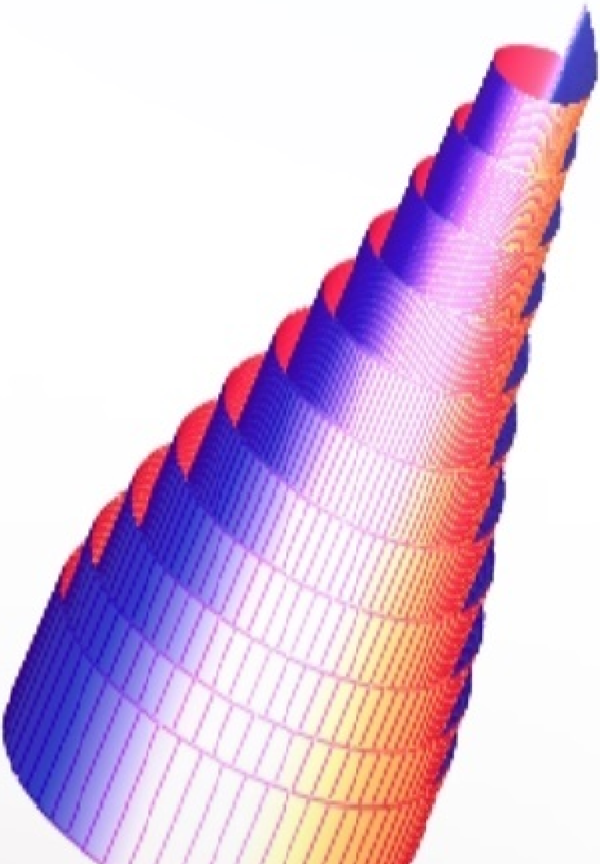
Boris Khlebopros

Non linear differential equation



2019

(R.S.T)

p производная ее свойства

Геометрический смысл p производной

Теорема Лагранжа для p производной

p производная высшего порядка

p производная функции нескольких переменных

Неопределенный P интеграл его свойства

Определенный P интеграл его свойства

Интегральные неравенства

Геометрические приложения P интеграла

Несобственные P интегралы

P интеграл с переменным верхним пределом

Обыкновенные p дифференциальные уравнения первого порядка

p дифференциальные уравнения высшего порядка

Линейные p дифференциальные уравнения

Системы p дифференциальных уравнений

p дифференциальные уравнения с частными производными

p производная в комплексной плоскости

L производная ее свойства

Геометрический смысл L производной

Теорема Лагранжа для L производной

L производная высшего порядка

L производная функции нескольких переменных

Неопределенный L интеграл его свойства

Определенный L интеграл его свойства
Геометрические приложения L интеграла
L интеграл с переменным верхним пределом
Несобственные L интегралы
Обыкновенные L дифференциальные уравнения первого порядка
L дифференциальные уравнения высшего порядка
Линейные L дифференциальные уравнения
Системы L дифференциальных уравнений
L дифференциальные уравнения с частными производными
L интегральные уравнения

B производная ее свойства
B производная высшего порядка
B производная функции нескольких переменных
Неопределенный B интеграл его свойства
Определенный B интеграл его свойства
Обыкновенные B дифференциальные уравнения первого порядка
B дифференциальные уравнения высшего порядка
B дифференциальные уравнения с частными производными
B интегральные уравнения

G производная ее свойства
G дифференциальные уравнения
Дифференциальные , интегральные операторы
Бесконечное произведение
Атрактор

richgame7@gmail.com

boriskh@mail.ru

khlebopros@yandex.ru

rishgame7@gmail.com

facebook boris mrgame

instagram mrgame boris

youtube boris khlebopros

whatsapp

viber

050 3258679

p производная , ее свойства .

Пусть $y = f(x)$ непрерывная функция .

Мы будем называть p производной функции $y = f(x)$ выражение $p'\,f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$.

(По вопросу обозначений смотрите литературу в конце книги).

Свойства p производной .

$p'\,f(x) > 0$.

$p'\,c = 1$, $c \neq 0$. Доказательство . $p'\,c = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{c}{c}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1^{\infty} = 1$. Определим $p'0 = 1$.

$p'\,cf(x) = p'\,f(x)$. Доказательство . $p'\,cf(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{cf(x+\Delta x)}{cf(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = p'\,f(x)$.

$p'(f(x)g(x)) = p'\,f(x)p'\,g(x)$. Доказательство . $p'(f(x)g(x)) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)}{f(x)g(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{g(x+\Delta x)}{g(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = p'\,f(x)p'\,g(x)$.

$p'\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{p'\,f(x)}{p'\,g(x)}$. Доказательство . $p'\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \dfrac{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{g(x+\Delta x)}{g(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}} = \dfrac{p'\,f(x)}{p'\,g(x)}$.

$p'\,f(x)^{g(x)} = (p'\,f(x))^{g(x)}\,f(x)^{g'(x)}$. Доказательство . $p'\,f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)^{g(x+\Delta x)}}{f(x)^{g(x)}}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)^{g(x+\Delta x)}}{f(x)^{g(x)-g(x+\Delta x)}\,f(x)^{g(x+\Delta x)}}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\dfrac{f(x+\Delta x)^{g(x+\Delta x)}}{f(x)^{g(x+\Delta x)}}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(f(x)^{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}\right) =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\left(\dfrac{f(x+\Delta x}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)^{g(x+\Delta x)} \bullet f(x)^{g'(x)} = (p'\,f(x))^{g(x)} \bullet f(x)^{g'(x)}$

$p'\sqrt[g(x)]{f(x)} = f(x)^{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}\sqrt[g(x)]{p' f(x)}$. Доказательство $p'\sqrt[g(x)]{f(x)} = p' f(x)^{\frac{1}{g(x)}} = \left(p' f(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} f(x)^{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} = f(x)^{\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}\sqrt[g(x)]{p' f(x)}$.

$p' f(x) = e^{\frac{d\ln|f(x)|}{dx}} = e^{(\ln f(x))'} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$.

Доказательство $p' f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} e^{\ln\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}} = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)} = e^{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\ln|f(x+\Delta x)|-\ln|f(x)|}{\Delta x}} = e^{(\ln f(x))'} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)+f(x_0)}{f(x_0)}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{f(x_0)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{f(x_0)}\right)^{\frac{f(x_0)}{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}}\right)^{\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{f(x_0)}n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{n}}\frac{1}{f(x_0)}} = e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}} = p'f(x_0) \ .$$

$p'\left(f(x)\cdot g(x)\right) = e^{\frac{f'(x)g(x)+g'(x)f(x)}{f(x)g(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}\cdot e^{\frac{g'(x)}{g(x)}} = p' f(x)\cdot p' g(x)$, $p'\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{p' f(x)}{p' g(x)}$.

$$p'\left(f(x)+g(x)\right) = e^{\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)+g(x)}+\frac{g'(x)}{f(x)+g(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} e^{\frac{g'(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}} = e^{\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}} e^{\left(\frac{g'(x)}{g(x)}\right)\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}} = \left(p' f(x)\right)^{\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}}\left(p' g(x)\right)^{\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}} \ .$$

$$p'\left(f(x)-g(x)\right) = p'\left(f(x)+\left(-g(x)\right)\right) = p'\left(f(x)\right)^{\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}} p'\left(-g(x)\right)^{\frac{-g(x)}{f(x)-g(x)}} = \frac{p'\left(f(x)\right)^{\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}}}{p'\left(g(x)\right)^{\frac{g(x)}{f(x)-g(x)}}} \ .$$

Пусть функция $u = g(x)$ имеет производную в точке x_0 , то есть $u_x' = g'(x_0)$, функция $y = f(u)$ имеет в точке $u_0 = g(x_0)$ производную $y_u' = f'(u_0)$, поэтому сложная функция $y = f(g(x))$ будет иметь x_0 производную равную $\left(f(g(x))\right)' = f_u'(g(x_0))\, g'(x_0)$, то есть $y_x' = y_u' u_x'$, значит $p'f(g(x)) = e^{\frac{(f(g(x)))'}{f(g(x))}} = e^{\frac{f_u'(g(x_0))g'(x_0)}{f(g(x_0))}} = \left(p_u' f(g(x_0))\right)^{g'(x_0)}$, то есть $p_x y = \left(p_u' y\right)^{u_x'}$. $p_x' f(nx) = \left(p_u' f(nx)\right)^n$, где $u = nx$.

$$p' \ln f(x) = e^{\frac{(\ln f(x))'}{\ln f(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)\ln f(x)}},\ p' \log_a f(x) = e^{\frac{(\log_a f(x))'}{\log_a f(x)}} = e^{\frac{f'(x)}{f(x)\ln a \log_a f(x)}},$$

$$p' \sin x = e^{\frac{(\sin x)'}{\sin x}} = e^{\frac{\cos x}{\sin x}} = e^{ctgx},\ p' \cos x = e^{\frac{(\cos x)'}{\cos x}} = e^{\frac{-\sin x}{\cos x}} = e^{-tgx},$$

$$p' tgx = e^{\frac{(tgx)'}{tgx}} = e^{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx}} = e^{\frac{\cos x}{\cos^2 x \sin x}} = e^{\frac{2}{\sin 2x}},\ p' ctgx = e^{\frac{(ctgx)'}{ctgx}} = e^{\frac{\frac{-1}{\sin^2 x}}{ctgx}} = e^{\frac{-\sin x}{\sin^2 x \cos x}} = e^{\frac{-2}{\sin 2x}},$$

$$p' chx = e^{\frac{(chx)'}{chx}} = e^{thx},\ p' thx = e^{\frac{(thx)'}{thx}} = e^{\frac{chx}{ch^2 x shx}} = e^{\frac{1}{chxshx}} = e^{\frac{2}{sh2x}},$$

$$p' cthx = e^{\frac{(cthx)'}{cthx}} = e^{\frac{shx}{-sh^2 x chx}} = e^{\frac{1}{-shxchx}} = e^{\frac{-2}{sh2x}},\ p'x^n = e^{\frac{(x^n)'}{x^n}} = e^{\frac{nx^{n-1}}{x^n}} = e^{\frac{n}{x}},\ x \neq 0,$$

$$p' x^{nx} e^{-nx} = e^{\frac{(x^{nx}e^{-nx})'}{x^{nx}e^{-nx}}} = e^{\frac{x^{nx} n(1+\ln x)e^{-nx} - nx^{nx}e^{-nx}}{x^{nx}e^{-nx}}} = e^{n+n\ln x-n} = e^{n\ln x} = x^n,\ p'a^x = e^{\frac{(a^x)'}{a^x}} = e^{\frac{a^x \ln a}{a^x}} = e^{\ln a} = a,$$

$$p'a^{g(x)} = e^{\frac{\left(a^{g(x)}\right)'}{a^{g(x)}}} = e^{\frac{\left(a^{g(x)}\ln a\right)g'(x)}{a^{g(x)}}} = \left(e^{\ln a}\right)^{g'(x)} = a^{g'(x)},\ p'f(x)^a = e^{\frac{af(x)^{a-1}f'(x)}{f(x)^a}} = e^{\frac{af'(x)}{f(x)}} = \left(p'f(x)\right)^a,$$

$$p'x^x = (p'x)^x (x)^{x'} = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^x x = ex,\ p'x^x = e^{\frac{(x^x)'}{x^x}} = e^{\frac{x^x(\ln x+1)}{x^x}} = e^{\ln x+1} = ex,$$

$$f(x) = |x| + 1,\ x = 0,\ \lim_{\Delta x \to -0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to -0}\left(\frac{|\Delta x|+1}{1}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to -0}\left(|\Delta x|+1\right)^{\frac{1}{-|\Delta x|}} = e^{-1} = \frac{1}{e},\ \lim_{\Delta x \to +0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to +0}\left(\frac{|\Delta x|+1}{1}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to +0}\left(|\Delta x|+1\right)^{\frac{1}{|\Delta x|}} = e.$$

$p''f(x)^a = p'\left(p'f(x)^a\right) = p'\left(\left(p'f(x)\right)^a\right) = \left(p'\left(p'f(x)\right)\right)^a = \left(p''f(x)\right)^a$,

$p^{(n)}f(x)^a = \left(p^{(n)}f(x)\right)^a$, $p'c = e^{\frac{c'}{c}} = e^0 = 1$.

Пусть $p'f(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = e^{C^{e^x}} = C^{e^x}$.

Геометрический смысл p производной .

Пусть $y = f(x)$ непрерывная функция , $f'(x_0) = \tan\alpha = k$, где α угол наклона касательной к графику функции $f(x)$, k это уголовой коэффициэнт касательной в точке x_0 .

Пусть $u(x) = \ln f(x)$, поэтому $u'(x) = \left(\ln f(x)\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $u'(x_0) = \left(\ln f(x_0)\right)' = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \tan\gamma = k_{\ln}$, где γ угол наклона касательной к графику функции $u(x) = \ln f(x)$,

в точке касания $u(x_0) = \ln f(x_0)$, $k_{\ln}$ уголовой коэффициэнт этой касательной в точке x_0 . Отсюда $p'f(x_0) = e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}} = e^{k_{\ln}}$, откуда $\ln p'f(x_0) = k_{\ln}$, логарифм p производной функции $y = f(x)$ в точке касания x_0 равен угловому коэффициенту $k_{\ln}$ касательной к графику функции $u(x) = \ln f(x)$ в точке касания $u(x_0) = \ln f(x_0)$.

Это дает $k = f'(x_0)$, $k_{\ln} = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{k}{f(x_0)}$, то есть $\ln p'f(x_0) = \dfrac{k}{f(x_0)}$.

Пример . $y = x^2$, $x_0 = 2$, $k = y'(2) = 4$, $u(x) = \ln x^2 = 2\ln x$, $u'(x) = \dfrac{2}{x}$, $k_{\ln} = u'(2) = 1$, $k_{\ln} = \dfrac{k}{y(2)} = 1$, $p'y(x) = e^{\frac{2x}{x^2}} = e^{\frac{2}{x}}$, $p'y(2) = e^{\frac{2}{2}} = e$, $\ln p'y(2) = 1$.

Пусть x_0 точка , такая что $k = k_{\ln}$. Отсюда $k = f'(x_0)$, $k_{\ln} = \ln p'f(x_0) = \ln e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}} = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} \Rightarrow f'(x_0)\left(1 - \dfrac{1}{f(x_0)}\right) = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$.

Пример . $f(x) = \tan(x)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $k = f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$, $u(x) = \ln\tan(x)$, $k_{\ln} = u'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2$, $k_{\ln} = \dfrac{k}{\tan\frac{\pi}{4}} = 2$, $y_k(x) = 2x + 1 - \dfrac{\pi}{2}$, $y_{k_{\ln}}(x) = 2x - \dfrac{\pi}{2}$, но p производная данной функции $u(x)$ в точке x_0 не существует , поскольку $p'u(x)=e^{\frac{(\ln\tan(x))'}{\ln\tan(x)}}=e^{\frac{\frac{1}{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}}{\ln\tan(x)}}$, $p'u\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{2}{0}}=e^{\infty}=\infty$.

Пусть $y=f(x)$ непрерывная функция , $g(x)=\ln f(x)$. По теореме Лагранжа для the функции $g(x)$ получим $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$, потому что $g'(x)=(\ln f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$,

мы найдем $\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$, $\dfrac{\ln\frac{f(b)}{f(a)}}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{f(c)}$, $p'f(x)=e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln p'f(x)$, итак $\dfrac{1}{b-a}\ln\dfrac{f(b)}{f(a)}=\ln p'f(c)\ \Rightarrow\ p'f(c)=e^{\frac{1}{b-a}\ln\frac{f(b)}{f(a)}}=e^{\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{b-a}}}$,

окончательно $p'f(c)=\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{b-a}}$.

Функция задана параметрически $y=\phi(t)\quad x=\varphi(t)\quad t=\varphi^{-1}(x)\ \Rightarrow\ y=\phi(\varphi^{-1}(x))\quad y'_x=\phi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))'=\phi'(t)\dfrac{1}{\varphi'(t)}=\dfrac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$,

$p'\,y=p'\left(\phi(\varphi^{-1}(x))\right)=p'\left(\phi(\varphi^{-1}(x))\right)^{(\varphi^{-1}(x))'}=(p'\,\phi(t))^{\frac{1}{\varphi(t)}}\quad p'\,\varphi(t)=e^{\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}}\ \Rightarrow\ \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\ln p'\,\varphi(t)\quad \varphi'(\mathrm{t})=\varphi(t)\ln p'\,\varphi(t)\ \Rightarrow\ p'\,y=(p'\,\phi(t))^{\frac{1}{\varphi(t)\ln p'\varphi(t)}}$.

Пример . $y=\phi(t)=\sin t\quad x=\varphi(t)=\cos t\quad p'\,y=(p'\sin t)^{\frac{1}{\cos t\ln p'\cos t}}=\left(e^{ctgt}\right)^{\frac{1}{\cos t\ln e^{-tgt}}}=e^{\frac{-ctgt}{\cos t\ tgt}}=e^{-\frac{\cos t\ \cos t}{\cos t\ \sin t\ \sin t}}=e^{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}}=e^{-\frac{\cos t}{1-\cos^2 t}}=e^{-\frac{x}{1-x^2}}=e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Пример . $x^2+y^2=1$, $y^2=1-x^2$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $p'_x\,y=p'\sqrt{1-x^2}=e^{\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}}=e^{-\frac{x}{1-x^2}}=e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Пример . $yx=1 \ \ p'(yx)=p'1 \ \ p'\,yp'\,x=1 \ \ p'\,y=\frac{1}{p'\,x}=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \ \ y=\frac{1}{x} \ \ p'\,\frac{1}{x}=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$.

$y=f(x)$, $x=g(y)$, $f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$, $p'\,f(x)=e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, $p'\,f(x)=e^{\frac{1}{g'(y)f(x)}}=e^{\frac{1}{g'(y)y}}$

$p'\,g(y)=e^{\frac{g'(y)}{g(y)}} \ \Rightarrow \ \frac{g'(y)}{g(y)}=\ln p'\,g(y),\ \ g'(y)=g(y)\ln p'\,g(y) \ \Rightarrow \ p'\,f(x)=e^{\frac{1}{yg(y)\ln p'\,g(y)}}$, $p'\,g(y)=e^{\frac{1}{xf(x)\ln p'\,f(x)}}$

Пример . $y=f(x)=e^x \ \ x=g(y)=\ln y \ \ p'\ln y=e^{\frac{1}{xe^x \ln p'\,e^x}}=e^{\frac{1}{xe^x \ln e}}=e^{\frac{1}{\ln y\ y\ 1}}=e^{\frac{1}{\ln y\ y}}$

Пусть функция $f(x)$ имеет симметричную область определения .

Производная четной функции нечетная функция . Доказательство .

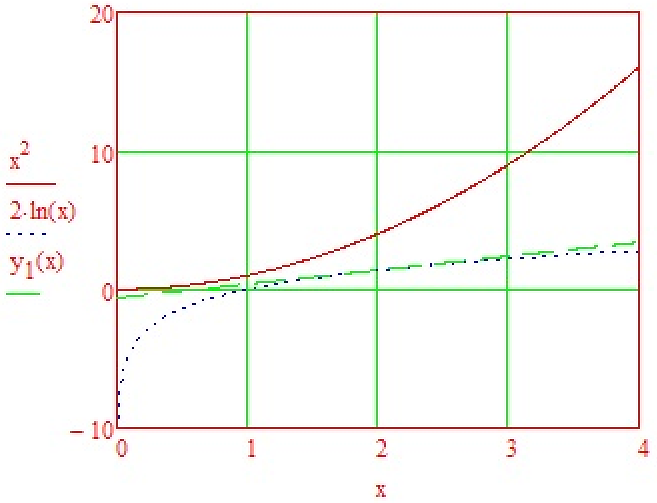
$$f'(-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0-\Delta x)-f(-x_0)}{-\Delta x}=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-f'(x_0) \ .$$

+ Geometric sense of the p-derivative

$y = f(x)$ Let $g(x) = \ln(f(x)) \Rightarrow g'(x) = (\ln(y))' = \frac{y'}{y} = tg(\gamma) = k_{ln}$ where γ is the angle of inclination of the tangent for function $g(x)$

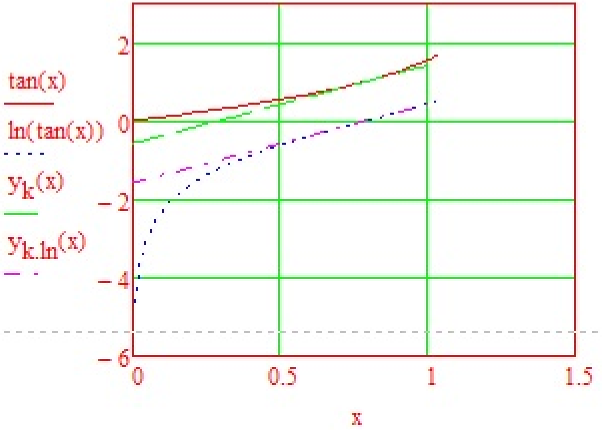
and k_{ln} is angular coefficient of this tangent Then $p'f(x) = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^{k_{ln}} \Rightarrow \ln(p'(f(x))) = k_{ln}$

Example $y = x^2$ $x_0 = 2$ $g(x) = \ln(x^2) = 2 \cdot \ln x$ $(x > 0)$ $g'(x) = \frac{2}{x}$ $k_{ln} = g'(2) = 1$ The tangent is $y_1(x) := x - 2 + 2\ln(2)$ $x := 0, 0.01 .. 4$



Let x_0 point such that $k = k_{ln}$ where k is the angular coefficient of the function $y = f(x)$ Then $f'(x) = \ln(p'(f(x_0)))$ $\Rightarrow$ $f(x_0) = 1$

Example $x := 0, 0.01 .. \frac{\pi}{3}$ $y = \tan(x)$ $g(x) = \ln(\tan(x))$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ $y_k(x) := 2 \cdot x + 1 - \frac{\pi}{2}$ $y_{k.ln}(x) := 2 \cdot x - \frac{\pi}{2}$



Другое доказательство . $f\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-f\left(x\right)+f\left(x_0\right)}{-x+x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-f\left(-x\right)+f\left(-x_0\right)}{-x+x_0}=-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(-x\right)-f\left(-x_0\right)}{\left(-x\right)-\left(-x_0\right)}=-f'\left(x_0\right)$.

Другое доказательство . Мы рассмотрим функцию $g\left(x\right)=-x=\left(-1\right)x$, это дает $f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$, дифференцируем обе части $\dfrac{df\left(g\left(x\right)\right)}{dx}=\dfrac{df\left(x\right)}{dx}$.Теперь применим правило дифференцирования сложной функции $\dfrac{df\left(g\left(x\right)\right)}{dx}=\dfrac{df\left(g\right)}{dg}\dfrac{dg\left(x\right)}{dx}=\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}\dfrac{d\left(-1x\right)}{dx}=$

$=\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}\left(-1\right)=-\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}$, отсюда получим $-\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}=\dfrac{df\left(x\right)}{dx}$.

Производная нечетной функции четная функция . Доказательство .

$$f'\left(-x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(-x_0+\Delta x\right)-f\left(-x_0\right)}{\Delta x}=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f\left(-x_0-\Delta x\right)-f\left(-x_0\right)}{-\Delta x}=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{-\left(f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right)}{-\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)\ .$$

Другое доказательство . $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{-f\left(x\right)+f\left(x_0\right)}{-x+x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(-x\right)-f\left(-x_0\right)}{\left(-x\right)-\left(-x_0\right)}=f'\left(-x_0\right)$.

Другое доказательство . Мы рассмотрим функцию $g\left(x\right)=-x=\left(-1\right)x$, это дает $f\left(g\left(x\right)\right)=\left(-1\right)f\left(x\right)$, дифференцируем обе части $\dfrac{df\left(g\left(x\right)\right)}{dx}=\dfrac{d\left(-1\right)f\left(x\right)}{dx}=-1\dfrac{df\left(x\right)}{dx}$. Теперь применим правило дифференцирования сложной функции $\dfrac{df\left(g\left(x\right)\right)}{dx}=\dfrac{df\left(g\right)}{dg}\dfrac{dg\left(x\right)}{dx}=$

$=\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}\dfrac{d\left(-1x\right)}{dx}=-\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}$, отсюда получим $-\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}=-\dfrac{df\left(x\right)}{dx}$, $\dfrac{df\left(-x\right)}{dx}=\dfrac{df\left(x\right)}{dx}$.

$f_{even}\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+f\left(-x\right)}{2}$, $f_{odd}\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-f\left(-x\right)}{2}$, $f\left(x\right)=f_{odd}\left(x\right)+f_{even}\left(x\right)$.

Пусть функция $f\left(x\right)$ нечетная , $f\left(0\right)=0$. Доказательство . Поскольку функция $f\left(x\right)$ нечетная , то $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$, подставим $x=0$, найдем $f\left(0\right)=-f\left(0\right)$, значит $f\left(0\right)=0$.

Пусть функция $f(x)$ нечетная , тогда $p'f(-x)=e^{\frac{f'(-x)}{f(-x)}}=e^{\frac{f'(x)}{-f(x)}}=\frac{1}{e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}}=\frac{1}{p'f(x)}$.

Пусть функция $f(x)$ четная , тогда $p'f(-x)=e^{\frac{f'(-x)}{f(-x)}}=e^{\frac{-f'(x)}{f(x)}}=\frac{1}{e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}}=\frac{1}{p'f(x)}$.

$$p^n f(x)=p'\left(p^{n-1}f(x)\right) \quad p'' f(x)=p'\left(p' f(x)\right)=p'\left(e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}\right)=e^{\frac{e^{\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'}}{e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}}}=e^{\frac{e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'}{e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}}}=e^{\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'}=e^{\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}}$$

Пусть функция $f(x)>0$ непрерывна for every $x\in(a,b)$.

Пусть $p'f(x)\le 1$ для любого $x\in(a,b)$, тогда функция $f(x)$ убывающая .

Пусть $p'f(x)\ge 1$ для любого $x\in(a,b)$, тогда функция $f(x)$ возрастающая .

Пусть функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке $x_0\in(a,b)$, тогда $p'f(x_0)=1$, если $p''f(x_0)>1$, тогда функция $f(x)$ имеет локальный минимум , если $p''f(x_0)<1$, тогда функция $f(x)$ имеет локальный максимум .

$$p' f(x)=e^{\frac{d(\ln f(x))}{dx}}=e^{\frac{d}{dx}\ln f(x)} \quad , p'' f(x)=p'\left(e^{\frac{d(\ln f(x))}{dx}}\right)=e^{\frac{d}{dx}\left(\ln e^{\frac{d(\ln f(x))}{dx}}\right)}=e^{\frac{d}{dx}\left(\frac{d(\ln f(x))}{dx}\right)}=e^{\frac{d^2(\ln f(x))}{dx^2}} \quad ,$$

$p^{(n)} f(x)=e^{\frac{d^{(n)}(\ln f(x))}{dx^n}}$, где $n=0$, 1 , 2 , .. , если $n=0$ получим $p^{(0)} f(x)=e^{\frac{d^{(0)}(\ln f(x))}{dx^0}}$, то есть $f(x)=e^{\ln f(x)}$, $p'''f(x)=e^{\frac{f'''(x)f^2(x)-3f''(x)f'(x)f(x)+2(f'(x))^3}{f^3(x)}}$.

$$p'' x^n=e^{\frac{(x^n)''x^n-((x^n)')^2}{x^{2n}}}=e^{\frac{n(n-1)x^{2n-2}-n^2x^{2n-2}}{x^{2n}}}=e^{\frac{x^{2n-2}(-n)}{x^{2n}}}=e^{-\frac{n}{x^2}},\ p^{(k)}x^n=e^{(-1)^{k+1}\frac{n}{x^k}} .$$

$(\ln f(x))'=\ln p' f(x)$. Доказательство . $p' f(x)=e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\ln p' f(x) \quad (\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $\frac{d^n \ln f(x)}{dx^n}=\ln p^n f(x)$

Пример . $\begin{cases} p'x(t)=x(t) \\ p'y(t)=\frac{1}{y(t)} \end{cases}$, откуда получим $\begin{cases} e^{\frac{x'(t)}{x(t)}}=x(t) \\ e^{\frac{y'(t)}{y(t)}}=\frac{1}{y(t)} \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{dx}{x(t)\ln x(t)}=dt \\ \frac{dy}{y(t)\ln y(t)}=-dt \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} x(t)=e^{c_1e^t} \\ y(t)=e^{c_2e^{-t}} \end{cases}$. Пусть $x(1)=e$, $y(1)=e$, значит

$c_1 = \frac{1}{e}$, $c_2 = e$, итак $\begin{cases} x(t) = e^{e^{t-1}} \\ y(t) = e^{e^{1-t}} \end{cases}$, $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

Пусть $\Delta_p y = \frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}$. Поскольку $p'f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0+\Delta x)}{f(x_0)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}$ то $\left(\frac{f(x_0+\Delta x)}{f(x_0)} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = p'f(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Отсюда следует что $\ln\left(\Delta_p f(x_0)\right) = \Delta x \ln\left(\frac{1}{p'f(x_0)} \left(1 + \frac{\varepsilon(\Delta x)}{p'f(x_0)} \right) \right) = A\Delta x + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon(\Delta x)}{p'f(x_0)} \right)$, где $A = -\ln\left(p'\left(f(x_0)\right)\right)$

p дифференциал функции $f(x)$ дадим так $d_p f(x_0) = -\ln\left(p'f(x_0)\right)\Delta x = -\ln\left(p'f(x_0)\right)dx \Rightarrow d_p x(x = x_0) = -\frac{\Delta x}{x_0}$, тогда $dx = -x d_p x$,

$d_p f(x) = x\ln\left(p'f(x)\right) d_p x$ $d_p f(x) = d_p y = \frac{-dy}{y}$ $d_p\left(Cf(x)\right) = d_p f(x)$, $d_p\left(u(x)v(x)\right) = -\ln\left(p'\left(u(x)v(x)\right)\right)dx = -\ln\left(p'u(x)\, p'v(x)\right)dx =$

$= -\left(\ln\left(p'u(x)\right) + \ln\left(p'v(x)\right)\right)dx = -\left(d_p u(x) + d_p v(x)\right)$, $d_p^{\,2} f(x) = d_p\left(d_p f(x)\right) = d_p\left(-\ln\left(p'f(x)\,dx\right)\right) = d_p\left(-\ln\left(e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} \right) dx \right) =$

$= d_p\left(\frac{-f'(x)}{f(x)} dx \right) = d_p\left(\frac{f'(x)}{f(x)} dx \right) = -\ln\left(p' \frac{f'(x)}{f(x)} \right) dx = -\ln\left(e^{\frac{\frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}}{\frac{f'(x)}{f(x)}}} \right) dx = \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{f'(x)f(x)} dx$.

Пусть $y = \varphi\left(\phi(x)\right) = f(x)$ $y = \varphi(u)$ $u = \phi(x)$. Поэтому $d_p f(x) = d_p y = -\frac{dy}{y} = -\frac{y'_x dx}{y(x)} = -\frac{y'_u du}{y(u)}$, $d_p^{\,2} y = \frac{\varphi''(u)\phi(u) - (\varphi'(u))^2}{\varphi'(u)\phi(u)} du + d^2 u$.

p производная функции нескольких переменных .

Пусть $z = u(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ непрерывная функция . Определение $p' u_{x_j} = \lim\limits_{\Delta x_j \to 0} \left(\dfrac{u(x_1, \ldots\ldots, x_j + \Delta x_j, \ldots\ldots, x_n)}{u(x_1, \ldots\ldots, x_j, \ldots\ldots, x_n)} \right)^{\frac{1}{\Delta x_j}}$

$$p' u_{x_j} = e^{\frac{u'_{x_j}}{u}} \Rightarrow \left(p' u_{x_j} \right)^{u_{x_i}} = \left(p' u_{x_i} \right)^{u_{x_j}}$$

Для функции $u(x, y)$ имеем $p'_x\, u(x, y) = e^{\frac{u'_x(x,y)}{u(x,y)}}$, $p'_y\, u(x, y) = e^{\frac{u'_y(x,y)}{u(x,y)}}$.

$$p''_{xx} u(x, y) = p'_x \left(p'_x u(x, y) \right) = e^{\frac{u''_{xx}(x,y)u(x,y) - (u'_x)^2}{u^2(x,y)}} , \quad p''_{yx}\, u(x, y) = p'_x \left(p'_y\, u(x, y) \right) = e^{\frac{\left(e^{\frac{u'_y(x,y)}{u(x,y)}} \right)'_x}{e^{\frac{u'_y(x,y)}{u(x,y)}}}} = e^{\frac{e^{\frac{u'_y(x,y)}{u(x,y)}} \frac{u''_{yx}(x,y)u(x,y) - u'_y(x,y)u'_x(x,y)}{u^2(x,y)}}{e^{\frac{u'_y(x,y)}{u(x,y)}}}} = e^{\frac{u''_{yx}(x,y)u(x,y) - u'_y(x,y)u'_x(x,y)}{u^2(x,y)}}$$

$$p''_{xy}\, u(x, y) = p'_y \left(p'_x\, u(x, y) \right) = e^{\frac{\left(e^{\frac{u'_x(x,y)}{u(x,y)}} \right)'_y}{e^{\frac{u'_x(x,y)}{u(x,y)}}}} = e^{\frac{e^{\frac{u'_x(x,y)}{u(x,y)}} \frac{u''_{xy}(x,y)u(x,y) - u'_x(x,y)u'_y(x,y)}{u^2(x,y)}}{e^{\frac{u'_x(x,y)}{u(x,y)}}}} = e^{\frac{u''_{xy}(x,y)u(x,y) - u'_x(x,y)u'_y(x,y)}{u^2(x,y)}} , \quad p''_{xy}\, u(x, y) = p''_{yx}\, u(x, y) .$$

Пример . $u(x, y) = \sin x^2 y$, $u'_x(x, y) = 2xy \cos x^2 y$ $u'_y(x, y) = x^2 \cos x^2 y$

$$p'_x u(x.y) = e^{(ctg x^2 y) 2xy} = e^{2xy ctg x^2 y} , \quad p''_{xy} u(x, y) = e^{2x ctg x^2 y - 2xy \frac{1}{\sin x^2 y} x^2} = e^{2x ctg x^2 y - \frac{2x^3 y}{\sin x^2 y}} , \quad p'_y u(x, y) = e^{(ctg x^2 y) x^2} = e^{x^2 ctg x^2 y} , \quad p''_{yx} u(x, y) = e^{2x ctg x^2 y - x^2 \frac{1}{\sin x^2 y} 2xy} = e^{2x ctg x^2 y - \frac{2x^3 y}{\sin x^2 y}} .$$

P неопределенный интеграл его свойства .

Пусть $F(x)$ первообразная функция в смысле p производной , то есть $p' F(x) = f(x) \Rightarrow p' C F(x) = f(x)$.

Поэтому P неопределенный интеграл имеет общий вид $P \int f(x)\, dx = C F(x)$.

$$p' \left(P \int f(x)\, dx \right) = p' C F(x) = f(x), \quad P \int p' F(x)\, dx = C F(x) .$$

$$P \int \left(f(x)\, g(x) \right) dx = P \int f(x)\, dx\, P \int g(x)\, dx$$

Доказательство $p'\left(P\int f(x)g(x)\right)dx = f(x)g(x)$, $p'\left(P\int f(x)dxP\int g(x)dx\right) = p'\left(P\int f(x)dx\right)p'\left(P\int g(x)dx\right) = f(x)g(x)$.

$$P\int\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)dx = \frac{P\int f(x)dx}{P\int g(x)dx} .$$

$P\int\left(f(x)^{g'(x)}\right)dx = \dfrac{f(x)^{g(x)}}{P\int\left(\left(p'f(x)\right)^{g(x)}\right)dx}$. Доказательство $p'\left(P\int\left(f(x)^{g'(x)}\right)dx\right) = f(x)^{g'(x)}$ $p'\left(\dfrac{f(x)^{g(x)}}{P\int\left(\left(p'f(x)^{g(x)}\right)dx\right)}\right) = \dfrac{p'\left(f(x)^{g(x)}\right)}{p'\left(P\int\left(\left(p'f(x)^{g(x)}\right)dx\right)\right)} = \dfrac{\left(p'f(x)\right)^{g(x)} f(x)^{g'(x)}}{\left(p'f(x)\right)^{g(x)}} = f(x)^{g'(x)}$.

$P\int\left(f(x)^{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}\right)dx = \dfrac{f(x)^{\frac{1}{g(x)}}}{P\int\left(\left(p'f(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}\right)dx}$. Доказательство $p'\left(P\int\left(f(x)^{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}\right)\right) = f(x)^{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}$ $p'\left(\dfrac{f(x)^{\frac{1}{g(x)}}}{P\int\left(\left(p'f(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}\right)dx}\right) = \dfrac{p'\left(f(x)^{\frac{1}{g(x)}}\right)}{p'\left(P\int\left(\left(p'f(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}\right)dx\right)} = \dfrac{\left(p'f(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} f(x)^{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}}{\left(p'f(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}} = f(x)^{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}$.

$P\int f(x)dx = e^{\int \ln f(x)dx}$. Доказательство $p'\left(P\int f(x)dx\right) = f(x)$, $p'e^{\int \ln f(x)dx} = \left(p'e\right)^{\int \ln f(x)dx} e^{\ln f(x)} = e^{\ln f(x)} = f(x)$, здесь применена формула $p'f(x)^{g(x)} = \left(p'f(x)\right)^{g(x)} f(x)^{g'(x)}$.

Другое доказательство $p'e^{\int \ln f(x)dx} = e^{\left(\int \ln f(x)dx\right)'} = e^{\ln f(x)} = f(x)$, здесь применена формула $p'a^{g(x)} = a^{g'(x)}$.

Другое доказательство $p'F(x) = f(x)$ then $e^{\frac{F'(x)}{F(x)}} = f(x)$, $\dfrac{F'(x)}{F(x)} = \ln f(x)$, $\dfrac{dF}{F(x)} = \ln f(x)dx$, $\int\dfrac{dF}{F(x)} = \int \ln f(x)dx$, $\ln F(x) = \int \ln f(x)dx$, $F(x) = e^{\int \ln f(x)dx}$.

$P\int c dx = c^x$. Доказательство $P\int c dx = e^{\int \ln c dx} = e^{x\ln c} = c^x$.

$P\int f(x)^c dx = \left(P\int f(x)dx\right)^c$. Доказательство $p'\left(P\int f(x)^c dx\right) = f(x)^c$ $p'\left(\left(P\int f(x)dx\right)^c\right) = \left(p'\left(P\int f(x)dx\right)\right)^c \left(P\int f(x)dx\right)^{c'} = f(x)^c$

Другое доказательство $P\int f(x)^c\,dx = e^{\int \ln f(x)^c dx} = e^{c\int \ln f(x)dx} = \left(e^{\int \ln f(x)dx}\right)^c = \left(P\int f(x)\,dx\right)^c$

$P\int \lambda f(x)\,dx = \lambda^x P\int f(x)\,dx$. Доказательство $P\int \lambda f(x)\,dx == e^{\int \ln(\lambda f(x))dx} = e^{\int \ln(\lambda)dx + \int \ln(f(x))dx} = e^{x\ln(\lambda)} e^{\int \ln(f(x))dx} = \lambda^x P\int f(x)\,dx$.

Другое доказательство $p'\left(P\int \lambda f(x)\,dx\right) = p'\left(P\int \lambda dx\right) p'\left(P\int f(x)\,dx\right) = \lambda f(x)$, $p'\left(\lambda^x P\int f(x)\,dx\right) = p'\left(\lambda^x\right) p'\left(P\int f(x)\,dx\right) = \lambda f(x)$.

$P\int \left(p'f(x)\right)^n dx = c\left(f(x)\right)^n \quad p'c\left(f(x)\right)^n = p'cp'\left(f(x)\right)^n = p'\left(f(x)\right)^n = \left(p'f(x)\right)^n$.

$P\int a dx = ca^x$, $P\int a dx = e^{\int \ln a dx} = e^{x\ln a + c} = a^x a^c = ca^x$, $p'ca^x = p'cp'a^x = 1a = a$.

$P\int a^x dx = ca^{\frac{x^2}{2}}$ $P\int a^x dx = e^{\int \ln a^x dx} = e^{\ln a\int x dx} = a^{\frac{x^2}{2}+c} = ca^{\frac{x^2}{2}}$ $p'ca^{\frac{x^2}{2}} = p'cp'a^{\frac{x^2}{2}} = a^{\left(\frac{x^2}{2}\right)'} = a^x$, $P\int a^{g(x)} dx = e^{\int \ln a^{g(x)} dx} = e^{\ln a\int g(x)dx} = a^{\int g(x)dx}$.

$P\int x dx = e^{\int \ln x dx} = e^{x\ln x - x + c} = x^x e^{-x} e^c = x^x e^{-x} c$ $p'\left(x^x e^{-x} c\right) = p'x^x p'e^{-x} = x$, $P\int x^n dx = e^{\int \ln x^n dx} = e^{n(x\ln x - x + c)} = x^{nx} e^{-nx} e^{nc} = x^{nx} e^{-nx} c$, $p'\left(x^{nx} e^{-nx} c\right) = p'\left(x^{nx} e^{-nx}\right) = x$

$P\int e^{tgx} dx = e^{\int \ln\left(e^{tgx}\right)dx} = e^{\int tgx dx} = e^{-\ln|\cos x| + c} = \frac{c}{|\cos x|}$, $p'\frac{c}{|\cos x|} = \frac{p'c}{p'|\cos x|} = \frac{1}{e^{-tgx}} = e^{tgx}$.

$P\int e^{ctgx} dx = e^{\int \ln\left(e^{ctgx}\right)dx} = e^{\int ctgx dx} = e^{\ln|\sin x| + c} = c|\sin x|$, $p'c|\sin x| = p'cp'|\sin x| = 1e^{ctgx} = e^{ctgx}$.

$P\int a^{\sin x} dx = a^{\int \sin x dx} = a^{-\cos x + c} = ca^{-\cos x}$, $p'ca^{-\cos x} = p'cp'a^{-\cos x} = a^{\sin x}$, $P\int a^{\cos x} dx = a^{\int \cos x dx} = a^{\sin x + c} = ca^{\sin x}$, $p'ca^{\sin x} = p'cp'a^{\sin x} = a^{\cos x}$.

$P\int e^{\frac{2}{\sin 2x}} dx = e^{\int \ln e^{\frac{2}{\sin 2x}} dx} = e^{\int \frac{2}{\sin 2x} dx} = e^{\ln tgx + c} = ctgx$, $p'ctgx = p'cp'tgx = e^{\frac{2}{\sin 2x}}$, $P\int e^{-\frac{2}{\sin 2x}} dx = e^{\int \ln e^{-\frac{2}{\sin 2x}} dx} = e^{\int -\frac{2}{\sin 2x} dx} = e^{\ln ctgx + c} = cctgx$,

$p'cctgx = p'cp'ctgx = e^{-\frac{2}{\sin 2x}}$.

$P\int e^{\frac{1}{x}} dx = e^{\int \ln e^{\frac{1}{x}} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x + c} = cx$, $p'cx = p'cp'x = e^{\frac{1}{x}}$, $P\int e^{e^x} dx = e^{\int \ln e^{e^x} dx} = e^{\int e^x dx} = e^{e^x + c} = ce^{e^x}$, $p'ce^{e^x} = p'cp'e^{e^x} = e^{\left(e^x\right)'} = e^{e^x}$.

$P\int e^{thx}dx = e^{\int \ln e^{thx}dx} = e^{\int thx dx} = e^{chx+c} = cchx,\ p'cchx = e^{thx}$, $P\int e^{cthx}dx = e^{\int \ln e^{cthx}dx} = e^{\int cthx dx} = e^{\ln shx+c} = cshx,\ p'cshx = e^{cthx}$.

$P\int e^{\frac{2}{sh2x}}dx = e^{\int \ln e^{\frac{2}{sh2x}}dx} = e^{\int \frac{2}{sh2x}dx} = e^{\ln thx+c} = ce^{\ln thx} = cthx,\ p'cthx = e^{\frac{2}{sh2x}}$, $P\int e^{-\frac{2}{sh2x}}dx = e^{\int \ln e^{-\frac{2}{sh2x}}dx} = e^{-\int \frac{2}{sh2x}dx} = e^{-\ln thx+c} = ce^{\ln cthx} = ccthx,\ p'ccthx = e^{-\frac{2}{sh2x}}$.

$P\int (x+h)\,dx = e^{\int \ln(x+h)dx} = e^{(x+h)\ln(x+h)-x+c} = (x+h)^{(x+h)}\ e^{-x}c$, $p'(x+h)^{(x+h)}\ e^{-x}c = p'(x+h)^{(x+h)}\ p'e^{-x} =$

$= \left(p'(x+h)\right)^{(x+h)}\ (x+h)^{(x+h)'}\ \dfrac{1}{e} = \left(e^{\frac{1}{(x+h)}}\right)^{(x+h)}\ \dfrac{(x+h)}{e} = e\dfrac{x+h}{e} = x+h$.

$P\int \left(\dfrac{f}{g}\right)^{\left(\frac{f}{g}\right)'\frac{g^2}{(f+g)^2}} dx = \dfrac{f^{\frac{f}{f+g}}g^{\frac{g}{f+g}}}{f+g}c$. Доказательство $\left(\dfrac{f}{f+g}\right)' = \dfrac{f'(f+g)-f(f'+g')}{(f+g)^2} = \dfrac{f'g-fg'}{(f+g)^2} = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}\dfrac{g^2}{(f+g)^2} = \left(\dfrac{f}{g}\right)'\dfrac{g^2}{(f+g)^2}$, $\left(\dfrac{g}{f+g}\right)' =$

$= \dfrac{g'(f+g)-g(f'+g')}{(f+g)^2} = \dfrac{g'f-gf'}{(f+g)^2} = -\dfrac{f'g-fg'}{g^2}\dfrac{g^2}{(f+g)^2} = -\left(\dfrac{f}{g}\right)'\dfrac{g^2}{(f+g)^2}$, $p'\left(\dfrac{f^{\frac{f}{f+g}}g^{\frac{g}{f+g}}}{f+g}c\right) = \dfrac{p'\left(f^{\frac{f}{f+g}}\right)p'\left(g^{\frac{g}{f+g}}\right)}{p'(f+g)} =$

$= \dfrac{(p'f)^{\frac{f}{f+g}}\ f^{\left(\frac{f}{g}\right)'\frac{g^2}{(f+g)^2}}\ (p'g)^{\frac{g}{f+g}}\ g^{-\left(\frac{f}{g}\right)'\frac{g^2}{(f+g)^2}}}{(p'f)^{\frac{f}{f+g}}\ (p'g)^{\frac{g}{f+g}}} = \left(\dfrac{f}{g}\right)^{\left(\frac{f}{g}\right)'\frac{g^2}{(f+g)^2}}$, здесь использована формула $p'f^g = (p'f)^g\ f^{g'}$, $p'(f+g) = (p'f)^{\frac{f}{f+g}}\ (p'g)^{\frac{g}{f+g}}$.

Пусть $f(x) = x\ g(x) = 1 \Rightarrow P\int \left(\dfrac{x}{1}\right)^{\left(\frac{x}{1}\right)'\frac{1}{(x+1)^2}} dx = P\int x^{\frac{1}{(x+1)^2}}dx = \dfrac{x^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}c$, $P\int x^{\frac{1}{(x+1)^2}}dx = e^{\int \ln x^{\frac{1}{(x+1)^2}}dx} = e^{\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx} \Rightarrow e^{\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx} = \dfrac{x^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}c$,

$p'\dfrac{x^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}c = \dfrac{p'x^{\frac{x}{x+1}}}{p'(x+1)}$ $p'x^{\frac{x}{x+1}} = (p'x)^{\frac{x}{x+1}}\ x^{\left(\frac{x}{x+1}\right)'} = e^{\frac{1}{x}\frac{x}{x+1}}x^{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}} = e^{\frac{1}{x+1}}x^{\frac{1}{(x+1)^2}}$, $p'(x+1) = e^{\frac{1}{x+1}}$ $p'\dfrac{x^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}c = \dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}x^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{e^{\frac{1}{x+1}}} = x^{\frac{1}{(x+1)^2}}$.

$$P\int\left(\frac{f}{g}\right)^{\left(\frac{f}{g}\right)'\frac{g^2}{(f+g)^2}}dx=P\int\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{g^2}{(f+g)^2}\left(\frac{f}{g}\right)'}dx=\frac{\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{g^2}{(f+g)^2}\frac{f}{g}}}{P\int\left(p'\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{g^2}{(f+g)^2}}\right)^{\frac{f}{g}}dx}=\frac{\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{fg}{(f+g)^2}}}{P\int\left(p'\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{g^2}{(f+g)^2}}\right)^{\frac{f}{g}}dx}\quad,\ P\int\left(\frac{f}{g}\right)^{\left(\frac{f}{g}\right)'\frac{g^2}{(f+g)^2}}dx=\frac{f^{\frac{f}{f+g}}g^{\frac{g}{f+g}}}{f+g}c\Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{fg}{(f+g)^2}}}{P\int\left(p'\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{g^2}{(f+g)^2}}\right)^{\frac{f}{g}}dx}=\frac{f^{\frac{f}{f+g}}g^{\frac{g}{f+g}}}{f+g}c\Rightarrow P\int\left(p'\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{g^2}{(f+g)^2}}\right)^{\frac{f}{g}}dx=\frac{\left(\frac{f}{g}\right)^{\frac{fg}{(f+g)^2}}(f+g)}{f^{\frac{f}{f+g}}g^{\frac{g}{f+g}}}=f^{-\frac{f^2}{(f+g)^2}}g^{-\frac{2fg+g^2}{(f+g)^2}}(f+g)c\ .$$

Пусть $f=x\ \ g=1\Rightarrow P\int\left(p'x^{\frac{1}{(x+1)^2}}\right)^{x}dx=x^{-\frac{x^2}{(x+1)^2}}(x+1)c=\frac{x+1}{x^{\frac{x^2}{(x+1)^2}}}c\ ,\ \ p'x^{\frac{1}{(x+1)^2}}=(p'x)^{\frac{1}{(x+1)^2}}x^{\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)'}=e^{\frac{1}{(x+1)^2x}}x^{\frac{-2}{(x+1)^3}}\Rightarrow P\int\frac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{x^{\frac{2x}{(x+1)^3}}}dx=\frac{x+1}{x^{\frac{x^2}{(x+1)^2}}}c$

$$P\int\frac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{x^{\frac{2x}{(x+1)^3}}}dx=\frac{P\int e^{\frac{1}{(x+1)^2}}dx}{P\int x^{\frac{2x}{(x+1)^3}}dx}\quad P\int e^{\frac{1}{(x+1)^2}}dx=e^{\int\ln e^{\frac{1}{(x+1)^2}}dx}=e^{\int\frac{dx}{(x+1)^2}}=e^{-\frac{1}{x+1}+c}=ce^{-\frac{1}{x+1}}\ ,\ \ P\int x^{\frac{2x}{(x+1)^3}}dx=e^{\int\ln v^{\frac{2x}{(x+1)^3}}dx}=e^{\int\frac{2x}{(x+1)^3}\ln x dx}\ ,$$

$$u=\ln x\ ,\ du=\frac{dx}{x}\ ,\ dv=\frac{x}{(x+1)^3}dx\ ,\ v=\int\frac{x}{(x+1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=-\frac{2x+1}{2(x+1)^2}\ ,$$

$$\int\frac{2x}{(x+1)^3}\ln x dx=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\ln x+\int\frac{2x+1}{x(x+1)^2}dx\ ,\ \int\frac{2x+1}{x(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{(x+1)^2}\right)dx=\ln x-\int\left(\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\ln x-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\Rightarrow$$

$$u=\ln x\ ,\ du=\frac{dx}{x}\ ,\ dv=\frac{x}{(x+1)^3}dx\ ,\ v=\int\frac{x}{(x+1)^3}dx=\int\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right)dx=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=-\frac{2x+1}{2(x+1)^2}\ ,$$

$$\int\frac{2x}{(x+1)^3}\ln x dx=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\ln x+\int\frac{2x+1}{x(x+1)^2}dx\ ,\ \int\frac{2x+1}{x(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{(x+1)^2}\right)dx=\ln x-\int\left(\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\ln x-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\Rightarrow$$

$$\int\frac{2x}{(x+1)^3}\ln x dx=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}\ln x+\ln x-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2\ln x}{(x+1)^2}-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\Rightarrow P\int\frac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{x^{\frac{2x}{(x+1)^2}}}dx=\frac{e^{-\frac{1}{x+1}}}{e^{\frac{x^2\ln x}{(x+1)^2}-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}}}c=\frac{x+1}{x^{\frac{x^2}{(x+1)^2}}}c\ .$$

$P\int f^{g'}dx=\frac{f^g}{P\int(p'f)^g dx}$. Доказательство $p'\left(P\int f^g dx\right)=f^{g'}$ $p'\left(\frac{f^g}{P\int(p'f)^g dx}\right)=\frac{p'f^g}{p'\left(P\int(p'f)^g\,dx\right)}=\frac{(p'f)^g\ f^{g'}}{(p'f)^g}=f^{g'}$.

$P\int\left(f^{-\frac{g'}{g^2}}\right)dx=\frac{f^{\frac{1}{g}}}{P\int\left((p'f)^{\frac{1}{g}}\right)dx}$. Доказательство $p\left(P\int f^{-\frac{g'}{g^2}}\right)dx=f^{-\frac{g'}{g^2}}$ $p'\left(\frac{f^{\frac{1}{g}}}{P\int\left((p'f)^{\frac{1}{g}}\right)dx}\right)=\frac{p'f^{\frac{1}{g}}}{p'\left(P\int\left((p'f)^{\frac{1}{g}}\right)dx\right)}=\frac{(p'f)^{\frac{1}{g}}\ f^{\left(\frac{1}{g}\right)'}}{(p'f)^{\frac{1}{g}}}=f^{-\frac{g'}{g^2}}$.

Пусть $P\int f(x)\,dx=cF(x)\Rightarrow P\int f(ax+b)\,dx=c(F(ax+b))^{\frac{1}{a}}$.

Доказательство $p'c(F(ax+b))^{\frac{1}{a}}=(p'F(ax+b))^{\frac{1}{a}}(F(ax+b))^{\left(\frac{1}{a}\right)'}=\left(f(ax+b)^{(ax+b)'}\right)^{\frac{1}{a}}(F(ax+b))^0=\left(f(ax+b)^a\right)^{\frac{1}{a}}=f(ax+b)$.

$P\int e^x dx=ce^{\frac{x^2}{2}}$, $P\int e^{(ax+b)}dx=c\left(e^{\frac{(ax+b)^2}{2}}\right)^{\frac{1}{a}}=ce^{\frac{(ax+b)^2}{2a}}$, $p'ce^{\frac{(ax+b)^2}{2a}}=e^{\frac{2(ax+b)a}{2a}}=e^{ax+b}$.

$P\int(x+b)\,dx=c(x+b)^{x+b}e^{-x}$, $P\int(ax+b)\,dx=c(ax+b)^{\frac{(ax+b)}{a}}e^{-\frac{ax+b}{a}}=c(ax+b)^{\frac{ax+b}{a}}e^{-x}e^{-\frac{b}{a}}=c(ax+b)^{\frac{ax+b}{a}}e^{-x}$.

Пусть $x=\varphi(t)\Rightarrow\int\ln f(x)\,dx=\int\ln f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Пусть $u=\ln f(\varphi(t))$ $du=\dfrac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}dt$ $dv=\varphi'(t)\,dt$ $v=\varphi(t)\Rightarrow\int\ln f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\varphi(t)\ln f(\varphi(t))-\int\dfrac{\varphi(t)f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}dt$.

$\int\ln ax\,dx$, $x=\varphi(t)=\dfrac{t}{a}\Rightarrow\int\ln ax\,dx=\dfrac{t}{a}\ln t-\int\dfrac{\frac{t}{a}t'}{t}dt=\dfrac{t}{a}\ln t-\int\dfrac{1}{a}1dt=\dfrac{t}{a}\ln t-\dfrac{t}{a}+c=\dfrac{xa}{a}\ln xa-\dfrac{xa}{a}+c=x\ln xa-x+c$.

$p'f(\varphi(t))=e^{\frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}}\Rightarrow\dfrac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}=\ln p'f(\varphi(t))\Rightarrow\int\ln f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\varphi(t)\ln f(\varphi(t))-\int\varphi(t)\ln p'f(\varphi(t))\,dt$.

$P\int f(x)\,dx=e^{\int\ln f(x)dx}\Rightarrow\ln P\int f(x)dx=\int\ln f(x)dx\Rightarrow\int\varphi(t)\ln p'f(\varphi(t))\,dt=\int\ln\left(p'f(\varphi(t))\right)^{\varphi(t)}dt=\ln P\int\left(p'f(\varphi(t))\right)^{\varphi(t)}dt$.

$\int\ln f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\varphi(t)\ln f(t)-\ln\int\left(p'f(\varphi(t))\right)^{\varphi(t)}dt=\ln(f(t))^{\varphi(t)}-\ln\int\left(p'f(\varphi(t))\right)^{\varphi(t)}dt\Rightarrow P\int f(x)\,dx=e^{\int\ln f(x)dx}=$

$=e^{\int\varphi'(t)\ln\varphi(t)dt}=e^{\ln(f(\varphi(t)))^{\varphi(t)-\ln\int\left(p'f(\varphi(t))\right)^{\varphi(t)}dt}}=\dfrac{e^{\ln(f(\phi(t)))^{\varphi(t)}}}{e^{\ln\int\left(p'f(\varphi(t))\right)^{\varphi(t)}dt}}=\dfrac{f(\varphi(t))^{\varphi(t)}}{P\int\left(p'f(\varphi(t))\right)^{\varphi(t)}dt}$.

$P\int e^{\sin ax}dx$, $x=\varphi(t)=\dfrac{t}{a}$, $P\int e^{\sin ax}dx=\dfrac{\left(e^{\sin t}\right)^{\frac{t}{a}}}{P\int\left(p'e^{\sin t}\right)^{\frac{t}{a}}dt}=\dfrac{e^{\frac{t\sin t}{a}}}{P\int e^{\frac{t\sin t}{a}}dt}=\dfrac{e^{\frac{t\sin t}{a}}}{e^{\int\frac{t\cos t}{a}dt}}=\dfrac{e^{\frac{t\sin t}{a}}}{e^{\frac{t\sin t+\cos t}{a}+c}}=e^{\frac{t\sin t}{a}-\frac{t\sin t}{a}-\frac{\cos t}{a}+c}=e^{-\frac{\cos t}{a}+c}=ce^{-\frac{\cos t}{a}}=ce^{-\frac{\cos ax}{a}}$, $P\int e^{\sin ax}dx=e^{\int\sin ax dx}=ce^{-\frac{\cos ax}{a}}$.

P определенный интеграл его свойства .

Пусть $f(x)\in C_{[a,b]}, f(x)>0$, также $a=x_0<x_1<.....<x_{n-1}<x_n=b$ разбиение отрезка $[a,b]$. Пусть $\Delta x_j=x_{j+1}-x_j, \Delta=\max\Delta x_j, \zeta\in\left[x_{j-1},x_j\right]$

Определение . P определенный интеграл дается формулой сходящегося призведения $P\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\Delta\to0}\prod_j^n f(\zeta_j)^{\Delta x_j}=\lim\limits_{\Delta\to0}f(\zeta_1)^{\Delta x_1}\cdot.....\cdot f(\zeta_n)^{\Delta x_n}$.

Поэтому $P\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\Delta\to0}\left(e^{\ln f(\zeta_1)}\right)^{\Delta x_1}\cdot.....\cdot\left(e^{\ln f(\zeta_n)}\right)^{\Delta x_n}=\lim\limits_{\Delta\to0}e^{\ln f(\zeta_1)\Delta x_1+.....+\ln f(\zeta_n)\Delta x_n}=\lim\limits_{\Delta\to0}e^{\sum_j^n\ln f(\zeta_j)\Delta x_j}=e^{\lim\limits_{\Delta\to0}\sum_{j=1}^n\ln f(\zeta_j)\Delta x_j}=e^{\int_a^b\ln f(x)dx}$. Тогда $P\int_a^b f(x)\,dx=e^{\int_a^b\ln f(x)dx}$

Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на n равных частей длины $\Delta=\dfrac{b-a}{n}$. Пусть $a=x_0$, $x_1=a+\dfrac{b-a}{n}$, .. , $x_n=a+\dfrac{b-a}{n}n=b$,

точки ξ_j берем правые концы каждого отрезка $\xi_1=x_1=a+\dfrac{b-a}{n}$, .. , $\xi_j=a+\dfrac{b-a}{n}j$, .. , $\xi_n=a+\dfrac{b-a}{n}n=b$, это дает

$P\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\Delta=\frac{1}{n}\to 0}\prod\limits_j^n f(\xi_j)^{\Delta=\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_j^n f(\xi_j)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(\xi_1)^{\frac{1}{n}}\bullet\ldots\bullet f(\xi_n)^{\frac{1}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(\xi_1)\bullet\ldots\bullet f(\xi_n)\right)^{\frac{1}{n}}$. Пусть $a=0$, $b=1$, поэтому $\xi_j=\dfrac{1}{n}$,

$P\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\bullet f\left(\frac{2}{n}\right)\bullet\ldots\bullet f\left(\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\bullet f\left(\frac{2}{n}\right)\bullet\ldots\bullet f\left(\frac{n}{n}\right)}$, отсюда $e^{\int\limits_0^1\ln f(x)dx}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\bullet f\left(\frac{2}{n}\right)\bullet\ldots\bullet f\left(\frac{n}{n}\right)}$.

Пример . $P\int\limits_a^b x\,dx=e^{\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{j=1}^n\ln\xi_j\cdot\Delta}=e^{\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(\Delta\left(\ln a+\ln(a+\Delta)+\ \ldots\ +\ln(a+(n-1)\Delta)\right)\right)}=\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(e^{\Delta(\ln a+\ln(a+\Delta))+\ \ldots\ +\ln(a+(n-1)\Delta)}\right)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\left(a\cdot(a+\Delta)\cdot\ \ldots\ \cdot(a+(n-1)\Delta)\right)^{\Delta}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\cdot\left(a+\frac{b-a}{n}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right)^{\frac{b-a}{n}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{j=1}^n\left(1+(j-1)\frac{b-a}{n}\right)\right)^{\frac{b-a}{n}}=e^{b(\ln b-1)-a(\ln a-1)}$, где $\Delta x_j=\dfrac{b-a}{n}$, точки ξ_j левые концы каждого отрезка .

$P\int\limits_1^5 x\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\prod\limits_{j=1}^n\left(1+(j-1)\frac{4}{n}\right)\right)^{\frac{4}{n}}=\dfrac{5^5}{e^4}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^n\left(\ln\left(1+(j-1)\frac{4}{n}\right)\right)^{\frac{4}{n}}\right)=5\ln 5-4$.

$P\int_a^b f(x)\,dx=F(x)_a^b=\dfrac{F(b)}{F(a)}$. Доказательство . Пусть $P\int f(x)\,dx=cF(x),\int\ln f(x)\,dx=\Phi(x)+c_1,P\int f(x)\,dx=e^{\int\ln f(x)dx}$, отсюда

$cF(x)=e^{\Phi(x)+c_1}=e^{c_1}e^{\Phi(x)}=c_1e^{\Phi(x)},cF(x)=e^{\Phi(x)}$, значит $\Phi(x)=\ln cF(x)$, $\int\limits_a^b\ln f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$,

$\Phi(a)=\ln cF(a),\Phi(b)=\ln cF(b)$, это дает $P\int\limits_a^b f(x)\,dx=e^{\int\limits_a^b\ln f(x)dx}=e^{\Phi(b)-\Phi(a)}=e^{\ln cF(b)-\ln cF(a)}=e^{\ln\frac{F(b)}{F(a)}}=\dfrac{F(b)}{F(a)}$.

$P\int\limits_a^a f(x)\,dx=1$. Доказательство . $\Delta x_j=a-a=0,\zeta_j=a$ получим $P\int\limits_a^a f(x)\,dx=\lim\limits_{\Delta\to 0}\prod\limits_{j=1}^n f(a)^0=1$. Другое доказательство $P\int\limits_a^a f(x)\,dx=e^{\int\limits_a^a\ln f(x)dx}=e^0=1$.

$P\int\limits_a^b f(x)\,dx=\dfrac{1}{P\int\limits_b^a f(x)\,dx}$. Доказательство . $P\int\limits_a^b f(x)\,dx=e^{\int\limits_a^b\ln f(x)dx}=e^{-\int\limits_b^a\ln f(x)dx}=\dfrac{1}{e^{\int\limits_b^a\ln f(x)dx}}=\dfrac{1}{P\int\limits_b^a f(x)\,dx}$.

$P\int\limits_a^b\gamma f(x)\,dx=\gamma^{b-a}P\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Доказательство . $P\int\limits_a^b\gamma f(x)\,dx=e^{\int\limits_a^b\ln(\gamma f(x))dx}=e^{\int\limits_a^b\ln\gamma dx+\int\limits_a^b\ln f(x)dx}=e^{\ln\gamma\int\limits_a^b dx}\cdot e^{\int\limits_a^b\ln f(x)dx}=\gamma^{b-a}P\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пусть $a<b<r$, значит $P\int\limits_a^r f(x)\,dx=P\int\limits_a^b f(x)\,dxP\int\limits_b^r f(x)\,dx$. Доказательство . $P\int\limits_a^r f(x)\,dx=e^{\int\limits_a^r\ln f(x)dx}=e^{\int\limits_a^b\ln f(x)dx+\int\limits_b^r\ln f(x)dx}=e^{\int\limits_a^b\ln f(x)dx}e^{\int\limits_b^r\ln f(x)dx}=P\int\limits_a^b f(x)\,dxP\int\limits_b^r f(x)\,dx$.

$$=e^{\int_a^b \ln f(x)dx} e^{\int_b^r \ln f(x)dx} = P\int_a^b f(x)\,dx P\int_b^r f(x)\,dx .$$

$P\int_a^b f(x)g(x)\,dx = P\int_a^b f(x)\,dx P\int_a^b g(x)\,dx$. Доказательство $P\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\prod_{j=1}^{n}\left(f(\zeta_j)g(\zeta_j)\right)^{\Delta x_j} = \lim_{\Delta\to 0}\prod_{j=1}^{n}\left(f(\zeta_j)\right)^{\Delta x_j} \lim_{\Delta\to 0}\prod_{j=1}^{n}\left(g(\zeta_j)\right)^{\Delta x_j} =$

$= P\int_a^b f(x)\,dx P\int_a^b g(x)\,dx$.

Другое доказательство . Пусть $P\int f(x)g(x)\,dx = cF(x), P\int f(x)\,dx = c_1F_1(x), P\int g(x)\,dx = c_2F_2(x)$,

$P\int f(x)g(x)\,dx = P\int f(x)\,dx P\int g(x)\,dx$, отсюда $cF(x) = c_1c_2F_1(x)F_2(x)$, поэтому $cF(a) = c_1c_2F_1(a)F_2(a), cF(b) = c_1c_2F_1(b)F_2(b)$

$\frac{cF(a)}{cF(b)} = \frac{c_1c_2F_1(a)F_2(a)}{c_1c_2F_1(b)F_2(b)}, \frac{F(a)}{F(b)} = \frac{F_1(a)}{F_1(b)}\frac{F_2(a)}{F_2(b)} \Rightarrow P\int_a^b f(x)g(x)\,dx = P\int_a^b f(x)\,dx P\int_a^b g(x)\,dx$.

Аналогично получим $P\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{P\int_a^b f(x)\,dx}{P\int_a^b g(x)\,dx}$.

Пусть $f(x) \le g(x)$, поэтому $e^{\int_a^b \ln f(x)dx} \le e^{\int_a^b \ln g(x)dx} \Rightarrow P\int_a^b f(x)\,dx \le P\int_a^b g(x)\,dx$.

Пусть $\zeta \in (a,b)$, тогда $P\int_a^b f(x)\,dx = f(\zeta)^{(b-a)}$. Доказательство $\int_a^b \ln f(x)\,dx = (\ln f(\zeta))(b-a)$, значит $P\int_a^b f(x)\,dx = e^{\int_a^b \ln f(x)dx} =$

$= e^{(\ln f(\zeta))(b-a)} = f(\zeta)^{(b-a)}$.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ на n равных частей длины $\Delta=\frac{b-a}{n}$. Пусть $a=x_0$, $x_1=a+\frac{b-a}{n}$, .. , $x_n=a+\frac{b-a}{n}n=b$, точки ξ_j берем правые концы каждого отрезка $\xi_1=x_1=a+\frac{b-a}{n}$, .. , $\xi_j=a+\frac{b-a}{n}j$, .. , $\xi_n=a+\frac{b-a}{n}n=b$, это дает

$P\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\Delta=\frac{1}{n}\to 0}\prod_j^n f(\xi_j)^{\Delta=\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\prod_j^n f(\xi_j)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(f(\xi_1)^{\frac{1}{n}}\bullet..\bullet f(\xi_n)^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f(\xi_1)\bullet..\bullet f(\xi_n)\right)^{\frac{1}{n}}$. Пусть $a=0$, $b=1$, поэтому $\xi_j=\frac{1}{n}$,

$P\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\bullet f\left(\frac{2}{n}\right)\bullet..\bullet f\left(\frac{n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\bullet f\left(\frac{2}{n}\right)\bullet..\bullet f\left(\frac{n}{n}\right)}$, отсюда $e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\bullet f\left(\frac{2}{n}\right)\bullet..\bullet f\left(\frac{n}{n}\right)}$.

Пусть $m \le f(x) \le M$, тогда $m^{(b-a)} \le P\int_a^b f(x)\,dx \le M^{(b-a)}$. Доказательство $\ln m \le \ln f(x) \le \ln M$, поэтому

$(b-a)\ln m \le (b-a)\ln f(x) \le (b-a)\ln M$, $(b-a)\ln m \le (b-a)\ln f(\zeta) \le (b-a)\ln M$, значит $(b-a)\ln m \le \int_a^b \ln f(x)\,dx \le (b-a)\ln M \Rightarrow$

$e^{(b-a)\ln m} \le e^{\int_a^b \ln f(x)dx} \le e^{(b-a)\ln M}$, $m^{(b-a)} \le P\int_a^b f(x)\,dx \le M^{(b-a)}$.

Другое доказательство $\lim\limits_{\Delta\to 0,\, n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} m^{\Delta x_j} \le \lim\limits_{\Delta\to 0,\, n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} f(\zeta)^{\Delta x_j} \le \lim\limits_{\Delta\to 0,\, n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} M^{\Delta x_j}$, $\lim\limits_{\Delta\to 0,\, n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} m^{\Delta x_j} = \lim\limits_{\Delta\to 0,\, n\to\infty} m^{\Delta x_1}\cdot \ldots\ldots \cdot m^{\Delta x_n} =$

$= \lim\limits_{\Delta\to 0,\, n\to\infty} m^{\Delta x_1+\ldots\ldots+\Delta x_n} = m^{(b-a)}$. Аналогично получим $\lim\limits_{\Delta\to 0,\, n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} M^{\Delta x_j} = M^{(b-a)}$ отсюда $m^{(b-a)} \le P\int_a^b f(x)\,dx \le M^{(b-a)}$.

Интегральные неравенства .

Среднее гармоническое функции $f(x)$ определяется по формуле $\dfrac{b-a}{\int_a^b \dfrac{dx}{f(x)}}$.

По определению интеграла $\int_a^b \dfrac{dx}{f(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{\Delta x_1}{f(\zeta_1)} + \ldots\ldots + \dfrac{\Delta x_n}{f(\zeta_n)} \right) = (b-a) \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{1}{f(\zeta_1)} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{f(\zeta_n)} \right)}{n}$.

Поэтому $\dfrac{b-a}{\int_a^b \dfrac{dx}{f(x)}} = \dfrac{b-a}{(b-a)\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{f(\zeta_1)} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{f(\zeta_n)} \right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\dfrac{1}{f(\zeta_1)} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{f(\zeta_n)}}$.

Среднее геометрическое функции $f(x)$ определяется по формуле $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$. Отсюда $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} = \left(e^{\int_a^b \ln f(x)dx} \right)^{\frac{1}{b-a}} = \left(P\int_a^b f(x)dx \right)^{\frac{1}{b-a}}$.

Среднее геометрическое функции $f(x)$ определяется по формуле $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$. Отсюда $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} = \left(e^{\int_a^b \ln f(x)dx}\right)^{\frac{1}{b-a}} = \left(P\int_a^b f(x)dx\right)^{\frac{1}{b-a}}$.

$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)}$. Доказательство По определению интеграла $\int_a^b \ln f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\ln f(\zeta_j)\Delta x_j =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^{n}\ln f(\zeta_j) = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln f(\zeta_1)+.....+\ln f(\zeta_n)}{n} = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)\right)}{n}$$. Значит

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} = e^{\frac{1}{b-a}(b-a)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)\right)}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)\right)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\left(f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)\right)}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\ln\left(f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)\right)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\zeta_1)\cdot .....\cdot f(\zeta_n)}$$

Среднее арифметическое функции $f(x)$ определяется по формуле $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. По определению интеграла

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{f(\zeta_1)+.....+f(\zeta_n)}{n}.$$

Доказательство $\Delta x_j = \frac{b-a}{n}, \zeta_j \in \Delta x_j = x_{j+1}-x_j, \zeta_1 = a+\frac{b-a}{n}, \zeta_2 = a+2\frac{b-a}{n}, ..., \zeta_{n-1} = a+(n-1)\frac{b-a}{n},$

$\zeta_n = a+(n)\frac{b-a}{n}$. Значит $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\Delta x_j = \lim_{n\to\infty}\left(f(\zeta_1)\frac{b-a}{n}+f(\zeta_2)\frac{b-a}{n}+.....+f(\zeta_{n-1})\frac{b-a}{n}+f(\zeta_n)\frac{b-a}{n}\right) = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)}{n}$

Среднее логарифмическое функции $f(x)$ определяется по формуле $\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$. По определению интеграла

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j}\Delta x_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(\zeta_j)}{\zeta_j}\frac{b-a}{n} = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1}+.....+\frac{f(\zeta_n)}{\zeta_n}}{n}.$$

Среднее квадратичное функции $f(x)$ определяется по формуле $\frac{\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}}{b-a}$. По определению интеграла

$$\int_a^b f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f^2(\zeta_j)\Delta x_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f^2(\zeta_j)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}(b-a)\sum_{j=1}^{n}\frac{f^2(\zeta_j)}{n} = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f^2(\zeta_1)+.....+f^2(\zeta_n)}{n}.$$

Отсюда $\frac{\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}}{b-a} = \frac{1}{b-a}\sqrt{(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f^2(\zeta_1)+.....+f^2(\zeta_n)}{n}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{f^2(\zeta_1)+.....+f^2(\zeta_n)}{n}}$.

Классические неравенства $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+.....+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1\bullet.....\bullet a_n} \le \frac{a_1+.....+a_n}{n}$. Поэтому $\frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}} \le e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Пусть $A_1(f) = \frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}}$, $A_2(f) = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} = \left(P\int_a^b f(x)dx\right)^{\frac{1}{b-a}}$, $A_3(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, $A_4(f) = \frac{\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx}{\ln b-\ln a} = \frac{\ln\left(L\int_a^b f(x)dx\right)}{\ln\frac{b}{a}}$, $A_5(f) = \frac{\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}}{b-a}$,

тогда $A_1(f) \le A_2(f) \le A_3(f)$, можно доказать что $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \ge \frac{2}{e}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, значит $A_2(f) \ge \frac{2}{e}A_3(f)$.

Пусть $f(x)=x^r$, отсюда $A_1(x^r)=\dfrac{b-a}{\int\limits_a^b x^{-r}dx}=\dfrac{b-a}{\left(\dfrac{x^{1-r}}{1-r}\right)_a^b}=\dfrac{(b-a)(1-r)}{b^{1-r}-a^{1-r}}$, $A_2(x^r)=\left(P\int\limits_a^b x^r dx\right)^{\frac{1}{b-a}}=\left(\left(x^{rx}e^{-rx}\right)_a^b\right)^{\frac{1}{b-a}}=\left(\dfrac{b^{rb}e^{-rb}}{a^{ra}e^{-ra}}\right)^{\frac{1}{b-a}}$,

$A_3(x^r)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^r dx=\dfrac{1}{b-a}\left.\dfrac{x^{r+1}}{r+1}\right|_a^b=\dfrac{1}{b-a}\dfrac{1}{r+1}\left(b^{r+1}-a^{r+1}\right)$, $A_4(x^r)=\dfrac{\int\limits_a^b \dfrac{x^r}{x}dx}{\ln b-\ln a}=\dfrac{\int\limits_a^b x^{r-1}dx}{\ln b-\ln a}=\dfrac{\left.\dfrac{x^r}{r}\right|_a^b}{\ln b-\ln a}=\dfrac{1}{r}\dfrac{b^r-a^r}{\ln b-\ln a}$, $A_5(x^r)=\dfrac{1}{b-a}\sqrt{\int\limits_a^b x^{2r}dx}=$

$=\dfrac{1}{b-a}\sqrt{\left.\dfrac{x^{2r+1}}{2r+1}\right|_a^b}=\dfrac{1}{b-a}\sqrt{\dfrac{b^{2r+1}}{2r+1}-\dfrac{a^{2r+1}}{2r+1}}$.

Пусть $a=1$, $b=e$, тогда $A_1(x^r)=\dfrac{(e-1)(1-r)}{e^{1-r}-1}$, $A_2(x^r)=\left(\dfrac{e^{re}e^{-re}}{e^{-r}}\right)^{\frac{1}{e-1}}=e^{\frac{r}{e-1}}$, $A_3(x^r)=\dfrac{1}{e-1}\dfrac{1}{r+1}\left(e^{r+1}-1\right)$, $A_4(x^r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{e^r-1}{\ln e-\ln 1}=\dfrac{e^r-1}{r}$,

$A_5(x^r)=\dfrac{1}{e-1}\sqrt{\dfrac{e^{2r+1}-1}{2r+1}}$.

Можно проверить что $A_5(x)<A_1(x)<A_4(x)<A_2(x)<A_3(x)$, $A_1(x^2)<A_5(x^2)<A_2(x^2)<A_4(x^2)<A_3(x^2)$.

Пусть $A_4(x^r)<A_3(x^3)$, если $r\ge 3$ $\dfrac{e^r-1}{r}<\dfrac{1}{e-1}\dfrac{1}{r+1}\left(e^{r+1}-1\right)$, отсюда $(e^r-1)(e-1)(r+1)<r\left(e^{r+1}-1\right)$,$\left(e^{r+1}-e^r-e+1\right)(r+1)<re^{r+1}-r$,

$re^{r+1}-re^r-re+r+e^{r+1}-e^r-e+1<re^{r+1}-r, e^{r+1}+r<re^r+re+e^r+e-1-r, e^{r+1}+r<e^r(r+1)+e(r+1)-(r+1), e^{r+1}+r<(r+1)\left(e^r+e-1\right)$

Пусть $e^{r+1}<(r+1)e^r$ поскольку $r\ge 3$, тогда $r+1>e$ поэтому $e^{r+1}=ee^r<(r+1)e^r$ Потому что $e-1>1$, значит $r<(r+1)(e-1)$.

Сложив эти два неравенства найдем $e^{r+1}+r<(r+1)\left(e^r+e-1\right)$. Можно проверить что $A_1(e^x)<A_2(e^x)<A_5(e^x)<A_4(e^x)<A_3(x)$.

Геометрическое применение определенного P интеграла .

Пусть $f(x)>1$, тогда $\ln f(x)>0$. Пусть S площадь трапеции , ограниченной линиями $y=\ln f(x), x=a, x=b$, то есть $S=\int\limits_a^b \ln f(x)dx$, поскольку $P\int_a^b f(x)\,dx = e^{\int_a^b \ln f(x)dx}$, поэтому $p\int_a^b f(x)\,dx = e^S$, отсюда $\ln\left(p\int_a^b f(x)\,dx\right) = S$.

Несобственный p интеграл .

Пример $P\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to+\infty} P\int_a^r f(x)\,dx$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^n}, a > 1$, значит

$$P\int_a^{+\infty} x^{-n}dx = e^{\int_a^{+\infty}\ln x^{-n}dx} = e^{-n\int_a^{+\infty}\ln x dx} = e^{-n\lim_{r\to+\infty}\int_a^r \ln x dx} = e^{-n\lim_{r\to+\infty} x(\ln x-1)_a^r} = e^{-n\lim_{r\to+\infty}(r(\ln r-1)-a(\ln a-1))} = e^{na(\ln a-1)}\lim_{r\to+\infty} e^{-nr(\ln r-1)} ,$$

если $n=0$, тогда $P\int_a^{+\infty} x^{-n}dx = e^{na(\ln a-1)} = 1$, то есть интеграл сходиться , если $n>0$, тогда $\lim_{r\to+\infty} e^{-nr(\ln r-1)} = e^{-\infty} = 0$, то есть интеграл сходиться ,

если $n<0$, значит $\lim_{r\to+\infty} e^{-nr(\ln r-1)} = e^{+\infty} = +\infty$, то есть интеграл расходиться .

Пример $f(x) = a^x, a>0$, поэтому $P\int_0^{+\infty} a^x dx = a^{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{+\infty}} = \lim_{r\to+\infty}\left(a^{\frac{r^2}{2}} - 1\right)$, отсюда если $a>1$ этот интеграл расходиться , если $a\le 1$ этот интеграл сходиться .

Пусть b точка разрыва функции $f(x), a<b<c$, поэтому $P\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{r_1\to+0} P\int_a^{b-r_1} f(x)\,dx \cdot \lim_{r_2\to+0}\int_{b+r_2}^c f(x)\,dx$.

Пример $P\int_0^a x^{-n}dx = \lim_{r\to+0} P\int_r^a x^{-n}dx = e^{-na(\ln a-1)}\lim_{r\to+0} e^{-nr(\ln r-1)} = e^{-na(\ln a-1)}$, $\lim_{r\to+0} r(\ln r-1) = \lim_{r\to+0}\frac{\ln r-1}{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to+0}\frac{\frac{1}{r}}{\frac{-1}{r^2}} = \lim_{r\to+0}(-r) = 0, \lim_{r\to+0} e^{-nr(\ln r-1)} = e^0 = 1$

этот интеграл сходиться для $-\infty < n < +\infty$.

Пусть $F(y) = P\int_a^b f(x,y)\,dx$ где $f(x,y)$ непрерывная функция , тогда $p_y'F(y) = P\int_a^b p_y' f(x,y)\,dx$.

Доказательство $p_y'F(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{F(y+\Delta y)}{F(y)}\right)^{\frac{1}{\Delta y}}$, $\frac{F(y+\Delta y)}{F(y)}=\frac{P\int_a^b f(x,y+\Delta y)\,dx}{P\int_a^b f(x,y)\,dx}=P\int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)}{f(x,y)}dx=P\int_a^b e^{\ln f(x,y+\Delta y)-\ln f(x,y)}dx=P\int_a^b e^{(\ln f(x,y+\xi\Delta y))_y'\Delta y}dx=$

$=P\int_a^b e^{\frac{f_y'(x,y+\xi\Delta y)}{f(x,y+\xi\Delta y)}\Delta y}dx=\left(P\int_a^b e^{\frac{f_y'(x,y+\xi\Delta y)}{f(x,y+\xi\Delta y)}}dx\right)^{\Delta y}$, поэтому $p_y'F(y)=\lim_{\Delta y\to 0}P\int_a^b e^{\frac{f_y'(x,y+\xi\Delta y)}{f(x,y+\xi\Delta y)}}dx=P\int_a^b p_y'f(x,y)\,dx$.

P интеграл с переменным верхним пределом .

$P\int_a^x f(t)\,dt=e^{\int_a^x \ln f(t)dt}$, $p_x'\left(P\int_a^x f(t)\,dt\right)=e^{\frac{\left(P\int_a^x f(t)dt\right)_x'}{P\int_a^x f(t)dt}}=e^{\frac{\left(e^{\int_a^x \ln f(t)dt}\right)_x'}{e^{\int_a^x \ln f(t)dt}}}=e^{\left(\int_a^x \ln f(t)dt\right)_x'}=e^{\ln f(x)}=f(x)$

Другое доказательство . Пусть $\int_a^x \ln f(x)\,dx=g(x)$, поэтому $g'(x)=\ln f(x), P\int_a^x f(t)\,dt=e^{g(x)}$, отсюда

$p_x'\left(P\int_a^x f(t)\,dt\right)=p_x'\left(e^{g(x)}\right)=e^{g'(x)}=e^{\ln f(x)}=f(x)$.

Другое доказательство $p_x'\left(P\int_a^x f(t)\,dt\right)=p_x'\left(F(t)_a^x\right)=p_x'\left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)=\frac{p_x'(F(x))}{p_x'(F(a))}=p_x'(F(x))=f(x)$

Пример $P\int x\,dx=cx^xe^{-x}, P\int_1^x t\,dt=t^te^{-t}\Big|_1^x=\frac{x^xe^{-x}}{1e^{-1}}=x^xe^{1-x}$, значит $P\int_1^x\left(P\int_1^{x_1}x_2dx_2\right)dx_1=P\int_1^x x_1^{x_1}e^{1-x_1}dx_1=$

$=e^{\int_1^x \ln\left(x_1^{x_1}e^{1-x_1}\right)dx_1}=e^{\int_1^x (x_1\ln x_1+1-x_1)dx_1}=e^{\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}+x-\frac{1}{4}}$, интеграл $P\int_1^x g(x,x_1)\,dx_1=P\int_1^x\left(P\int_1^{x_1}f(x_2)\,dx_2\right)dx_1$.

Функции $g_1(x), g_2(x)$ назовем p ортогональными на отрезке $[a,b]$, если $P\int\limits_a^b g_1(x)\,g_2(x)\,dx = 1$.

Систему функций $g_1(x), .., g_n(x)$ назовем p ортогональными на отрезке $[a,b]$, если любые две функции этой системы ортогональны .

Система функций $a^{\cos 2x}, .., a^{\cos 2nx}$ p ортогональна на отрезке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Доказательство $P\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos 2nx}dx = \left(a^{\frac{\sin 2nx}{2n}}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{a^{\frac{\sin n\pi}{2n}}}{a^{\frac{\sin 0}{2n}}} = 1$

$$P\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos 2nx}a^{\cos 2mx}dx = P\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos 2nx}dx \bullet P\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos 2mx}dx = 1 .$$

Система функций $e^{\frac{1}{1-e}}x, .., e^{\frac{n}{1-e}}x$ p ортогональна на отрезке $[1,e]$. Доказательство $P\int\limits_1^e x^n dx = \left(x^{nx}e^{-nx}\right)_1^e = \dfrac{e^{ne}e^{-ne}}{1e^{-n}} = e^n$

$$P\int\limits_1^e e^{\frac{n}{1-e}}x^n dx = \left(e^{\frac{n}{1-e}x}\right)_1^e \bullet \left(x^{nx}e^{-nx}\right)_1^e = \frac{e^{\frac{ne}{1-e}}}{e^{\frac{n}{1-e}}}e^n = e^0 = 1, P\int\limits_1^e \left(e^{\frac{m}{1-e}}x^m \bullet e^{\frac{n}{1-e}}x^n\right)dx = P\int\limits_1^e e^{\frac{m}{1-e}}x^m dx \bullet P\int\limits_1^e e^{\frac{n}{1-e}}x^n dx = 1 .$$

Любые две функции $e^{\frac{m}{1-e}}x^n, e^{\frac{n}{1-e}}x^m$ p ортогональны на отрезке $[1,e]$. Доказательство $P\int\limits_1^e e^{\frac{m}{1-e}}x^n dx = e^{-m+n}, P\int\limits_1^e e^{\frac{n}{1-e}}x^m dx = e^{-n+m}$

$$P\int\limits_1^e \left(e^{\frac{m}{1-e}}x^n \bullet e^{\frac{n}{1-e}}x^m\right)dx = e^{-m+n}e^{-n+m} = e^0 = 1 .$$

Пусть $F(y) = P\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, значит $p_y{}'F(y) = e^{\int_a^b \frac{f_y'(x,y)}{f(x,y)}dx} = e^{\int_a^b \ln p_y{}' f(x,y)dx}$.

Доказательство $p_y{}'F\left(y\right)=e^{\frac{\left(P\int_a^b f(x,y)dx\right)'_y}{P\int_a^b f(x,y)dx}}=e^{\frac{\left(e^{\int_a^b f(x,y)dx}\right)'_y}{e^{\int_a^b \ln f(x,y)dx}}}=e^{\left(\int_a^b \ln f(x,y)dx\right)'_y}=e^{\int_a^b \left(\ln f(x,y)\right)_y{}' dx}=e^{\int_a^b \frac{f_y{}'(x,y)}{f(x,y)}dx}=e^{\int_a^b \frac{f(x,y)\ln p_y{}'f(x,y)}{f(x,y)}dx}=e^{\int_a^b \ln p_y{}'f(x,y)dx}$.

Пример . $F\left(n\right)=P\int_1^2 x^n dx=\left(x^{nx}e^{-nx}\right)_1^2=\frac{2^{2n}e^{-2n}}{e^{-n}}=\left(\frac{4}{e}\right)^n$, найдем p производную этой функции по переменной n , $p_n{}'F\left(n\right)=p_n{}'\left(P\int_1^2 x^n dx\right)=$

$=P\int_1^2 p_n{}'x^n dx=P\int_1^2 xdx=\left(x^x e^{-x}\right)_1^2=\frac{2^2e^{-2}}{e^{-1}}=\frac{4}{e},\ p_n{}'\left(\frac{4}{e}\right)^n=\frac{4}{e}$, $e^{\int_1^2 \frac{\left(x^n\right)'_n}{x^n}dx}=e^{\int_1^2 \frac{x^n\ln x}{x^n}dx}=e^{x\left(\ln x-1\right)_1^2}=e^{2(\ln 2-1)-(\ln 1-1)}=\frac{4}{e}$.

Обыкновеные p дифференциальные уравнения первого порядка .

$p'y=f\left(x\right)\ \Rightarrow\ e^{\frac{y'}{y}}=f\left(x\right),\frac{y'}{y}=\ln f\left(x\right),y'=y\ln f\left(x\right),\frac{dy}{dx}=y\ln f\left(x\right),\frac{dy}{y}=\ln f\left(x\right)dx,\ln y=\int \ln f\left(x\right)dx+c$, $y=e^{\int \ln f(x)dx+c}=ce^{\int \ln f(x)dx}$.

Другое решение $p'y=f\left(x\right)\ \Rightarrow\ y=cp\int f\left(x\right)dx=ce^{\int \ln f(x)dx}$.

Пример . $p'y=a,y\left(0\right)=r$, тогда $y=cp\int adx=ca^x\Rightarrow y\left(0\right)=c,c=r,y=ra^x$.

Пример . $p'y=x^y$, поэтому $e^{\frac{y'}{y}}=x^y,\frac{y'}{y}=y\ln x$, $\frac{dy}{y^2}=\ln xdx$, $\int\frac{dy}{y^2}=\int \ln xdx$, $-\frac{1}{y}=x\ln x-x+c\Rightarrow y=\frac{1}{x-x\ln x+c}$.

Пример . $F\left(p'y\right)=0$, делаем подстановку $p'y=a$, получим алгебраическое уравнение $F\left(a\right)=0$.

Пусть это уравнение имеет действительные корни a_j , значит $p'y=a_j,y=c_ja_j^x\Rightarrow a_j=c_j^{\frac{1}{x}}y^{\frac{1}{x}}$, общий интеграл этого уравнения $F\left(c^{\frac{1}{x}}y^{\frac{1}{x}}\right)=0$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка .

$y^{a(x)}p'y=1$ делаем подстановку $y=c^{g(x)}$, получим $p'y=c^{g'(x)}$, отсюда $c^{a(x)g(x)}c^{g'(x)}=1$ $c^{ag(x)+g'(x)}=1$, $ag(x)+g'(x)=0$, $\frac{dg}{dx}=-ag$, $\frac{dg}{g}=-adx$,

$\ln|g|=-\int a(x)\,dx, g(x)=e^{-\int a(x)dx}$, окончательно $y=c^{e^{-\int a(x)dx}}$.

Другое решение $y^{a(x)}p'y=1$, тогда $p'y=y^{-a(x)}$, $e^{\frac{y'}{y}}=y^{-a(x)}$, $\frac{y'}{y}=-a(x)\ln y$, $\frac{dy}{y\ln y}=-a(x)\,dx$, $\int\frac{dy}{y\ln y}=-\int a(x)\,dx$, $\ln(\ln y)+\ln c=-\int a(x)\,dx$,

$\ln(c\ln y)=-\int a(x)\,dx$, $c\ln y=e^{-\int a(x)dx}$, $\ln y=ce^{-\int a(x)dx}$, отсюда $y=e^{ce^{-\int a(x)dx}}=c^{e^{-\int a(x)dx}}$.

Пример . $y^{a(x)}p'y=f(x)$ применим метод вариации постоянной $y=c(x)^{e^{-\int a(x)dx}}$, поэтому $c(x)^{a(x)e^{-\int a(x)dx}}\left(p'c(x)\right)^{e^{-\int a(x)dx}}c(x)^{-a(x)e^{-\int a(x)dx}}=f(x)$,

$\left(p'c(x)\right)^{e^{-\int a(x)dx}}=f(x)$, значит $p'c(x)=f(x)^{e^{\int a(x)dx}}$, найдем $c(x)=ce^{\int\ln\left(f(x)^{e^{\int a(x)dx}}\right)dx}$, окончательно $y=\left(ce^{\int\ln\left(f(x)^{e^{\int a(x)dx}}\right)dx}\right)^{e^{-\int a(x)dx}}$.

Другое решение $y^{a(x)}p'y=f(x)$, решение уравнения найдем в виде $y=u(x)^{v(x)}$, получим $p'y=\left(p'u(x)\right)^{v(x)}u(x)^{v'(x)}$, тогда

$\left(u(x)^{v(x)}\right)^{a(x)}\left(p'u(x)\right)^{v(x)}u(x)^{v'(x)}=f(x), u(x)^{v(x)a(x)+v'(x)}\left(p'u(x)\right)^{v(x)}=f(x)$. Пусть $v(x)a(x)+v'(x)=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-v(x)a(x),\frac{dv}{v(x)}=-a(x)\,dx$,

$\ln|v(x)|=-\int a(x)\,dx, v(x)=e^{-\int a(x)dx}$, отсюда $\left(p'u(x)\right)^{v(x)}=f(x)$, поэтому $p'u(x)=f(x)^{\frac{1}{v(x)}}, p'u(x)=f(x)^{\frac{1}{e^{-\int a(x)dx}}}=f(x)^{e^{\int a(x)dx}}\Rightarrow$

$u(x)=cp\int f(x)^{e^{\int a(x)dx}}dx=ce^{\int\ln f(x)^{e^{\int a(x)dx}}dx}$, окончательно $y=\left(ce^{\int\ln f(x)^{e^{\int a(x)dx}}dx}\right)^{e^{-\int a(x)dx}}$

Пусть $a(x)=a, f(x)=f$, значит $y=\left(ce^{\int\ln f^{e^{ax}}dx}\right)^{e^{-ax}}=c^{e^{-ax}}\left(e^{\int\ln f^{e^{ax}}dx}\right)^{e^{-ax}}=c^{e^{-ax}}\left(e^{\ln f\int e^{ax}dx}\right)^{e^{-ax}}=c^{e^{-ax}}\left(f^{\frac{e^{ax}}{a}}\right)^{e^{-ax}}=c^{e^{-ax}}f^{\frac{1}{a}}$.

Другое решение $y^{a(x)}p'y=f(x)$, отсюда $y^{a(x)}e^{\frac{y'}{y}}=f(x),\frac{y'}{y}+a(x)\ln y=\ln f(x)$. Пусть $y=u(x)^{v(x)}$, тогда $y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)$, поэтому

$\frac{y\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)}{y}+a(x)\ln u^{v}=\ln f(x),\ v'\ln u+\frac{v}{u}u'+a(x)v\ln u=\ln f(x),\left(v'+a(x)v\right)\ln u+\frac{v}{u}u'=\ln f(x)$.

Пусть $v'+a(x)v=0$, значит $\frac{dv}{dx}=-a(x)v$, $\frac{dv}{v}=-a(x)\,dx$, $\ln|v|=-\int a(x)\,dx\Rightarrow v=e^{-\int a(x)dx}$, $\frac{u'}{u}e^{-\int a(x)dx}=\ln f(x),\frac{u'}{u}=e^{\int a(x)dx}\ln f(x)$,

$\frac{du}{udx}=e^{\int a(x)dx}\ln f(x),\frac{du}{u}=e^{\int a(x)dx}\ln f(x)\,dx$, $\ln uc=\int e^{\int a(x)dx}\ln f(x)\,dx$, $uc=e^{\int e^{\int a(x)dx}\ln f(x)dx}$, $u=ce^{\int e^{\int a(x)dx}\ln f(x)dx}$,

окончательно $y=\left(ce^{\int e^{\int a(x)dx}\ln f(x)dx}\right)^{e^{-\int a(x)dx}}$.

Пример . $p'y=y$ решение уравнения найдем в виде $y=e^{g(x)}$, тогда $p'y=e^{g'(x)}\ \Rightarrow\ e^{g'(x)}=e^{g(x)}, g'(x)=g(x)$

$\frac{dg}{dx}=g,\frac{dg}{g}=dx,\ln|g|=x+c, g=e^{x+c}=ce^{x}$, отсюда $y=e^{ce^{x}}=c^{e^{x}}$

Другое решение $p'y=y$, поэтому $e^{\frac{y'}{y}}=y$, $y'=y\ln y$, $\int\frac{dy}{y\ln y}=\int dx$, $\int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=x+c$, $\ln|\ln y|=x+c$, $\ln y=e^{x+c}$, $y=e^{e^{x+c}}=c^{e^{x}}$.

Пусть $y(x_0)=k, k>0$, значит $k=c^{e^{x_0}}$, $e^{x_0}\ln c=\ln k, \ln c=\frac{\ln k}{e^{x_0}}, c=e^{\frac{\ln k}{e^{x_0}}}=\left(e^{\ln k}\right)^{\frac{1}{e^{x_0}}}=(k)^{\frac{1}{e^{x_0}}}$, окончательно $y=\left(k^{\frac{1}{e^{x_0}}}\right)^{e^{x}}$.

Пример . $p'y=y^{x}$, тогда $e^{\frac{y'}{y}}=y^{x},\frac{y'}{y}=x\ln y$, $\frac{dy}{ydx}=x\ln y$, $\frac{dy}{y\ln y}=xdx$, $\frac{d(\ln y)}{\ln y}=xdx$, $\ln(\ln y)=\frac{x^2}{2}+c$, $\ln y=e^{\frac{x^2}{2}}c$, $y=c^{e^{\frac{x^2}{2}}}$.

Пример . $p'y=g(y)^{f(x)}$, отсюда $e^{\frac{dy}{ydx}}=g(y)^{f(x)}$, $\frac{dy}{ydx}=f(x)\ln g(y),\frac{dy}{y\ln g(y)}=\ln f(x)\,dx$, $\int\frac{dy}{y\ln g(y)}=\int\ln f(x)\,dx$.

Пример . $(p'y)^2 = x$ делаем подстановку $p'y = r(x)$, поэтому $r^2(x) = x$, значит $2rdr = dx$, поскольку $p'y = r(x)$ то

$y = p\int r(x)\,dx = e^{\int \ln r(x)dx} = e^{\int (\ln r)2rdr} = e^{\int 2r\ln rdr}$, вернемся к p интегралу $y = e^{\int \ln r^{2r}dr} = P\int r^{2r}dr = \dfrac{r^{r^2}}{P\int \left(e^{\frac{1}{r}}\right)^{r^2} dr} = \dfrac{r^{r^2}}{P\int e^r dr} = \dfrac{r^{r^2}}{ce^{\frac{r^2}{2}}}$, потому что

$r = x^{\frac{1}{2}}$, окончательно $y = \dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}}{ce^{\frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}} = \dfrac{cx^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}$.

Другое решение $(p'y)^2 = x$, отсюда $y = P\int \sqrt{x}dx = cx^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} = \dfrac{cx^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}$.

Пример . $\mu(p'y) = x$ делаем подстановку $p'y(x) = r(x)$, тогда $\mu(r(x)) = x$, поэтому $\mu'(r)\,dr = dx$, поскольку $p'y = r(x)$ то

$y = p\int r(x)\,dx = e^{\int \ln r(x)dx} = e^{\int (\ln r)\mu'(r)dr} = e^{\int \ln\left(r^{\mu'(r)}\right)dr} = p\int r^{\mu'(r)}dr$

Пример Рассмотрим полярную систему координат (r,ϕ), уравнение $p'r(\phi) = e$, значит $r(\phi) = ce^{\phi}$, это уравнение логарифмической спирали

p дифференциальные уравнения высшего порядка .

Пример . $p''y = f(x)$, отсюда $p'y = c_1 p\int f(x)\,dx = c_1 e^{\int \ln f(x)dx}$, $y = c_2 p\int c_1 e^{\int \ln f(x)dx}dx = c_2 e^{\int \ln\left(c_1 e^{\int \ln f(x)dx}\right)dx} = c_2 e^{\int\left(\ln c_1 + \int \ln f(x)dx\right)dx} = c_2 e^{\int\left(c_1 + \int \ln f(x)dx\right)dx}$.

Другое решение $e^{\frac{y''y-(y')^2}{y^2}} = f(x)$, тогда $\dfrac{y''y-(y')^2}{y^2} = \ln f(x)$. Пусть $y = e^{g(x)}$, значит $y' = g'(x)e^{g(x)}$, $y'' = g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)} =$

$= e^{g(x)}\left(g''(x)+\left(g'(x)\right)^2\right)$, поэтому $\dfrac{e^{2g(x)}\left(g''(x)+\left(g'(x)\right)^2\right)-e^{2g(x)}\left(g'(x)\right)^2}{e^{2g(x)}} = \ln f(x), g''(x) = \ln f(x), g(x) = \int\left(c_1 + \int \ln f(x)\,dx\right)dx + c_2$,

окончательно $y = c_2 e^{\int\left(c_1+\int \ln f(x)dx\right)dx}$. Пусть $f(x)=\lambda$, получим $y = c_2 e^{c_1 x}\lambda^{\frac{x^2}{2}}$.

Линейные p дифференциальные уравнения .

$y^{a_0(x)}\left(p'y\right)^{a_1(x)}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y\right)^{a_n(x)} = 1$, где $a_0(x)$, .. , $a_n(x)$ непрерывные функции на интервале (a,b) .

$y(x)=1$ решение данного уравнения .

Пусть $y_1(x)$ решение данного уравнения , тогда $y=\left(y_1(x)\right)^c$ также решение .

Доказательство . $p'\left(f(x)\right)^c = \left(p'f(x)\right)^c, p^{(n)}\left(f(x)\right)^c = \left(p^{(n)}f(x)\right)^c$, значит $y_1^{ca_0}\left(p'y_1\right)^{ca_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_1\right)^{ca_n} = \left(y_1^{a_0}\left(p'y_1\right)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_1\right)^{a_n}\right) = 1^c = 1$.

Пусть $y_1(x)$ решение данного уравнения , тогда $y=\dfrac{1}{y_1(x)}$ также решение .

Доказательство . $p'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{p'\left(f(x)\right)}$, .. , $p^{(n)}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{p^{(n)}f(x)}$, тогда $\dfrac{1}{y_1^{a_0}}\bullet\dfrac{1}{\left(p'y_1\right)^{a_1}}\bullet..\bullet\dfrac{1}{\left(p^{(n)}y_1\right)^{a_n}} = \dfrac{1}{y_1^{a_0}\left(p'y_1\right)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_1\right)^{a_n}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ решения данного уравнения , тогда $y = y_1(x)\,y_2(x)$ также решение .

Доказательство . $y_1^{a_0}\left(p'y_1\right)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_1\right)^{a_n} = 1, y_2^{a_0}\left(p'y_2\right)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_2\right)^{a_n} = 1$, умножим эти два равенства найдем

$y_1^{a_0}y_2^{a_0}\left(p'y_1\right)^{a_1}\left(p'y_2\right)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_1\right)^{a_n}\left(p^{(n)}y_2\right)^{a_n} = \left(y_1y_2\right)^{a_0}\left(p'\left(y_1y_2\right)\right)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}\left(y_1y_2\right)\right)^{a_n} = 1$.

Аналогично если $y_1,..,y_j$ решения данного уравнения , тогда $y_1\bullet..\bullet y_j$ также решение .

Значит множество решений данного уравнения образуют мультипликативную группу .

Решение данного уравнения найдем в виде $y=c^{g(x)}$, отсюда $p'y = c^{g'(x)}, p^{(n)}y = c^{g^{(n)}(x)}$, поэтому $c^{a_0g(x)}c^{a_1g'(x)}\bullet..\bullet c^{a_ng^{(n)}(x)} = 1$,

значит $c^{a_0g(x)+a_1g'(x)+..+a_ng^{(n)}(x)} = 1, a_0g(x)+a_1g'(x)+..+a_ng^{(n)}(x) = 0$. Общее решение этого уравнения

$g(x) = c_1g_1(x)+..+c_ng^{(n)}(x)$, тогда $y = c^{c_1g_1(x)+..+c_ng_n(x)}$, частные решения $y_1 = c^{g_1(x)},.., y_n = c^{g_n(x)}$,

общее решение $y = y_1(x)^{c_1}\bullet..\bullet y_n(x)^{c_n}$.

Решение данного уравнения найдем в виде $y = c^{g(x)}$, отсюда $p'y = c^{g'(x)}$, $p^{(n)}y = c^{g^{(n)}(x)}$, поэтому $c^{a_0 g(x)} c^{a_1 g'(x)} \bullet .. \bullet c^{a_n g^{(n)}(x)} = 1$,

значит $c^{a_0 g(x) + a_1 g'(x) + .. + a_n g^{(n)}(x)} = 1, a_0 g(x) + a_1 g'(x) + .. + a_n g^{(n)}(x) = 0$. Общее решение этого уравнения

$g(x) = c_1 g_1(x) + .. + c_n g^{(n)}(x)$, тогда $y = c^{c_1 g_1(x) + .. + c_n g_n(x)}$, частные решения $y_1 = c^{g_1(x)}, .., y_n = c^{g_n(x)}$,

общее решение $y = y_1(x)^{c_1} \bullet .. \bullet y_n(x)^{c_n}$.

Система функций $g_1(x)$, .., $g_n(x)$ линейно зависимой если существует линейная комбинация $\lambda_1 g_1 + .. + \lambda_n g_n = 0$, где $\lambda_1^2 + .. + \lambda_n^2 > 0$, в противном случае (то есть когда это выражение тождественно для $\lambda_1 = .. = \lambda_n = 0$) система функций $g_1(x)$, .., $g_n(x)$ называется линейно независимой.

Пусть система функций $g_1(x)$, .., $g_n(x)$ заданная на интервале (a, b) является $(n-1)$ раз дифференцируемых функций, $W(x) = \begin{vmatrix} g_1 & .... & g_n \\ g_1' & .... & g_n' \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ g_1^{(n-1)} & .... & g_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ называется определитель Вронского. Пусть система n раз дифференцируемых на интервале (a, b) функций линейно зависима, тогда определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю.

Равенство нулю определителя Вронского только необходимое условие линейной зависимости функций $g_1(x)$, .., $g_n(x)$ на интервале (a, b).

Пусть $g_1(x)$, .., $g_n(x)$ линейно независимая система решений дифференциального уравнения $a_0 g(x) + a_1 g'(x) + .. + a_n g^{(n)}(x) = 0$, тогда определитель Вронского системы решений не равен нулю в любой точке интервала (a, b).

Поскольку $g_1(x) = \ln y_1(x)$, .., $g_n(x) = \ln y_n(x)$, получим определитель $W_p(x) = \begin{vmatrix} \ln y_1 & .... & \ln y_n \\ \ln p'y_1 & .... & \ln p'y_n \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ \ln p^{(n-1)} y_1 & .... & \ln p^{(n-1)} y_n \end{vmatrix} \neq 0$.

Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n $a_0 g(x) + a_1 g'(x) + .. + a_n g^{(n)}(x) = 0$ образует линейное векторное пространство размерности n.

Пусть $C_{[a,b]}$ пространство непрерывных функций $[a,b]$ с нормой $\|g\|= \max|g(x)|_{x\in[a,b]}$, $d(g_1,g_2)=\max|g_1(x)-g_2(x)|_{x\in[a,b]}$.

Обозначим $G_{[a,b]}$ множество решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n n $a_0 g(x)+a_1 g'(x)+..+a_n g^{(n)}(x)=0$,

поэтому $G_{[a,b]}$ это подпространство пространства $C_{[a,b]}$.

Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка p n $y^{a_0(x)}(p'y)^{a_1(x)}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y\right)^{a_n(x)}=1$ не образует линейное векторное пространство .

Обозначим $Y_{[a,b]}$ множество решений p линейного однородного дифференциального уравнения порядка n $y^{a_0(x)}(p'y)^{a_1(x)}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y\right)^{a_n(x)}=1$.

Определим мультипликативную абсолютную величену для $x\in \mathrm{R}^+$ по формуле $|x|^p=\begin{cases}\dfrac{1}{x} , x<1\\ x , x\geq 1\end{cases}$, определим мультикативное растояние x_1 , x_2 по формуле $d^p(x_1,x_2)=\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right|^p$.

Рассмотрим множество функций $Y_{[a,b]}$ где $d_p(y_1,y_2)=e^{d(g_1,g_2)}=e^{\max|g_1-g_2|_{[a,b]}}=e^{\max|\ln y_1-\ln y_2|_{[a,b]}}=e^{\max\left|\ln\frac{y_1}{y_2}\right|_{[a,b]}}=\max\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)_{[a,b]}$. Согласно определению

$$\begin{cases}d(g_1,g_2)\geq 0\\ d(g_1,g_2)=0\Leftrightarrow g_1=g_2\\ d(g_1,g_2)=d(g_2,g_1)\\ d(g_1,g_2)\leq d(g_1,g_r)+d(g_r,g_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d_p(g_1,g_2)\geq 1\\ d_p(y_1,y_2)=1\Leftrightarrow y_1=y_2\\ d_p(y_1,y_2)=d(y_2,y_1)\\ d_p(y_1,y_2)\leq d_p(y_1,y_r)\cdot d_p(y_r,y_2)\end{cases}$$
, аналогично можно сделать для любого пространства с нормой ,

определим мультипликативную сходимость последовательности функций

$(y_n(x))_{n=1}^{\infty}\to^{d_p} y(x)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists n\in\mathrm{N}$ такое что $d_p(y_n(x),y(x))<1+\varepsilon$, $\forall n>\mathrm{N}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists n\in\mathrm{N}$ такое что $\max\left(\dfrac{y_n(x)}{y(x)}\right)_{[a,b]}<\varepsilon+1$.

Пример . $y^{-8}(p'y)^{14}(p''y)^{-7}p'''y=1,\ \ -8\ln y+14\frac{y'}{y}-7\frac{y''y-(y')^2}{y^2}+\frac{y''y^2-3yy'y''+2(y')^3}{y^3}=0$. Пусть $y(x)=e^{g(x)}$, значит

$e^{-8g}e^{14g'}e^{-7g''}e^{g'''}=1, g'''-7g''+14g'-8g=0$, поэтому $g(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{4x}, y(x)=e^{c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{4x}}$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения $y^{a_0}(p'y)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y\right)^{a_n}=f(x)$.

Пусть $y_1(x)$ частное решение этого уравнения $y_1^{a_0}(p'y_1)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_1\right)^{a_n}=f(x)$, пусть $g(x)$ общее решение соответствующего однородного уравнения

$g^{a_0}(p'g)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}g\right)^{a_n}=1$. Отсюда $y=y_1(x)g(x)$ общее решение неоднородного уравнения .

Доказательство . $y_1^{a_0}g^{a_0}(p'y_1)^{a_1}(p'g)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}y_1\right)^{a_n}\left(p^{(n)}g\right)^{a_n}=f(x)$, тогда $(y_1g)^{a_0}\left(p'(y_1g)\right)^{a_1}\bullet..\bullet\left(p^{(n)}(y_1g)\right)^{a_n}=f(x)$, $g(x)=g_1(x)^{c_1}\bullet..\bullet g_n(x)^{c_n}$, $y(x)=y_1(x)g_1(x)^{c_1}\bullet..\bullet g_n(x)^{c_n}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y^{a_0}(p'y)^{a_1}(p''y)^{a_2}=f(x)$, соответсвующее однородное уравнение $y^{a_0}(p'y)^{a_1}(p''y)^{a_2}=1$, общее решение этого уравнения $y=y_1(x)^{c_1}\ y_2(x)^{c_2}$. Решение неоднородного уравнения найдем в виде $y=y_1(x)^{c_1(x)}\ y_2(x)^{c_2(x)}$, поэтому $p'y=p'\left(y_1(x)^{c_1(x)}\right)p'\left(y_2(x)^{c_2(x)}\right)=$

$=(p'y_1(x))^{c_1(x)}\ y_1(x)^{c_1'(x)}(p'y_2(x))^{c_2(x)}\ y_2(x)^{c_2'(x)}$. Теперь найдем $c_1(x),c_2(x)$, так чтобы удовлетворяли условию $y_1(x)^{c_1'(x)}\ y_2(x)^{c_2'(x)}=1$,

значит $p'y=(p'y_1)^{c_1(x)}(p'y_2)^{c_2(x)}$, $p''y=(p''y_1)^{c_1(x)}(p'y_1)^{c_1'(x)}(p''y_2)^{c_2(x)}(p'y_2)^{c_2'(x)}$.

Подставим эти выражения в данное уравнение $y_1^{a_0c_1(x)}y_2^{a_0c_2(x)}(p'y_1)^{a_1c_1(x)}(p'y_2)^{a_1c_2(x)}(p''y_1)^{a_2c_1(x)}(p''y_2)^{a_2c_2(x)}(p'y_1)^{a_2c_1'(x)}(p'y_2)^{a_2c_2'(x)}=$

$=f(x)$, поэтому $\left(y_1^{a_0}(p'y_1)^{a_1}(p''y_1)^{a_2}\right)^{c_1(x)}\left(y_2^{a_0}(p'y_2)^{a_1}(p''y_2)^{a_2}\right)^{c_2(x)}(p'y_1)^{a_2c_1'(x)}(p'y_2)^{a_2c_2'(x)}=f(x)$. Поскольку $y_1(x),y_2(x)$ решения однородного уравнения ,

то $y_1^{a_0}(p'y_1)^{a_1}(p''y_1)^{a_2}=1, y_2^{a_0}(p'y_2)^{a_1}(p''y_2)^{a_2}=1$, тогда $(p'y_1)^{a_2c_1'(x)}(p'y_2)^{a_2c_2'(x)}=f(x)$, отсюда $(p'y_1)^{c_1'(x)}(p'y_2)^{c_2'(x)}=f(x)^{\frac{1}{a_2}}, c_1'(x)\ln(p'y_1(x))+c_2'(x)\ln(p'y_2(x))=\frac{1}{a_2}\ln f(x)$.

Для нахождения $c_1(x),c_2(x)$ имеем систему уравнений $\begin{cases} y_1(x)^{c_1'(x)}\ y_2(x)^{c_2'(x)}=1 \\ c_1'(x)\ln(p'y_1(x))+c_2'(x)\ln(p'y_2(x))=\frac{1}{a_2}\ln f(x) \end{cases}$, $\begin{cases} c_1'(x)\ln y_1(x)+c_2'(x)\ln y_2(x)=0 \\ c_1'(x)\ln(p'y_1(x))+c_2'(x)\ln(p'y_2(x))=\frac{1}{a_2}\ln f(x) \end{cases}$,