравнения найдем $X(x)=c_2e^{c_1x}\lambda^{-\frac{m}{\hbar^2}x^2}$, $T(t)=c\lambda^{-\frac{j}{\hbar}t}$, поэтому $u(x,t)=ce^{c_1x}\lambda^{-\frac{j\hbar t+mx^2}{\hbar^2}}$, тогда $ce^{c_1x}\lambda^{-\frac{j\hbar t+mx^2}{\hbar^2}}=e^{\omega(x,t)}$,

тогда $\omega(x,t)=\ln c+c_1x-\frac{j\hbar t+mx^2}{\hbar^2}\ln\lambda$ это частное решение уравнения Шредингера где интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x,t)\,dx$ сходиться .