УДК 519.23

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Бахрушин В.Е.
Классический приватный университет, г. Запорожье, Украина
Vladimir.Bakhrushin@zhu.edu.ua

Проведено тестирование предложенного автором ранее статистического критерия проверки гипотезы о наличии дифференциальной связи на колебательных системах с такими связями. Рассматриваемый критерий основан на использовании коэффициента парной корреляции Пирсона для оценки связи между одной из исходных выборок и вспомогательным рядом, полученным численным интегрированием второй выборки. Подтверждена возможность его использования при исследовании различных типов колебательных систем.

Введение

В работе [1] нами был предложен статистический критерий для проверки гипотезы о наличии линейной дифференциальной связи вида:

$$f_1(x) = kf_2'(x), \tag{1}$$

между двумя выборками. Известно, что дифференциальные связи такого типа часто встречаются в различных физических и технических системах.

В частности, гармонические колебания описываются [2] уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

где x – смещение от положения равновесия, а ω – частота колебаний.

В случае электрического колебательного контура $x = q$ – имеет смысл электрического заряда, $I = \frac{dq}{dt}$ – сила тока, а $U = \frac{dI}{dt}$ – разность потенциалов. Величины силы тока и разности потенциалов легко измеряются и при малых погрешностях измерений связаны между собой соотношением вида (1) с $k \approx 1$ (небольшие отклонения обусловлены в этом случае погрешностями измерений).

Другим примером величин, между которыми может существовать линейная дифференциальная связь, является пара "внутреннее трение – динамический модуль упругости". Внутреннее трение, характеризует способность материала рассеивать энергию механических колебаний. Его температурная и частотная зависимости во многих случаях имеют вид некоторого пика. Соответствующие зависимости для динамического модуля упругости имеют вид S-образных кривых, точка перегиба которых близка к точке максимума внутреннего трения. В этом случае наличие связи не следует непосредственно из теоретических моделей. Однако в работе [3] на основе анализа результатов одновременных измерений температурных зависимостей динамического модуля нормальной упругости и внутреннего трения сплавов внедрения на основе ниобия в области релаксации Снука было показано, что производная модуля и внутреннее трение изменяются с ростом температуры однотипно (с точностью до знака). Пример такой связи показан на рис. 1.

Различные типы дифференциальных связей встречаются во многих других природных системах и широко используются в различных областях техники [4 – 6]. Однако в реальных системах наличие связи может маскироваться влиянием неконтролируемых факторов и погрешностями измерений. Поэтому актуальным является вопрос о разработке статистических методов проверки гипотез о существовании дифференциальных связей в реальных системах.

Целью данной работы являлась проверка предложенного в [1] статистического критерия наличия линейной дифференциальной связи при исследовании колебательных систем.

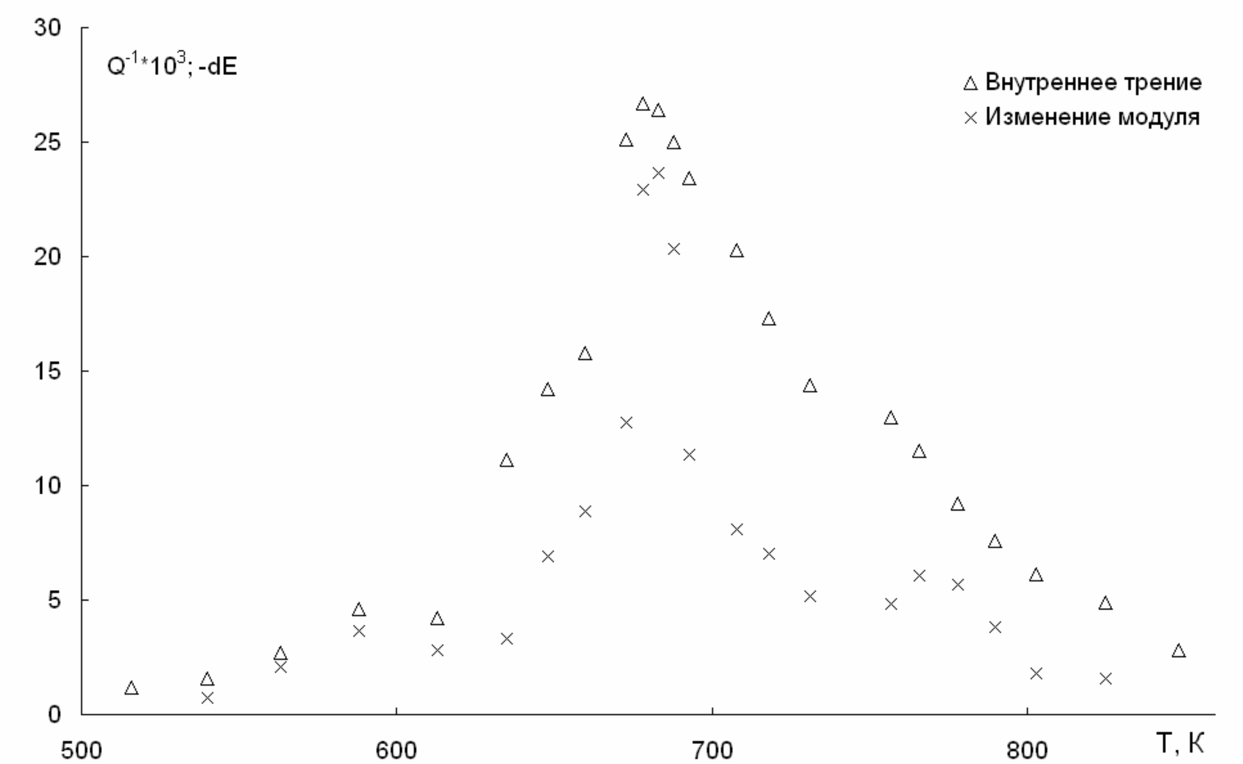

Рис. 1. **Температурные зависимости внутреннего трения и производной динамического модуля нормальной упругости сплава Nb – 12 ат. % W – 0,3 ат. % N**

1. Описание критерия

Идея метода проверки гипотезы о наличии линейной дифференциальной связи вида:

$$f_1(x) = kf_2'(x) + c \tag{3}$$

состоит в поиске преобразования, позволяющего заменить выборку $f_1(x_i)$ новой выборкой y_{1i} такой, чтобы существовала линейная связь $y_{1i} = a_1 f_2(x_i) + b_1$. Необходимое преобразование может быть получено с использованием численного интегрирования методом трапеций [7]. Тогда:

$$\begin{aligned} &y_{11} = f_2(x_1); \\ &y_{1j} = y_{1\,j-1} + \left(f_1(x_{j-1}) + f_1(x_j)\right)\left(x_j - x_{j-1}\right)/2; \quad j = 2,\dots,n, \end{aligned} \tag{4}$$

где n – объемы выборок.

Расчетное значение критерия получаем по формуле для вычисления парного коэффициента корреляции Пирсона между выборками $f_2(x_i)$ и y_{1i} [8]:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{1i}-\overline{y_1}\right)\left(f_2\left(x_i\right)-\overline{f_2}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{1i}-\overline{y_1}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(f_2\left(x_i\right)-\overline{f_2}\right)^2}}, \tag{5}$$

где $\overline{y_1}$, $\overline{f_2}$ – соответствующие средние значения.

Расчетное значение критерия может изменяться в пределах от –1 до +1. При этом его близость по модулю к единице свидетельствует о наличии сильной линейной дифференциальной связи, а близость к нулю – об отсутствии связи или ее существенной нелинейности.

2. Дифференциальная связь между характеристиками колебательных систем

Для проверки предложенного критерия были рассмотрены две тестовые задачи.

В первой задаче с помощью пакета Matlab Simulink была построена модель вынужденных колебаний с трением, при которых на вход подается синусоидальная внешняя сила (рис. 2). Эта модель соответствует дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \omega_1{}^2 x = f_0 \sin\left(\omega_2 t + \varphi\right). \tag{6}$$

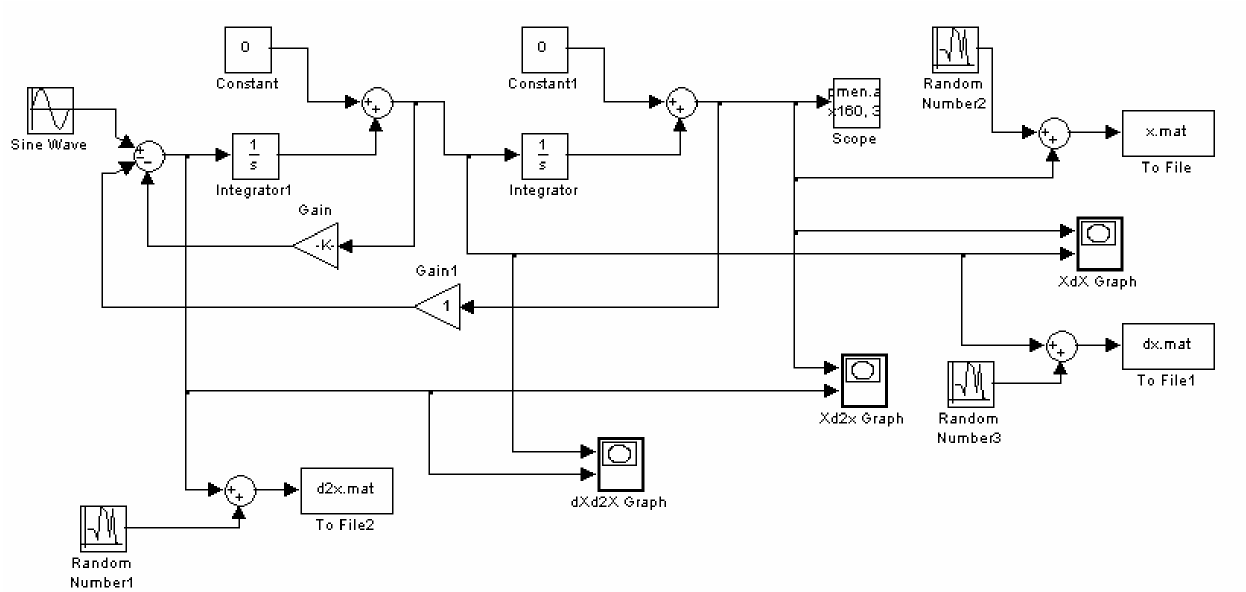

Рис. 2. **Модель колебательной системы**

На регистрирующие устройства дополнительно подаются случайные величины, имеющие нормальный закон распределения со средним значением 0 и стандартным отклонением 0,5.

На рис. 3 показана корреляция между значениями $y_1\left(t_j\right)=\int_0^{t_j} f_1\left(t\right)dt$ и $f_2\left(t_j\right)$, где $f_1\left(t\right)=\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon$, $f_2\left(t\right)=\frac{dx}{dt}+\varepsilon$, ε – случайная величина для случая, когда $\alpha = 0{,}01$; $\omega_1 = \omega_2 = 1$; $f_0 = 10$; $\varphi = 0$.

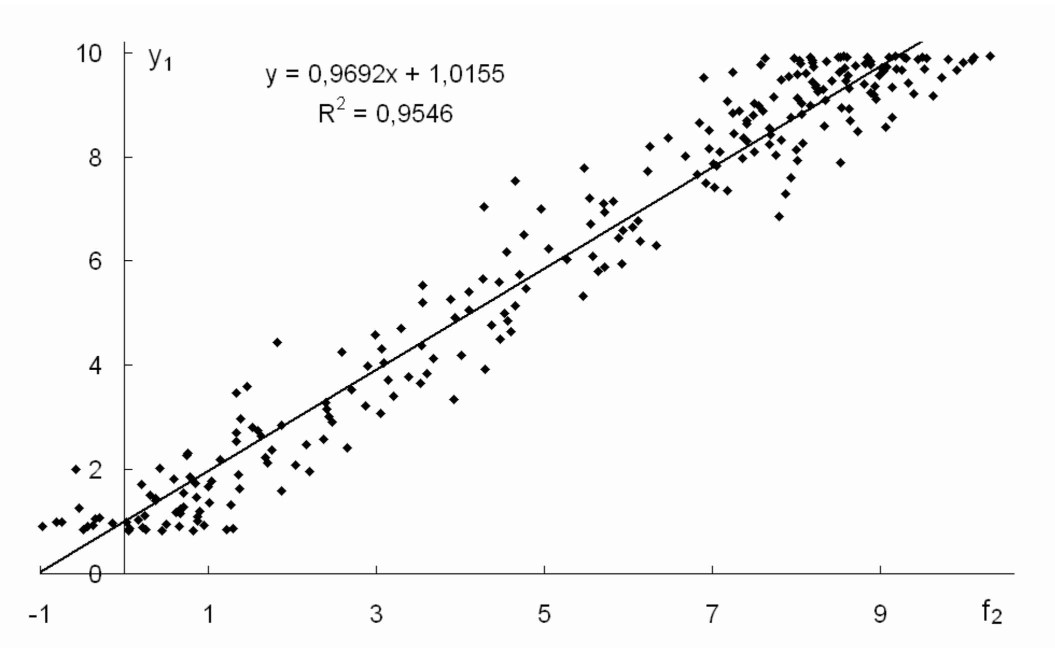

Рис. 3. Корреляция между величинами $y_1\left(t_j\right)=\int_0^{t_j} f_1(t)dt$ и $f_2\left(t_j\right)$ для модели колебательной системы, представленной на рис. 2.

В качестве второй тестовой задачи были взяты реальные экспериментальные данные о температурных зависимостях внутреннего трения и динамических модулей нормальной упругости сплавов внедрения на основе ниобия. Измерения проводили методом изгибных колебаний вертикального консольно закрепленного образца.

На рис. 4 для трех образцов сплавов Nb – 12 ат.% W – N с различными концентрациями азота показана корреляция между величинами $y_1\left(T_j\right)=\int_{T_0}^{T_j} f_1(T)dT$ и $f_2\left(T_j\right)$, где $f_1(T)=Q^{-1}(T)$ – внутреннее трение, а $f_2(T)=E(T)$ – динамический модуль нормальной упругости, T_0 – начальная температура. Видно, что во всех случаях рассматриваемый критерий показывает наличие сильной линейной дифференциальной связи между исследуемыми параметрами, что соответствует результатам качественного анализа, представленным на рис. 1.

Выводы

Полученные результаты подтверждают возможность использования рассматриваемого статистического критерия наличия дифференциальной связи между выборками для изучения колебательных физических систем разного типа.

Литература

1. Бахрушин В.Є. Критерій для перевірки гіпотези про наявність зв'язку типу $f_1(x) = kf'_2(x)$ // Складні системи і процеси. – 2010. – № 1. С. 3 – 5.

2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М. : Наука, 1983. – 687 с.

3. Бахрушин В.Є., Чиріков О.Ю. Моделі та механізми механічної релаксації, пов'язаної з перебудовою домішково-дефектної підсистеми кристалів. – Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2004. – 140 с.

4. Михайлов В.С. Теория управления. – К.: Выща школа, 1988. – 312 с.

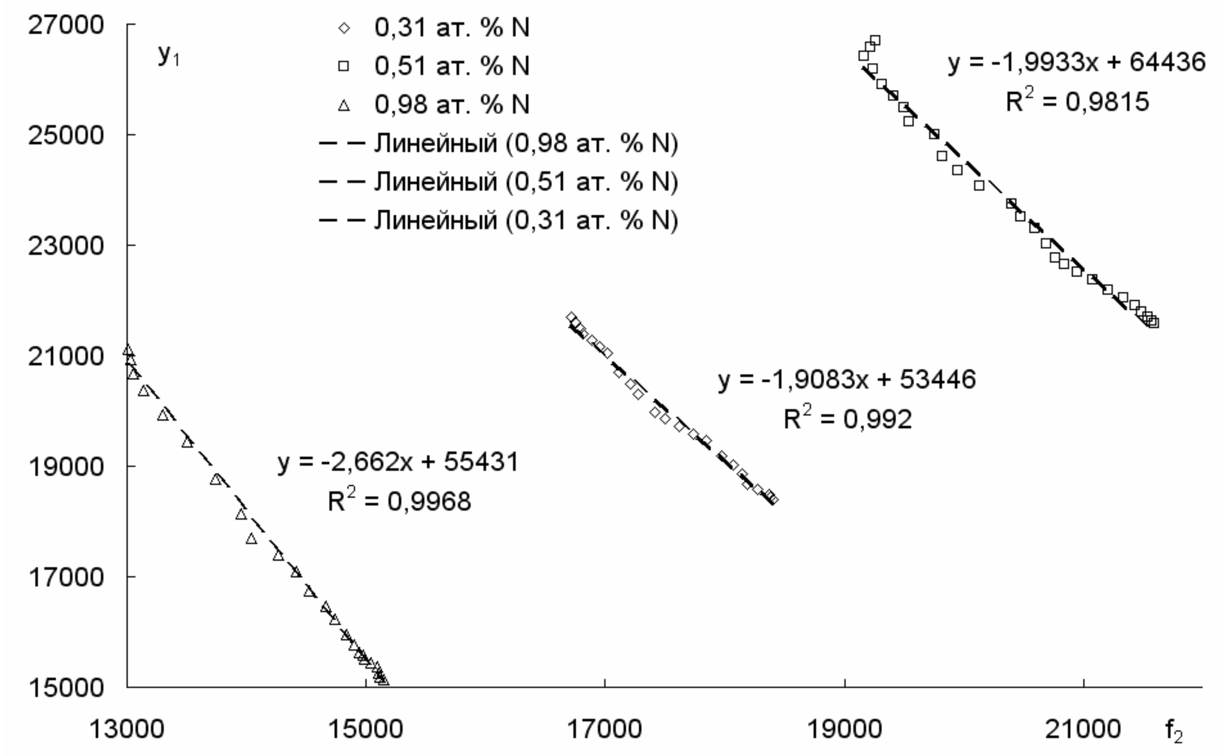

Рис. 4. Корреляция между величинами $y_1\left(t_j\right)=\int_0^{t_j} f_1\left(t\right)dt$ **и** $f_2\left(t_j\right)$ **характеризующими дифференциальную связь между внутренним трением и динамическим модулем нормальной упругости.**

5. Адрианов А.Л. Обобщенные дифференциальные соотношения на скачке уплотнения // Вопросы атомной науки и техники: Математическое моделирование физических процессов. – 2009. – Вып. 4. – С. 22 – 30.

6. Карцев В.Н., Панкин К.Е., Батов Д.В. О взаимосвязи внутреннего давления и плотности энергии когезии // Журнал структурной химии. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 283 – 290.

7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 632 с.

8. Бахрушин В.Є. Аналіз даних. – Запоріжжя, ГУ "ЗІДМУ", 2006. – 126 с.