

КАЗАНЦЕВ Даниил Иванович

**Разработка и исследование итерационных методов
в вычислительной малоракурсной томографии**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск, 2009

Работа выполнена в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

Научный руководитель: д.ф.-м.н.
Пикалов Валерий Владимирович

Научный консультант: д.т.н., профессор
Пяткин Валерий Павлович

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., профессор
Цибульчик Геннадий Михайлович

д.т.н.
Арбузов Виталий Анисифорович

Ведущая организация: Институт математики
имени С.Л. Соболева СО РАН

Защита состоится 10 февраля 2009 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.061.02 при Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

Автореферат разослан 30 декабря 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н.



С.Б. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Во многих областях науки, таких как медицина, геофизика, астрофизика, промышленная дефектоскопия, диагностика плазмы и других, возникает проблема определения внутренней структуры объектов. Для решения данной задачи во многих случаях являются неприемлемыми прямые методы исследования, связанные с разрушением объекта, поэтому создаются специальные системы получения данных. Физический принцип этих систем состоит в использовании воздействия, представляющего собой физический процесс произвольной природы (излучение, волновое поле и т.д.), и последующей регистрации отклика этого процесса на объект.

В некоторых важных случаях восстановление изображений является вообще практически единственным средством получения информации. Это относится, например, к томографии – получению изображения по набору проекций. Наиболее распространена томография в медицинской диагностике. Однако различные методы вычислительной томографии, позволяющие исследовать внутреннюю структуру объекта не разрушая его, применяются сейчас во многих областях, таких как электронная микроскопия, биохимия, физика Земли, радиоастрономия, исследования океана и космоса.

Вычислительная томография применима в тех случаях, когда внутренняя структура объекта может быть исследована с помощью некоторого вида излучения, которое распространяется с интенсивностью, убывающей по формуле:

$$I_1/I_0 = \exp \left\{ - \int_L g(x) dx \right\},$$

где I_0 – начальная интенсивность излучения луча L , до его прохождения через исследуемый объект, а I_1 – интенсивность после прохождения. Здесь $g(x)$ – коэффициент ослабления. Решая задачу восстановления функции $g(x)$ можно восстановить требуемые внутренние характеристики объекта. Например, при рентгеновском просвечивании коэффициент поглощения связан с плотностью биотканей, а при диагностике плазмы – с пространственным распределением температур, концентраций электронов и ионов.

Так как не существует точных формул восстановления по конечному набору проекций, решение задачи восстановления на практике ищется в виде приближенного решения. Для задач, когда число ракурсов мало, необходимым условием для нахождения такого решения является применение априорной информации о восстанавливаемом объекте. Использование методов регуляризации при наличии шумовых компонент в проекционных данных способствует нахождению устойчивого решения

задачи. Так как в каждом конкретном случае имеем свою постановку задачи, то основной проблемой становится выбор наилучшего алгоритма для ее решения. Основными критериями качества алгоритма реконструкции являются качество восстановленного изображения и время его получения.

Целью работы является разработка и исследование новых итерационных методов в задачах малоракурсной вычислительной томографии, а также их применение в цифровой обработке изображений; создание и реализация интерактивного диалогового программного комплекса на универсальной ЭВМ.

В соответствии с поставленной целью в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

- модернизация и исследование итерационного алгоритма Гершберга–Папулиса для параллельной геометрии сбора данных. Введение в алгоритм новых, вспомогательных параметров, способных увеличить скорость сходимости итерационного процесса и уменьшить итоговую погрешность реконструкции. Подробное исследование вопросов регуляризации;
- для сравнения с алгоритмом Гершберга–Папулиса создание второго итерационного алгоритма для параллельной геометрии, направленного на применение в задачах малоракурсной томографии (разложение обратного оператора Радона в ряд Неймана). На основе полученного алгоритма решение задачи стеганографии (скрытие одного изображения в другом);
- вывод теоремы о центральном сечении для веерной геометрии сканирования с помощью деформирующего преобразования и ее численная проверка на тестовых моделях. На основе полученной теоремы: создание, разработка и исследование итерационного алгоритма Гершберга–Папулиса для веерной системы сбора данных. Сравнение между собой всех исследуемых в диссертации итерационных алгоритмов;
- создание удобного в применении пользователем ЭВМ интерактивного диалогового приложения, в котором существует возможность проводить вычислительный эксперимент для любой из поставленных в диссертации томографических задач.

Методы исследования. Основные результаты работы получены с использованием интегральной геометрии и вычислительных методов, а также методов цифровой обработки изображений и математического моделирования. Для численного моделирования и программной реализации разработанных алгоритмов использовались методы прикладного программирования.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Разработана модифицированная версия алгоритма Гершберга–Папулиса для параллельной системы сбора данных. Посредством применения нового типа интерполяции (комбинированной) и применения весовых множителей удается ускорить сходимость и получать более точные результаты реконструкции. В итерационный процесс введены новые критерия его останова.
2. Представлена новая теорема о центральном сечении применительно к веерной геометрии сбора данных, на основе которой становится возможным перенос многих алгоритмов с параллельной геометрии на веерную, в частности, впервые создан итерационный алгоритм Гершберга - Папулиса для решения томографической задачи с веерными проекционными данными.
3. Создан итерационный алгоритм отделения помехи от синограммы на основе разложения обратного оператора Радона в ряд Неймана, с помощью которого исследована задача стеганографии применительно к томографической постановке. Впервые осуществлено скрытие одного изображения в другом в пространстве Радона, а затем его итерационное восстановление.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложены модифицированные томографические методы для восстановления изображений с параллельной системой регистрации проекционных данных, направленные на задачи с малым числом ракурсов.
2. Разработан новый итерационный алгоритм Гершберга–Папулиса для веерной геометрии сбора данных.
3. Решена задача стеганографии с помощью математического аппарата томографии.

Практическая ценность работы. Предложенный в диссертации модифицированный итерационный алгоритм Гершберга–Папулиса может быть применен для обработки экспериментальных данных в физической томографии с малым числом параллельных проекций. Впервые предложен новый алгоритм Гершберга–Папулиса для обработки веерных экспериментальных данных.

Достоверность результатов полученных результатов и выводов подтверждается анализом разработанных численных алгоритмов и проведением численных экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции “Математические Методы в Геофизике – ММГ” (Новосибирск, 2003 г.), международном симпозиуме “International Symposium on Computed Tomography and Image Processing for Industrial Radiology” (Берлин, Германия, 2003 г.),

международной конференции “Perspectives in Inverse Problems” (Хельсинки, Финляндия, 2004 г.), международной конференции “Applied Inverse Problems” (Сайренсэстэр, Англия, 2005 г.), 4-м международном конгрессе “4-th World Congress on Industrial Tomography” (Эйзу, Япония, 2005 г.), международной конференции “Review of Progress in Quantitative NDE” (Брунsvик, США, 2005 г.), международной конференции “Обратные и некорректные задачи” (Новосибирск, 2007 г.), конференции молодых ученых ИВМиМГ СО РАН (Новосибирск, 2008 г.), международной конференции IEEE Region 8 Intl. Conf. SIBIRCON 2008 (Новосибирск, 2008 г.), международной конференции “Математические Методы в Геофизике” (Новосибирск, 2008 г.), международном симпозиуме “Nuclear Science Symposium, Medical Imaging Conference” (Dresden, Germany, 2008 г.), а также на семинарах лаборатории обработки изображений ИВМиМГ СО РАН, ИВТ СО РАН, ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН и ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН.

Публикации. По теме диссертационной работы автором опубликовано 13 работ, перечисленных в конце автореферата.

Личный вклад автора. Основные научные и практические результаты диссертации получены автором лично. Вывод теоремы о центральном сечении для веерной геометрии принадлежит д.ф.-м.н. В.В. Пикалову и д.ф.-м.н. В.П. Голубятникову, автору принадлежит ее численная проверка. Из печатных работ, опубликованных диссертантом в соавторстве, в диссертацию вошли только те результаты, в получении которых он принял непосредственное творческое участие.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 69 наименований и двух приложений. Содержание основного текста диссертации изложено на 170 страницах, содержит 74 иллюстрации, 2 таблицы и 2 блок-схемы.

Основное содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность проблем, рассматриваемых в диссертации, определены основные цели и задачи исследования, показана его научная новизна и практическая ценность, сформулированы выносимые на защиту положения и представлен краткий обзор содержания работы.

Первая глава посвящена постановке задачи вычислительной томографии, а также обзору и анализу методов, используемых для решения проблемы томографической реконструкции.

В п. 1.1 даются основные определения, такие как понятие томографии, систем сбора данных, томограммы, синограммы, методов рекон-

струкции, преобразований Фурье и Радона.

Преобразование Радона (\mathbf{R}) как функция угла ξ и заданного прицельного параметра p записывается как:

$$f(p, \xi) = \mathbf{R}g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s \cos \xi - p \sin \xi, -s \sin \xi + p \cos \xi) ds. \quad (1)$$

Функция $f(p, \xi)$ называется проекцией или *синограммой*, а функция $g(x, y)$ - *томограммой*. Приводится аналитическая запись обратного преобразования Радона в виде:

$$g(x, y) = \mathbf{R}^{-1}f(p, \xi) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(p, \xi) dp d\xi}{(p - p_0)^2}, \quad (2)$$

$$p_0 = -x \sin \xi + y \cos \xi.$$

В п. 1.2 дается определение теоремы о центральном сечении (ТЦС), а именно, ТЦС устанавливает, что Фурье-образ одномерной проекции $\tilde{f}_\xi(\nu_p)$ совпадает с сечением двумерного Фурье-образа от повернутой томограммы $g(s, p)$ при $\nu_s = 0$. Здесь описаны основные аналитические алгоритмы томографии, такие как метод Фурье-синтеза, метод фильтрации и обратного проецирования.

В п. 1.3 внимание заострено на малоракурсных томографических постановках в параллельной геометрии и методах решения данных задач. Подробно рассмотрены следующие итерационные томографические методы: итерационный алгоритм алгебраической реконструкции (ART), метод максимума энтропии (MENT) и мультипликативного ART (MART), итерационный алгоритм Гершберга-Папулиса (Г-П) и алгоритм реконструкции на основе разложения обратного оператора Радона в ряд Неймана (NDSL). Последние два итерационных метода рассмотрены более подробно, так как их разработке и исследованию в верной томографии посвящена данная диссертация. Здесь приводится доказательство сходимости итерационного алгоритма Г-П.

В п. 1.4 рассматривается проблема некорректности постановок в томографических задачах и необходимость применения методов регуляризации.

Вторая глава посвящена исследованию и численной реализации итерационных алгоритмов Гершберга-Папулиса и алгоритма реконструкции на основе разложения оператора \mathbf{R}^{-1} в ряд Неймана для параллельной геометрии сбора данных в задачах с ограниченным числом ракурсов.

В п. 2.1 приведены результаты алгоритма Г-П для параллельной геометрии и исследуются разнообразные его модификации.

Для случая восстановления томограмм итерационный алгоритм Г-П представим в виде:

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x, y) &= \Phi_s^{(n)} F_2^{-1} \tilde{g}^{(n-1)}(\nu_x, \nu_y), \\
\tilde{g}^{(n)}(\nu_x, \nu_y) &= \Phi_f^{(n-1)} F_2 g^{(n-1)}(x, y), \\
g^{(0)}(x, y) &= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $n = 1, 2, \dots$, F_2 и F_2^{-1} – операторы прямого и обратного двумерного преобразования Фурье; $\Phi_s^{(n)}, \Phi_f^{(n)}$ – соответственно, операторы изменения n -го итерационного решения и его Фурье-образа, которые отвечают за использование априорной информации. Оператор $\Phi_s^{(n)}$ действует в области томограммы, а $\Phi_f^{(n)}$ действует в Фурье-пространстве. В частности, в последний оператор входит процедура переноса Фурье-спектра проекций, заданных на радиальных линиях в Фурье-пространстве искомого изображения, на соседние точки двумерного пространства. Эта процедура является центральной частью алгоритма Г-П, учитывающей в нем измеренные данные – интегральные проекции.

На практике может быть получено только конечное число проекций от объекта и каждая проекция состоит из конечного числа точек. Таким образом, $\tilde{f}_\xi(\nu_p)$ представляет из себя набор дискретных точек вдоль конечного числа радиальных линий. Для того, чтобы осуществить обратное преобразование Фурье от $\tilde{f}_\xi(\nu_p)$, нужно определить значения спектра на декартовой сетке. Для этого рассматривается проблема выбора способа интерполяции в методе Г-П, и для ее решения предложены особые виды интерполяции в частотной области: *полосовая и комбинированная* (см. Рис. 1). Применение данных видов интерполяции способствовало получению качественных результатов восстановления на малом числе ракурсов ($K = 7$).

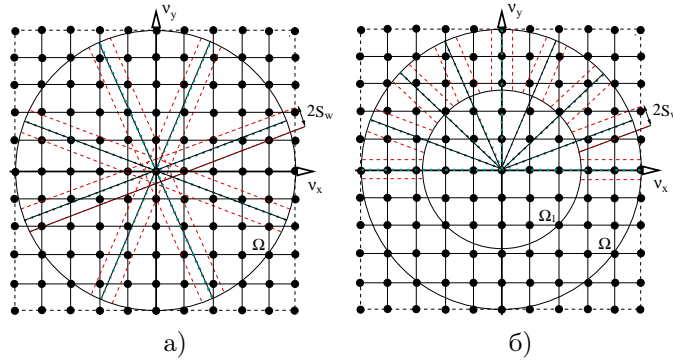


Рис. 1. а) полосовая интерполяция; б) комбинированная интерполяция

Алгоритм *полосовой интерполяции* состоит в следующем: задается начальная ширина полосы – $2S_W$, некоторый множитель – $\delta_S < 1$ и период обновления ширины полосы – m_0 . В ходе работы алгоритма для каждой n -й итерации, для которой выполнено условие $\text{mod}(n, m_0) = 0$, считается значение полуширины полосы по следующей формуле:

$$S_W = S_{n-1} \cdot \delta_S. \quad (4)$$

Таким образом, в итерациях производится постоянное сужение ширины полосы по формуле (4).

Комбинированная интерполяция (см. Рис. 1, б) совмещает в себе два типа интерполяций (полосовую и билинейную). Данная интерполяция учитывает увеличенную плотность данных на радиальных линиях в центральной области, используя там билинейную интерполяцию. На более удаленном расстоянии от центра предпочтительней использование полосовой интерполяции из-за разреженности данных.

Здесь исследуется сходимость итерационного алгоритма Г-П при наличии шумовых компонент в проекционных данных. Особое внимание уделено проблемам регуляризации и фильтрации.

Для исследования устойчивости алгоритмов к ошибкам во входных данных использовался нормально распределенный шум с нулевым средним и переменной дисперсией, имеющей значение κ в процентах от величины проекции в рассматриваемой точке. В работе для подавления шумов использовалась следующая двумерная регуляризация в Фурье-пространстве:

$$\tilde{g}_\Phi^{(n)}(\nu_x, \nu_y) = \frac{\tilde{g}^{(n)}(\nu_x, \nu_y)}{1 + \alpha\nu^2}, \quad (5)$$

где α – параметр регуляризации, $\nu^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2$. В данном случае параметр α находился по критерию невязки:

$$\Delta_\alpha^2 - \delta_\kappa^2 = 0, \quad (6)$$

где δ_κ – норма шума, Δ_α – норма невязки, которая вычисляется в частотной области по формуле:

$$\Delta_\alpha^2 = \left\| \frac{\tilde{f}_\alpha^{rec} - \tilde{f}}{\tilde{f}} \right\|^2, \quad (7)$$

где \tilde{f}_α^{rec} является спектром восстановленной синограммы, вычисленной от восстановленной томограммы.

Здесь продемонстрированы численные эксперименты с алгоритмом Г-П в разнообразных его модификациях для параллельной системы сканирования. Итерационный алгоритм Г-П продемонстрировал быструю

сходимость и низкую погрешность реконструкции на малом числе ракурсов. На модели в виде повернутой сдвинутой гауссианы при $K = 7$ за 120 итераций была получена погрешность реконструкции равная 6.5%. Для оценки погрешности реконструкции вычислялась следующая норма Δ_1 отклонения точной томограммы от восстановленной:

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (g_{ij}^{rec} - g_{ij}^{exa})^2}{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (g_{ij}^{exa})^2}} \cdot 100, \% \quad (8)$$

Здесь g^{exa} – точное решение; g^{rec} – оценка решения полученная на предыдущей итерации. Погрешность $\Delta_1 = 6.5\%$ была получена с помощью полосовой интерполяции, однако применение комбинированной интерполяции на этой же модели позволило уменьшить Δ_1 до 5.5%. В алгоритм были введены весовые коэффициенты, учитывающие значения спектра на предыдущей итерации, что способствовало уменьшению итоговой погрешности реконструкции. Алгоритм был исследован на влияние случайных шумов в проекционных данных и способов их подавления.

В п. 2.2 приводятся результаты исследования еще одного модифицированного итерационного алгоритма малоракурсной томографии: метода реконструкции на основе разложения обратного оператора Радона в ряд Неймана (NDSL).

Классический алгоритм Шеппа-Логана, базирующийся на методе ФОП, реализует сверточное представление внутреннего интеграла в аналитической формуле инверсии преобразования Радона:

$$g(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\xi \int_{-1}^1 f(\xi, p) \psi(p - p_0) dp, \quad (9)$$

где $p_0 = -x \sin \xi + y \cos \xi$ и $\psi(p)$ – фильтр.

В данной работе был использован фильтр Шеппа-Логана:

$$\psi(kh_p) = \frac{4}{h_p^2(4k^2 - 1)}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10)$$

где h_p – шаг по прицельному параметру p .

Итерационный алгоритм NDSL или метод разложения оператора R^{-1} в ряд Неймана представляет из себя следующий алгоритм реконструкции:

$$g^0 = R_0^{-1}f, \quad g^{i+1} = g^i + \lambda^i R_0^{-1} \Delta f^i, \quad (11)$$

где R_0^{-1} – приближение оператора обратного преобразования Радона R^{-1} (здесь в качестве R_0^{-1} был использован оператор фильтрации и обратного проецирования с фильтром Шеппа-Логана); $\Delta f^i = f - Rg^i$ – вектор невязки проекционных данных на i -й итерации; λ^i – параметр релаксации; g^i – приближенное решение на i -й итерации.

Модифицированная версия итерационного алгоритма разложения обратного оператора Радона в ряд Неймана продемонстрировала возможность использования ее в малоракурсной томографии наряду с алгоритмом Г-П. Метод NDSL показал более медленную сходимость итерационного процесса в отличие от алгоритма Г-П, однако конечные результаты реконструкций и итоговая погрешность не уступают по качеству результатам Г-П. При наличии случайного шума в проекционных данных, в методе NDSL необходимо использовать регуляризацию, так как алгоритм не обладает никакими регуляризационными свойствами в отличие от алгоритма Г-П.

В п. 2.3 предметом исследования является одна из задач *стеганографии*, в которой ставится цель скрытия одного изображения в другом. В нашем случае, при томографическом подходе к стеганографии осуществляется скрытие изображения в пространстве Радона. Скрываемое изображение является возмущением, наложенным на проекционные данные. Пусть W является неизвестным возмущением в проекционных данных f , тогда разделение двух изображений (отдельно синограммы и ее возмущения) осуществляется следующим итерационным алгоритмом:

$$\begin{cases} f_W^n = (RR^{-1})(f - \alpha_n W^{n-1}) \\ W^n = f - \beta_n f_W^n, \end{cases} \quad (12)$$

где R и R^{-1} – прямое и обратное преобразования Радона, α_n и β_n – эмпирически подбираемые множители, влияющие на сходимость процесса, f_W^n – оценка очищенной от возмущения синограммы на итерации номер n , W^n – соответствующая оценка возмущения. Данный итерационный алгоритм содержит вычисление обратного оператора Радона R^{-1} , для чего применялся метод фильтрации и обратного проецирования с фильтром Шеппа-Логана (алгоритм ФОП).

Приведенные численные результаты демонстрируют успешное применение томографического аппарата к задаче стеганографии. С ошибкой реконструкции порядка 6% удается выделить возмущение W из фонового изображения. Удачно осуществлено скрытие возмущения в фоновом изображении, а затем восстановление его в итерационном процессе. Алгоритм работает с высокой точностью в отсутствии случайного

шума, но наличие шума выше 1% вносит большие искажения.

Третья глава посвящена новой версии итерационного алгоритма Гершберга–Папулиса, который ориентирован на веерную геометрию сбора данных.

В п. 3.1 приводится новая теорема о центральном сечении для веерной геометрии. В ее основе лежит хорошо известное в проективной геометрии нелинейное координатное преобразование, переводящее задачу веерной томографии в задачу параллельной томографии, но для деформированного пространства, причем для каждого ракурса наблюдения такая деформация – своя.

Для нового деформированного пространства, полученные в обычном пространстве веерные проекции являются уже параллельными и для них работает теорема о центральном сечении в для геометрии параллельных проекций.

Рассмотрим стандартную схему двумерной веерной томографии (Рис. 2). Здесь область определения неизвестной функции $g(x, y)$ содержится внутри единичного круга $x^2 + y^2 < 1$. Источник веерных лучей **E** движется по окружности

$$\begin{cases} x(\beta) = -D \sin \beta; \\ y(\beta) = D \cos \beta, \end{cases}$$

где $D = OE$ – расстояние источника до начала координат, в повернутой на угол β относительно системы (x, y) системе координат (s, p) , а детекторы расположены на прямой линии D_1D_2 (см. Рис. 2).

Каждый луч EA в веере для фиксированного угла β можно охарактеризовать углом γ к центральному лучу и расстоянием q до центра

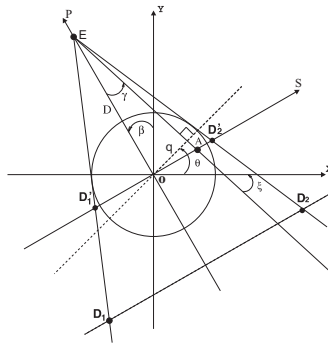


Рис. 2. Формирование проекции на плоском детекторе в схеме веерной томографии

координат O . Угол θ есть угол между осью x и нормалью к лучу, а угол между лучом и осью x определен как ξ . Ясно, что зарегистрированный сигнал на линейке детекторов $D_1 D_2$ можно рассматривать и на прямой $D'_1 D'_2$, которую назовем виртуальным детектором.

Введем следующее “деформирующее преобразование”

$$\begin{cases} u = s/(1 - \frac{p}{D}) = s/Q; \\ v = p. \end{cases} \quad (13)$$

При таком преобразовании система веерных лучей в координатах (x, y) перейдет в систему прямых лучей в координатах (u, v) , параллельных координатной оси v . Однако и исходное изображение $g(x, y)$ будет деформировано в зависящее от угла β новое изображение $g(X(u, v), Y(u, v))$, где

$$\begin{cases} x = X(u, v) = u(1 - \frac{v}{D}) \cos \beta - v \sin \beta; \\ y = Y(u, v) = u(1 - \frac{v}{D}) \sin \beta + v \cos \beta. \end{cases} \quad (14)$$

Обозначим через $u = U(x, y), v = V(x, y)$ обратную замену переменных в (14). Отметим, что измеренный сигнал становится нулевым для $|p| \geq D/\sqrt{D^2 - 1}$. Введем (r, ϕ) – полярные координаты точки (x, y) . Тогда (q, θ) – нормальные координаты веерного луча, проходящего через эту точку (см. Рис. 2), $\theta = \beta + \gamma$.

Веерная проекция может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} f_\beta(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(q - U(x, y))g(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J\delta(q - U)g(x, y)dudv. \end{aligned} \quad (15)$$

Переход от координат (x, y) к (u, v) осуществляется при помощи якобиана преобразования $J = (1 - \frac{v}{D}) = Q$.

Уравнение (15) в новых координатах может быть записано как:

$$f_\beta(u) = \iint Q\delta(q - U)g(x, y)dudv = \frac{1}{\cos \gamma(u)} \int g(X(u, v), Y(u, v))dv. \quad (16)$$

Из геометрии задачи следует, что $\gamma < \pi/2$, отсюда $|\cos \gamma| = \cos \gamma$. В итоге имеем, что якобиан, равный Q , сократился со множителем $|Q^{-1}|$ (в реальных постановках веерной томографии $Q > 0$), вынесенным из-под знака дельта-функции.

Обозначим подынтегральную функцию $g(u, v)$ в интеграле (16) через $h_\beta(u, v)$ (индекс β появляется из за зависимости координат (u, v) от β), и пусть $f'_\beta(u) = f_\beta(u) \cos \gamma(u)$. После Фурье-преобразования функции $f'_\beta(u)$, получаем

$$\tilde{f}'_{\beta}(\nu_u) = \int \exp(-2\pi i \nu_u u) du \int h_{\beta}(u, v) dv = \tilde{h}_{\beta}(\nu_u, \nu_v)|_{\nu_v=0}. \quad (17)$$

Таким образом, теорема о центральном сечении теперь выражена в новой системе координат (u, v) , полученной из исходной нелинейным преобразованием переменных (13). Это преобразование является взаимно-однозначным между областями определения неизвестной функции $g(x, y)$ и деформированной функции $h_{\beta}(u, v)$. Иными словами, Фурье-образ модифицированной веерной проекции (т.е. умноженной на косинус угла падения каждого луча в веере), совпадает с центральным сечением двумерного Фурье-образа деформированного объекта $h_{\beta}(u, v)$. Это и понятно, поскольку в деформированной системе координат схема наблюдения стала параллельной. Еще раз подчеркнем, что для каждого ракурса наблюдения β деформация объекта будет своя.

На основе данной теоремы реализован *итерационный алгоритм Гершберга–Папулиса в веерной геометрии* (FBGP) для малоракурсной томографии. Алгоритм представлен в двух модификациях, между которыми проведен сравнительный анализ. Здесь приведем первую модификацию алгоритма.

Модификация 1 для итерационного алгоритма Г-П с веерной геометрией представляет собой следующую цепочку последовательных действий (функция $g(x, y)$ – восстанавливаемая томограмма):

$$\begin{aligned} g(s, p) &= g_{i-1} \left(R_{\beta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \quad g^D(u, v) = g \left(T \begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix} \right), \\ \tilde{g}_{\Phi}^D(\nu_u, \nu_v) &= \Phi_f F_2 [g^D(u, v)], \quad g_{\Phi}^D(u, v) = \Phi_s F_2^{-1} [\tilde{g}_{\Phi}^D(\nu_u, \nu_v)], \\ g_{\Phi}(s, p) &= g_{\Phi}^D \left(T^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \quad g_i(x, y) = g_{\Phi} \left(R_{-\beta} \begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где R_{β} – есть матрица поворота на угол β к исходной системе координат (x, y) , а $R_{-\beta}$ обратная к ней. Деформирующие преобразование определено “матрицей деформации”: $T = \begin{vmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, где $Q = (1 - \frac{p}{D})$.

Посредством применения оператора T осуществляется переход от (s, p) к новым координатам (u, v) : $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix}$. В данной реализации алгоритма все операции поворота реализованы в виде двумерной интерполяции, а прямая и обратная деформации изображения осуществляются при помощи по-строчной одномерной интерполяции, одинаковой для каждого ракурса (операторы T и T^{-1}), т.к. при таком “повороте” фокальная точка всегда оказывается расположенной на оси ординат $v = p$.

На Рис. 3 приведены одномерные графики зависимости ошибок реконструкции от числа итераций для модели No. 224 (элементарный фан-

том повернутой и сдвинутой эллиптической гауссианы) для трех алгоритмов: алгоритма Г-П с параллельной и веерной системой сканирования (кривые No. 1, 3) и итерационного алгоритма NDSL (кривая No.2).

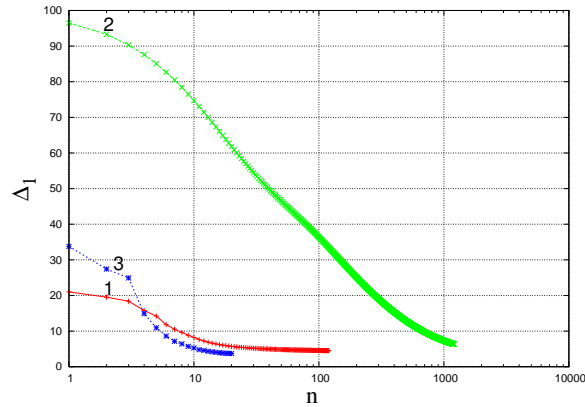


Рис. 3. Сравнение трех алгоритмов реконструкции: зависимость ошибок реконструкции Δ_1 (%) от числа итераций (n) для модели No. 224 с параметрами $N_x = N_y = 128, N_p = 128, K = 13$, априорная информация включала в себя положительность, очистку, зануление вне единичного круга; Г-П для параллельной геометрии с параметрами $S_w = 1.8, \delta_s = 0.8, m_0 = 3, n = 120$ (кривая No.1); метод NDSL, $\lambda = 0.03$ (2); веерный алгоритм Г-П с параметрами $D = 1.5, S_w = 1.8, \delta_s = 0.8, m_0 = 1$ (3).

Сравнивая итоговые погрешности Δ_1 для трех алгоритмов, а также их реконструкции на последней итерации (см. Рис. 4) можно сделать следующий вывод. На данной модели веерный алгоритм Г-П дал наилучший результат, как по скорости сходимости итерационного процесса к наименьшей ошибке реконструкции, так и по качеству восстановления. После исследования разных по сложности моделей и сравнения между собой алгоритма Г-П с параллельной и веерной системой сбора данных, а также метода NDSL для параллельной геометрии был сделан следующий вывод. Использование бикубической интерполяции в веерном случае позволяет достигнуть результатов, сравнимых с результатами Г-П в параллельной геометрии, а на гладких моделях – превосходящие по точности результаты последнего, за меньшее число итераций. Численные эксперименты со случайными шумами в проекционных данных показали, что применение регуляризации необходимо при шумах больше 5%, в остальных случаях алгоритм FBGP способен сам подавить шумы.

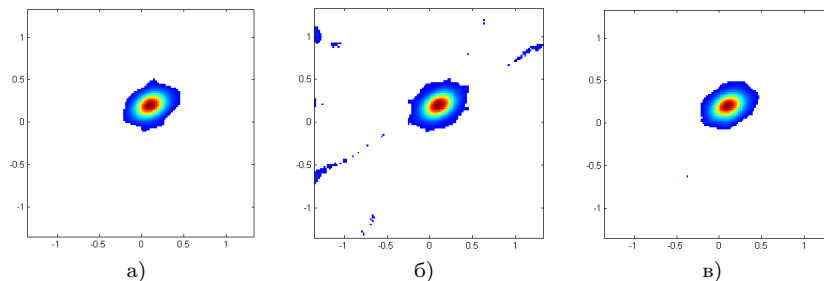


Рис. 4. Реконструкции модели No. 224 для трех алгоритмов, $N_x = N_y = 128$, $N_p = 128$, $K = 13$; реконструкция а) алгоритмом Г-П с параллельной системой сбора данных (кривая No.1 на Рис. 3), $n = 120$, $\Delta_1 = 4.52\%$; б) методом NDSL (кривая No.2 на Рис. 3), $n = 1200$, $\Delta_1 = 6.35\%$; в) алгоритмом FBGP (кривая No.3 на Рис. 3), $n = 20$, $\Delta_1 = 3.71\%$.

В приложении I описаны созданные прикладные программы для моделирования томографического эксперимента. Весь пакет программ объединен в одно интерактивное диалоговое приложение (FBTA), созданное на языке Matlab с помощью встроенного в него пакета GUI.

В приложении II представлены две блок-схемы: пакета FBTA и алгоритма Г-П для параллельной геометрии сбора данных. В блок-схемах наглядно объясняется система работы пакета FBTA и томографических алгоритмов.

Заключение

Сформулируем основные результаты диссертационной работы:

1. Разработаны модифицированные методы двумерной малоракурсной томографии с параллельной системой сбора данных. За счет модернизации алгоритма Г-П была улучшена его сходимость, и итоговые погрешности реконструкции стали меньше. В итерационный алгоритм Г-П были успешно введены следующие методики улучшения качества реконструкции: новый тип интерполяции (комбинированная интерполяция), учет весовых коэффициентов в Фурье-пространстве, двумерная регуляризация, одномерная фильтрация проекционных данных, и критерии останова итерационного процесса по минимуму нормы невязки. Показано, что при наличии шумов измерений в 3-5% алгоритм еще сохраняет сходимость, так как сам алгоритм обладает регуляризирующими свойствами.

2. Метод NDSL показал более медленную сходимость итерационного процесса в отличие от алгоритма Г-П, однако конечные результаты

реконструкций и итоговая погрешность не уступают по качеству результатам Г-П. Алгоритм NDSL при использовании зашумленных данных дает результаты значительно худшие, чем алгоритм Г-П, так как не обладает никакими регуляризирующими свойствами. Однако при применении одномерной фильтрации к зашумленным проекциям, NDSL стремится к точности результатов алгоритма Г-П, и в зависимости от выбранной модели, иногда превосходит их.

3. Предложен новый метод решения одной из задач стеганографии, в котором продемонстрирована возможность скрытия изображения с помощью методов томографии. Новый итерационный алгоритм, основанный на методе NDSL, способен разделить наложение двух изображений – возмущения и синограммы (фона), с использованием прямого и обратного преобразований Радона. Полученные результаты демонстрируют возможность скрытия одного изображения в другом и разделения их в предложенном итерационном процессе.

4. Посредством переноса теоремы о центральном сечении на веерную геометрию разработан новый итерационный алгоритм Г-П для веерной системы сбора данных. Результаты восстановления томограмм, полученные при использовании веерного Г-П, являются лучшими среди алгоритмов рассмотренных в данной диссертации.

Публикации в журналах списка ВАК

[1] Пикалов В.В., **Казанцев Д.И.** Свойства регуляризованного алгоритма Гершберга–Папулиса в задаче веерной томографии // Вычислительные технологии. — 2008. — Т. 13, № 6. — С. 121–133.

Публикации в прочих рецензируемых журналах

[2] Пикалов В.В., **Казанцев Д.И.**, Голубятников В.П. Обобщение теоремы о центральном сечении на задачу веерной томографии // Вычислительные методы и программирование. — 2006. — Т. 7, № 2. — С. 180–184.

[3] Пикалов В.В., **Казанцев Д.И.** Итерационное восстановление возмущения синограммы в пространстве Радона для задачи стеганографии // Вычислительные методы и программирование. — 2008. — Т. 9, № 1. — С. 1–9.

Публикации в трудах конференций

[4] **Казанцев Д.И.**, Зеркаль С. М. Преобразование Радона в полосе с веерной системой сбора данных и его обращение применительно к сейсмической томографии // Междунар. конф. “Математические методы в геофизике – ММГ”. — Новосибирск, 2003. — С. 208–212.

- [5] **Kazantsev D.**, Salov G., Pyatkin V. Statistical detection of defects in radiographic images of welds. // Proc. 16th World Conference on Nondestructive Testing. Montreal, Canada, August 30–September 3, 2004 (CD ROM). — № TP43. — Montreal, 2004. — P. 1–6.
- [6] **Kazantsev D. I.** Inversion formula for Radon transform on strip with fan beam data // Abstr. Intern. Conf. “Perspectives in Inverse Problems”. 31 May–5 June, 2004, Helsinki: Finland. — P. 25.
- [7] **Kazantsev D. I.** Radon Transform on Strip and its Inversion // Abstr. Intern. Conf. “Applied Inverse Problems”. Royal Agricultural College: Cirencester, UK, June 26–39, 2005. — P. 10–13.
- [8] **Kazantsev D.**, Salov G., Pyatkin V. Statistical Detection of Longitudinal and Circular Defects in Radiographic Images of Welds // Abstr. Annual QNDE Conf. “Review of Progress in Quantitative NDE”. Bowdoin College: Brunswick, Maine, USA, July 31–August 5, 2005. — P. 115 .
- [9] Pickalov V.V., **Kazantsev D.I.**, Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. Considerations on iterative algorithms for fan-beam tomography scheme // Proc. 4-th World Congress on Industrial Process Tomography. Aizu, Japan, 5-8 September 2005. — Aizu, 2005. — Vol. 2. — P. 687–690.
- [10] Pickalov V.V., **Kazantsev D.I.**, Nepomnyashchiy A.V. Tomographic image reconstruction using Neumann decomposition series // Proc. Intern. Conf. Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics, Novosibirsk: July 20-25, 2007, Section 3. 2007. — P. 1–5.
- [11] Pickalov V., **Kazantsev D.** Iterative Gerchberg-Papoulis algorithm for fan-beam tomography // Proc. 2008 IEEE Region 8 Intl. Conf. SIBIRCON 2008 (Novosibirsk, Russia, July 21–25, 2008). — Novosibirsk, IEEE, 2008. — P. 218–222.
- [12] **Казанцев Д.И.**, Пикалов В.В., Пяткин В.П. Исследование двух итерационных алгоритмов верной томографии // Междунар. конф. по математическим методам в геофизике “ММГ-2008”. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2008.
- [13] **D. I. Kazantsev**, V. V. Pickalov. Fan-Beam Tomography Iterative Algorithm Based on Fourier Transform // Nuclear Science Symposium Medical Imaging Conference IEEE 19-25 October 2008, Dresden: Germany. Book of abstracts. — P. 406, M06-319.

Лицензия ИД № 02202 от 30 июня 2000 г.

Подписано в печать 25.12.2008 г.

Формат бумаги $60 \times 84^1/16$ Объем 1,0 п. л. 0,9 уч.-изд. л.

Тираж 100 экз.

Заказ №

ООО «ОМЕГА ПРИНТ», НОВОСИБИРСК-90, ПР. ЛАВРЕНТЬЕВА, 6