ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Запорожский институт государственного и муниципального управления»

В.Е. Бахрушин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Запорожье
2003

ББК 22.161.1
УДК 517.2
Б30

Печатается по решению ученого совета ГУ "ЗИГМУ"
Протокол № 10 от 25.06.2003 г.

Рецензенты: **С.Ф. Шишканова**, профессор, доктор технических наук, заведующая кафедрой математического анализа Запорожского государственного университета;
Г.В. Корнич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики Запорожского национального технического университета

Бахрушин В.Е. Дифференциальное исчисление: Учебное пособие для студентов направления 0802 – Прикладная математика. – Запорожье: ГУ "ЗИГМУ", 2003. – 196 с.
ISBN 966-8227-05-0

В пособии приведены основные теоретические сведения первой части курса "Математический анализ" по темам "Действительные числа", "Предел последовательности", "Предел функции", "Производная функции". Пособие подготовлено в соответствии с программой подготовки бакалавров прикладной математики. В книге приведены краткие биографические данные об ученых, чьи научные результаты изучаются в курсе, и выдающихся математиках, чьи жизнь и творчество были связаны с Украиной, а также краткий русско-украинско-английский словарь математических терминов.

Бахрушин В.Є. Диференціальне числення: Навчальний посібник для студентів напряму 0802 – Прикладна математика. – Запоріжжя: ГУ "ЗІДМУ", 2003. – 196 с.

У посібнику наведено основні теоретичні відомості першої частини курсу "Математичний аналіз" з тем "Дійсні числа", "Границя послідовності", "Границя функції", "Похідна функції". Посібник підготовлений відповідно до програми підготовки бакалаврів прикладної математики. У книжці наведено стислі біографічні дані про вчених, чиї наукові результати вивчаються в курсі, і видатних математиків, чиї життя і творчість були пов'язані з Україною, а також короткий російсько-українсько-англійський словник математичних термінів.

ББК 22.161.1
УДК 517.2

ISBN 966-8227-05-0

© Бахрушин В.Е., 2003
© Гуманитарный университет "ЗИГМУ", 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

1. Элементы теории множеств и отображений 11
2. Действительные числа и их свойства 14
3. Числовые последовательности и их пределы 21
4. Критерии сходимости последовательностей 30
5. Подпоследовательности. Бесконечные числовые множества 34
6. Функции. Способы задания функций 43
7. Предел функции 53
8. Непрерывность функции в точке 62
9. Непрерывность функции на отрезке 68
10. Элементарные функции и их свойства 76
11. Производная функции 85
12. Дифференциал функции. Производные сложной и обратной функции 93
13. Критерии возрастания и убывания функции. Критерии существования экстремумов 98
14. Формула Тейлора. Ряд Тейлора 104
15. Выпуклость и вогнутость графика функции. Асимптоты 114
16. Векторные функции в n-мерном евклидовом пространстве 124
17. Производная вектор-функции 130
18. Функции многих переменных и их пределы 139
19. Непрерывность функций многих переменных 146
20. Дифференцирование функций многих переменных 152
21. Производная сложной функции. Градиент функции 163
22. Формула Тейлора. Экстремумы функции 168

Приложение 1. Таблица значений C_n^k 173
Приложение 2. Краткий русско-украинско-английский словарь математических терминов 174
Приложение 3. Буквы латинского и греческого алфавитов 180
Приложение 4. Биографический справочник 182

Список рекомендуемой литературы 195

Введение

Математика является одной из древнейших наук и основой современного научного знания. Известно высказывание: "В каждой науке содержится столько науки, сколько в ней содержится математики". Современная математика занимается изучением свойств специальных абстрактных объектов, которые могут рассматриваться как идеализированные модели реальных материальных тел, физических, технических, социальных, экономических, организационных и других систем. Первые известные нам математические работы относятся к древнейшим цивилизациям - шумерской, древнеегипетской и др. Уже в те времена возникли такие математические объекты, как числа, простейшие геометрические фигуры и тела, а также были установлены некоторые их свойства и правила действий над ними. Впоследствии к ним добавились такие объекты, как функции, множества, векторы, матрицы, тензоры, группы, структуры, кольца, поля, тела и многие другие. Каждый из них первоначально возникал как ответ на необходимость решения некоторой практической задачи. Задача подсчета предметов привела к возникновению чисел, задачи об измерении расстояний, площадей и объемов - к понятиям линий, плоскостей, тел и т.д. Однако особенностью математических объектов является то, что они могут применяться для изучения не только тех задач, при решении которых они возникли первоначально, но и при решении многих других задач, относящихся к самым разным областям человеческого знания.

С древнейших времен вся математика состояла из трех разделов - алгебры, арифметики и геометрии. Уже во II тысячелетии до нашей эры в Древнем Вавилоне умели решать квадратные и биквадратные уравнения, системы линейных уравнений, простейшие кубические уравнения. В XVII - XVIII веках потребность описания движения тел привела к возникновению математического анализа, а потребность в развитии методик социального и экономического прогнозирования - к возникновению теории вероятностей. Позже возникли такие направления математики, как дискретная математика, комбинаторика, математическая логика, математическая статистика, теория множеств, теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория катастроф, теория случайных процессов, теория управления, функциональный анализ и др. Получили дальнейшее развитие и существенно изменились также и традиционные разделы математики. Например, развитие элементарной евклидовой геометрии привело к возникновению таких новых направлений, как аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, комбинаторная геометрия, проективная геометрия, теория многообразий, топология, неевклидовы геометрии и других. Развитие вычислений способствовало выделению таких понятий, как отрицательные, иррациональные и мнимые числа, векторы, матрицы, тензоры и т.п. Трехмерное пространство обобщается в современной математике на любое число измерений. В этих многомерных пространствах вводятся новые пространственноподобные отношения - длина, расстояние, ортогональность и другие. Наряду с

евклидовым пространством рассматривается множество неевклидовых пространств. В качестве переменных выступают не только числовые величины, но также и функции, которые рассматривают как элементы функциональных пространств.

Характерными чертами современной математики являются высокая степень обобщения и абстракции. Согласно В.П. Сигорскому, **современная математика - это наука о совокупностях объектов самого общего вида и любых возможных отношениях между ними**.

В математике наряду с естественными языками используются искусственные языки, формализация которых достигла очень высокого уровня. Иногда саму математику рассматривают как специально организованный язык. Естественные языки трудно использовать в научных целях из-за их громоздкости, неоднозначности слов и неточности грамматик. Эти недостатки устраняют построением формального языка, состоящего из символов, которые обозначают математические объекты, переменные, а также операции над объектами и отношения между ними. Любая совокупность символов, удовлетворяющая определенным требованиям, является в таком языке предложениями. Предложениями будут, например, формулы, уравнения, неравенства и т.п. Особенность языка математики заключается в том, что все переходы от одних предложений к другим совершаются по строго определенным правилам, которые не допускают двусмысленного толкования.

Еще в Древней Греции произошло разделение математики на так называемые чистую и прикладную математику. В современной математике выделяют содержательную математику, формальную математику, метаматематику и прикладную математику. При этом первые три области относят обычно к чистой математике. **Содержательная математика** занимается изучением свойств и отношений абстрактных объектов, называемых конструктами. Конструкты являются идеализацией реальных физических, социальных, экономических и других объектов и вводятся путем определения их свойств. Примерами простейших конструктов являются точка, линия и т.д. **Формальная математика** изучает отношения между объектами в чистом виде, отвлекаясь от конкретной природы объектов. Для этого она вводит множество символов (алфавит) и правила построения на их основе терминов и предложений (аксиом, теорем и т.п.). **Метаматематика** изучает конечные последовательности символов с операциями, которые представляют собой термины и предложения.

Под **прикладной математикой** понимают область математики, занимающуюся разработкой и применением математических методов для решения задач информатики, естествознания, техники, экономики, социологии, управления, лингвистики и других наук. О значении математических методов в этих науках свидетельствуют уже сами названия таких научных направлений, как математическая физика, математическая экономика, математическая лингвистика и т.д.

Все методы современной математики можно разделить на три основные группы - аналитические, графические и численные. Аналитические методы по-

зволяют провести исследование объекта в общем виде, не зависящем от числовых значений конкретных параметров. Они обычно дают ответ на вопрос, существует ли вообще решение поставленной задачи, и если да, то в каком диапазоне значений параметров. Аналитические методы существенно облегчают поиск экстремумов, оптимальных решений, корней уравнений и т.п. Они также позволяют контролировать точность вычислений. Вместе с тем большинство задач не может быть решено аналитически. Кроме того, часто аналитическое решение является настолько громоздким, что его нельзя использовать на практике. В некоторых случаях аналитические решения существуют и могут быть исследованы, но их нельзя использовать при практических расчетах из-за накопления больших ошибок, связанных с округлением числовых значений при вычислениях.

Графические методы являются наглядными, но неточными. Они используются обычно в тех случаях, когда требуется качественная характеристика происходящих процессов. Графические методы ограничены также возможностями построения графиков на плоскости или в пространстве, поэтому они теряют наглядность при необходимости исследования функций в многомерных пространствах.

Численные методы являются наиболее общими. Схема вычислений задается алгоритмом, представляющим собой последовательность действий, которую требуется выполнить для достижения результата. В зависимости от характера вычислительного процесса, численные методы делят на прямые и итерационные. В прямых методах результат получают путем последовательных операций над числами, и его точность зависит только от точности промежуточных вычислений. В итерационных методах результат получается путем последовательного нахождения приближенных значений, вычисляемых по одной и той же схеме. Метод должен сходиться к искомой величине. При этом точность результата может быть задана заранее. Важной характеристикой итерационных методов является скорость сходимости, которая показывает, сколько итераций необходимо выполнить для получения результата с заданной точностью.

Для решения прикладных задач особое значение имеют два направления прикладной математики - математическое моделирование и статистический анализ. Задачей математического моделирования является разработка методов количественного и качественного описания структуры, поведения и свойств изучаемых систем, их изменения с течением времени в результате внутренних процессов и внешних воздействий. Обычно целью моделирования является прогнозирование изменения состояния системы с течением времени в зависимости от ее начального состояния и внешних воздействий. Например, при математическом моделировании социальных процессов типичной является задача прогнозирования изменения демографической и социальной структуры общества с течением времени. Такое прогнозирование необходимо для того, чтобы планировать объемы производства продуктов питания и одежды, выпуск специалистов различных специальностей высшими учебными заведениями и т.п. Еще одной важной задачей является моделирование общественного мнения по

различным вопросам и его динамики, в частности прогнозирование результатов различных выборов и референдумов. Примерами успешного применения методов математического моделирования к социальным и социально-экономическим процессам являются разработка модели мировой динамики Дж. Форрестером и его последователями, модели Пелопоннесских войн и др. Результаты моделирования можно использовать для оптимизации систем, выявления проблем, которые могут возникнуть при их развитии, и подготовки вариантов решений по управлению сложными техническими, социальными и экономическими системами и процессами.

Реальные физические, технические, социальные и прочие объекты обладают бесконечным множеством свойств, а также бесконечным множеством внутренних и внешних связей. Модель представляет собой идеализацию реального объекта, в которой учтены только существенные для анализируемых процессов свойства и связи. В зависимости от решаемой задачи, существенными могут быть различные свойства и связи реального объекта. Соответственно, для его описания должны использоваться различные модели. Например, для описания движения Земли относительно Солнца Землю можно считать материальной точкой. При этом существенным будет такое ее свойство, как масса. Существенным будет также гравитационное взаимодействие Земли с Солнцем, Луной и большими планетами Солнечной системы. Если же мы хотим составить тепловой баланс Земли, то следует учесть такие ее свойства, как площадь поверхности, отражательная и излучательная способности материков и океанов, а также поверхностное и объемное распределение температуры. Из связей существенными будут потоки энергии, поступающие от Солнца и из внутренних слоев Земли, энергия, рассеиваемая в приповерхностном слое в результате жизнедеятельности животных и растений, а также производственной деятельности.

К моделям предъявляются два противоречивых требования. С одной стороны, модель должна достаточно точно отражать основные черты поведения реальных объектов. С другой стороны, работа со сложными моделями часто требует чрезмерных затрат времени и других ресурсов, а иногда вообще оказывается невозможной. Поэтому модель должна быть по возможности простой.

В настоящее время разработано большое количество стандартных моделей, обеспеченных математическим аппаратом, дающим возможность изучать модели, используя типовые математические методы, алгоритмы и программное обеспечение. При изучении реальных систем стремятся использовать именно такие типовые модели. Их примерами являются функциональные зависимости между параметрами на основе элементарных функций (полиномиальные, экспоненциальные, логарифмические и т.п.), нормально распределенные случайные величины, марковские процессы и другие.

Числовые значения, с которыми приходится иметь дело при практических вычислениях в экономике, менеджменте, естественных науках и других областях деятельности, как правило, известны с некоторой неточностью. Это связано с тремя основными причинами. Во-первых, все числа, являющиеся результатами измерений, содержат погрешность, обусловленную несовершенст-

вом измерительной аппаратуры и ошибками человека, выполняющего измерения. Во-вторых, сами измеряемые величины могут быть непостоянными. Например, многие физические свойства тел (длина, объем, плотность, удельное электрическое сопротивление и др.) зависят от температуры, давления и других внешних условий. В-третьих, при обработке числовых значений последние обычно округляются, так как работа с точными числами требует слишком больших затрат времени и часто оказывается практически неосуществимой даже при использовании современных ЭВМ. В связи с этим, обычные методы установления функциональной зависимости между различными величинами оказываются неприменимыми. Для решения задач, связанных с планированием и обработкой результатов экспериментов и наблюдений, был разработан ряд методов статистического анализа. Типовыми задачами статистического анализа являются выявление различий исследуемых систем и процессов по исследуемому признаку, определение факторов, которые оказывают на них существенное влияние, выявление взаимосвязей между различными параметрами системы или влияющими на нее факторами, подбор параметров эмпирических зависимостей и т.д.

Существенное место в современной науке занимает такое новое междисциплинарное направление, как системный анализ, занимающийся изучением общих свойств систем различной природы и разработкой методов принятия решений, касающихся сложных систем и процессов разной природы с противоречивыми и конфликтующими целями и критериями.

В 70-80-е годы крупная научная школа в области системного анализа была создана в Украине академиками В.М. Глушковым и В.С. Михайлевичем. В этот период были получены значительные результаты в области теории автоматического управления, теории идентификации сложных систем, методов оптимизации, стохастического программирования, распознавания образов, искусственного интеллекта. Эти результаты использовались для создания систем управления сложными техническими системами (космическими летательными аппаратами, ракетами, атомными электростанциями, …), производственными системами, развитием народного хозяйства и т.п. Сегодня наиболее актуальными для Украины являются исследования, связанные с системным анализом социальных, политических, экономических и экологических процессов. Методология системного анализа включает такие этапы, как составление плана исследования, обработка результатов экспериментов и наблюдений, качественный и количественный анализ, принятие решения и т.д. При этом используется богатый и разнообразный арсенал методов современной математики, в том числе вычисление предикатов, градиентная фильтрация, методы искусственного интеллекта, минимизация матриц, нечеткая логика, статистический анализ, сетевые методы, теория принятия решений, теория рисков и другие.

Математические методы широко используют не только научные работники, но также специалисты и менеджеры, работающие в самых различных областях. Несмотря на большое разнообразие конкретных форм их деятельности, центральное место в ней занимают процессы обработки данных и принятия ре-

шений. Такими данными могут быть влияние химического состава на прочностные свойства стали, результаты контроля выпускаемой продукции, динамика котировок акций, материалы опроса общественного мнения и т.д. На основе анализа этих данных принимаются решения о марке стали, необходимой для изготовления конкретного изделия, мерах по повышению качества продукции, покупке или продаже акций, принятии законов и нормативных актов. Процессы обработки данных и принятия решений требуют применения математических методов, уровень которых зависит от сложности решаемых задач. В каждой конкретной области основу математического аппарата составляют математические теории, которые переформулированы и интерпретированы в терминах соответствующей области деятельности. В настоящее время непосредственно в приложениях все чаще используется математическая терминология.

С древнейших времен математика является основой инженерных наук и технического творчества. Уже в античном мире были известны правило рычага, закон Архимеда и другие физические законы, формулирующиеся как математические соотношения между определенными величинами и находящие непосредственное применение в практической деятельности людей. Начиная с XVII века, математика становится важнейшим инструментом, используемым в технике и технологии. Особенно большое значение математические методы играют в так называемых наукоемких производствах, таких как авиастроение, ракетная техника, атомная энергетика и т.п.

Математическая экономика занимается изучением математических моделей экономических объектов и процессов, а также разработкой математических методов их исследования. Примерами типичных задач математической экономики являются составление оптимальных планов производства продукции, выбор наиболее экономичных маршрутов перевозок и т.п. Математическая экономика занимается также теоретическим анализом моделей экономических систем и процессов.

Изучение высшей математики в университете начинается с основ математического анализа, алгебры и геометрии. На сведениях, полученных студентами при изучении этих дисциплин, будут базироваться последующие курсы их фундаментальной и специальной подготовки. Данное пособие включает разделы "Действительные числа", "Предел последовательности", "Предел функции", "Производная функции", "Дифференциальное исчисление функций многих переменных". Пособие написано на основе курса лекций, который в течение ряда лет читается автором в Гуманитарном университете "ЗИГМУ" для студентов специальности 8.080203 – Системный анализ и управление. В его основу положена концепция академика С.М. Никольского. При подготовке пособия автор использовал материалы книг, указанных в списке рекомендуемой литературы.

Для удобства работы с пособием определения набраны курсивом, а определяемые понятия дополнительно выделены полужирным шрифтом. Формулировки теорем выделены полужирным шрифтом, окончания доказательств помечены значком ☺.

В математике различают прямые, обратные и противоположные теоремы. Предположим, что мы сформулировали такую теорему: "Если справедливо утверждение А, то справедливо также и утверждение В". Обратной ей будет следующая теорема: "Если справедливо утверждение В, то справедливо также утверждение А", а противоположной – теорема: " Если утверждение А не справедливо, то утверждение В также не справедливо". В математической логике доказывается, что из справедливости прямой теоремы не следует автоматически справедливость противоположной и обратной теорем, однако следует справедливость теоремы, которая противоположна обратной. Для рассматриваемого случая эту теорему можно сформулировать следующим образом: "Если утверждение В не справедливо, то утверждение А также не справедливо". При подготовке к занятиям студентам рекомендуется самостоятельно сформулировать для каждой теоремы противоположное, обратное и противоположное обратному утверждения, а также проверить, являются ли первые два из них справедливыми.

Автор благодарен рецензентам рукописи профессору С.Ф. Шишкановой и доктору физико-математических наук Г.В. Корничу, а также коллегам В.М. Буйницкой, И.М. Нацюку, А.В. Савранской, Л.Н. Сергеевой, Ю.В. Гончаренко за помощь в работе и обсуждение материалов книги.

1. Элементы теории множеств и отображений

Математическое понятие множества сформировалось из таких привычных понятий, как совокупность, класс, семейство и т.д. Понятие множества является одним из основных понятий современной математики и используется почти во всех ее разделах.

***Множеством** в математике называют любое собрание (совокупность) каких-либо объектов (предметов), которые называют **элементами** множества.* Обычно множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита или готическим шрифтом: A, R и т.д. Примеры множеств: множество студентов в группе, множество столов в аудитории, множество натуральных чисел и т.д.

*Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют **пустым множеством** ($\varnothing$).* Роль пустого множества аналогична роли числа нуль. Это понятие можно использовать для обозначения совокупностей элементов, которые заведомо не существуют, например Президентов Украины, избранных в возрасте до 35 лет, действительных корней уравнения $x^2 = -5$ и т.д. Однако более существенным мотивом введения пустого множества является то, что во многих случаях заранее неизвестно, содержит ли то или иное множество какие-либо элементы.

*Множество, которое содержит только один элемент, называют **единичным (одноэлементным) множеством**.*

Тот факт, что некоторый объект x является элементом множества A (принадлежит множеству A), записывают следующим образом: $x \in A$. Если объект y не является элементом множества A (не принадлежит множеству A), это записывают так: $y \notin A$ либо $\overline{y \in A}$.

Множества могут содержать конечное или бесконечное число элементов. В первом случае множество называют ***конечным***, а во втором - ***бесконечным***. Конечное множество может быть задано перечислением всех его элементов. Бесконечные множества обычно задают указанием свойства, которым обладают все элементы данного множества, но не обладают никакие элементы, которые ему не принадлежат. Такое свойство называют ***характеристическим свойством*** данного множества, например можно задать бесконечное множество равносторонних треугольников. С помощью характеристического свойства можно задавать также и конечные множества, например множество спутников планеты Юпитер. Множества можно задавать также с помощью операций над другими множествами.

Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то A = B. В частности, упоминавшееся выше множество равносторонних треугольников будет состоять из тех же элементов, что и множество равноугольных треугольников.

Если из того, что $x \in A$, *следует, что* $x \in B$, *то говорят, что множество A является* ***подмножеством*** *множества B* $(A \subset B)$.

Любое непустое множество A содержит по крайней мере два подмножества: само A и пустое множество ($A \subset A$, $\varnothing \subset A$).

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$ и наоборот.

Если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов. Если два множества A и B имеют равное число элементов, то между этими элементами можно установить ***взаимно однозначное соответствие***, то есть составить из этих элементов пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n)$ такие, что в каждую пару входит один элемент из A и один элемент из B, причем каждый элемент входит в одну и только одну пару.

Для сравнения бесконечных множеств используется понятие мощности множества. *Говорят, что множества A и B имеют одинаковую* ***мощность****, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.* Далее будет показано, что можно, например, установить взаимно-однозначное соответствие между множествами натуральных и рациональных чисел. Но известно, что множество натуральных чисел является подмножеством (частью) множества рациональных чисел. Таким образом, мы должны сделать вывод, что в теории бесконечных множеств часть не обязательно меньше целого.

Множества, имеющие ту же мощность, что и множество натуральных чисел, называют ***счетными****.*

Объединением (суммой) *множеств A и B* $(A \cup B, A + B)$ *называют совокупность всех элементов, входящих хотя бы в одно из этих множеств.*

Разностью *множеств A и B* $(A \setminus B, A - B)$ *называют совокупность всех элементов множества A, которые не входят в множество B.*

Пересечением *множеств A и B* $(A \cap B, AB)$ *называют совокупность элементов, которые одновременно входят и в множество A, и в множество B.*

Дизъюнктивной суммой (симметрической разностью) *множеств A и B* $(A + B,\ A \oplus B)$ *называется множество всех элементов, принадлежащих или A, или B, но не обоим множествам вместе.*

Операции над множествами часто изображают графически с помощью диаграмм Эйлера - Венна (рис. 1.1).

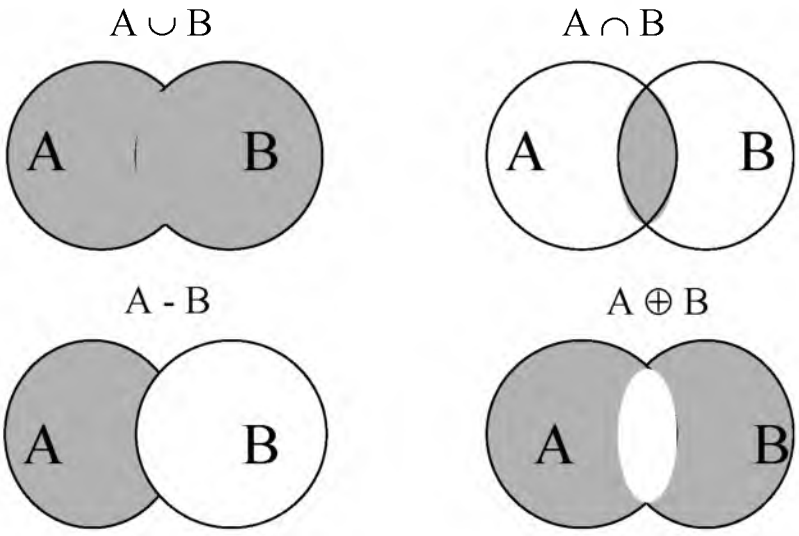


Рис. 1.1. Диаграммы Эйлера - Венна, иллюстрирующие понятия объединения, пересечения, разности и дизъюнктивной суммы множеств A и B

Пусть, например, $A = \{1,3,4,7\}$, $B = \{3,5,7,8\}$. Тогда $A \cup B = \{1,3,4,5,7,8\}$, $A - B = \{1,4\}$, $A \cap B = \{3,7\}$, $A + B = \{1,4,5,8\}$.

Для произвольных множеств A, B и C выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &A \cup B = B \cup A; \\ &A \cap B = B \cap A; \\ &(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); \\ &(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) . \end{aligned} \qquad (1.1)$$

2. Действительные числа и их свойства

Натуральными *называют те числа, которые получают в результате счета, т.е. 1, 2, 3, … .* Иногда во множество натуральных чисел вводится также число 0.

Натуральные числа можно складывать и умножать, получая опять натуральные числа. Операции вычитания и деления в пределах множества натуральных чисел возможны не всегда. Например, результаты выполнения операций 3 - 7, 4 : 9 не являются натуральными числами.

Натуральные числа, числа им противоположные и нуль образуют множество ***целых*** *чисел.*

Для двух целых чисел a и b всегда можно найти сумму a + b, разность a - b и произведение ab. Операция деления в пределах множества целых чисел выполнима не всегда. Не будут целыми числами, например, результаты деления 3 : 4, 5 : (-3), (-7) : 2 и т.д.

Числа, которые могут быть представлены в виде $\pm p/q$*, где p и q - целые,* $p \geq 0, q > 0$*, называют* ***рациональными числами****.*

Для двух рациональных чисел a и b всегда можно найти сумму a + b, разность a - b и произведение ab. Если $b \neq 0$, можно найти также отношение a/b. Однако в пределах множества рациональных чисел не всегда можно выполнить операции возведения в степень, извлечения корня и логарифмирования. Не будут, например, рациональными числами результаты выполнения следующих операций: $7^{1,25}$, $\sqrt[3]{2}$, $\log_7 3$ и т.п.

Два рациональных числа $\pm p_1/q_1$ и $\pm p_2/q_2$ ***равны*** *в том и только том случае, если их знаки совпадают и* $p_1 q_2 = p_2 q_1$. Отношение $\pm 0/q = 0$ не зависимо от знака и величины числа q.

Отношение p/q представимо в виде десятичного разложения $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$.

Дробь $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$ *называют* ***бесконечной****, если для любого натурального числа n найдется натуральное число m > n такое, что* $\alpha_m > 0$.

Для рациональных чисел возможны два вида десятичных разложений: конечное $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m 000\ldots$ и бесконечное периодическое $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m (\beta_1 \ldots \beta_k)$.

Иррациональным числом *называют произвольную бесконечную непериодическую десятичную дробь* $a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$*, где* α_0 *- целое неотрицательное число, а* α_k *- цифры.*

Объединение множества рациональных и множества иррациональных чисел образует множество ***действительных (вещественных) чисел,*** обозначаемое R. Между множеством действительных чисел и изображающими их точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому множество действительных чисел называют также числовой прямой $R \equiv]-\infty, +\infty[$. *Если дополнить множество действи-*

тельных чисел элементами $-\infty$ *и* $+\infty$, *получится множество* ***обобщенных действительных чисел*** $\overline{R}$.

Два числа $a=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ и $b=\pm\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$, *заданных бесконечными десятичными дробями, мы будем считать* ***равными*** *в том и только том случае, когда их знаки одинаковы и* $\alpha_k=\beta_k\ (k=0,1,2,\ldots)$. Например, будут равными числа 3,267(3) и 3,267(3). Числа 4,635478(5) и 4,635477(5) не равны, так как для них $\alpha_7\neq\beta_7$. О числах 2,678438594027… и 2,678438594027… нельзя априорно утверждать, что они равны или не равны, так как они заданы непериодическими бесконечными десятичными дробями и, следовательно, известны не точно.

Для двух положительных чисел $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ и $b=\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$, *заданных бесконечными десятичными дробями,* $\mathbf{a<b\ (b>a)}$, *если* $\alpha_0<\beta_0$ *или если найдется такое целое неотрицательное m, что* $\alpha_k=\beta_k\ (k=0,1,2,\ldots,m)$ *и* $\alpha_{m+1}<\beta_{m+1}$.

Пусть каждому неотрицательному целому числу n приведено в соответствие число x_n.

Совокупность чисел $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ *называют* ***последовательностью чисел (числовой последовательностью)***.

Последовательность называют ***возрастающей (убывающей)****, если для любого k выполняется неравенство* $x_k<x_{k+1}$ $(x_k>x_{k+1})$. *Последовательность называют* ***невозрастающей (неубывающей)****, если для любого k выполняется неравенство* $x_k\le x_{k+1}\ (x_k\ge x_{k+1})$.

Числовую последовательность называют ***ограниченной****, если существует такое число M, что для всех* $x_n\in\{x_n\}$ *справедливо неравенство* $|x_n|<M$. *Последовательность называют* ***ограниченной сверху (снизу)****, если для всех* $x_n\in\{x_n\}$ *справедливо неравенство* $x_n<M\ (x_n>M)$.

Говорят, что последовательность целых чисел x_k ***стабилизируется*** *к целому числу* ξ, *если найдется такое* k_0, *что* $x_k=\xi$ *для всех* $k>k_0$.

Если неубывающая (невозрастающая) последовательность целых чисел ограничена сверху (снизу) числом M (m), то она стабилизируется к целому $\xi\le M\ (\xi\ge m)$.

Рассмотрим последовательность десятичных дробей (только конечных или только бесконечных):

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\alpha_{10},\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots \\ a_2=\alpha_{20},\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots \\ a_3=\alpha_{30},\alpha_{31}\alpha_{32}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}. \qquad (2.1)$$

Правые части в (2.1) образуют бесконечную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{10}\alpha_{11}\alpha_{12}\dots \\ \alpha_{20}\alpha_{21}\alpha_{22}\dots \\ \alpha_{30}\alpha_{31}\alpha_{32}\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Будем говорить, что ***последовательность (2.1) стабилизируется к числу*** $a=\gamma_0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\dots$, *если для любого* $k=0,1,2,\dots$ *k-й столбец матрицы (2.2) стабилизируется к* γ_k.

Отрезком (сегментом) *с концами a и b* $(a<b)$ *называется множество чисел, удовлетворяющих неравенствам* $a\le x\le b$. Такой отрезок обозначается $[a,b]$.

Интервалом (открытым отрезком) *с концами a и b* $(a<b)$ *называется множество чисел, удовлетворяющих неравенствам* $a<x<b$. Интервал обозначают (a,b) или $]a,b[$.

Полуинтервалом (полуоткрытым отрезком) *с концами a и b* $(a<b)$ *называется множество чисел, удовлетворяющих неравенствам* $a\le x<b$ $(a<x\le b)$. Полуинтервалы обозначают $[a,b)$, $[a,b[$ либо $(a,b]$, $]a,b]$. Бесконечные интервалы и полуинтервалы обозначают: $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$.

Окрестностью конечной точки (конечного числа) a *называется множество всех точек x, удовлетворяющих неравенствам* $c<x<d$, *то есть любой интервал (c, d), содержащий точку a.*

Если $a=\infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то ***окрестностью точки a*** *называют множество всех x, удовлетворяющих неравенству* $|x|>M\,(M>0)$ *(или x > M, или x < -M).* Произвольная окрестность точки a обозначается $\cup(a)$. Пересечение двух окрестностей точки a $\cup_1(a)\cap\cup_2(a)$ также является окрестностью точки a.

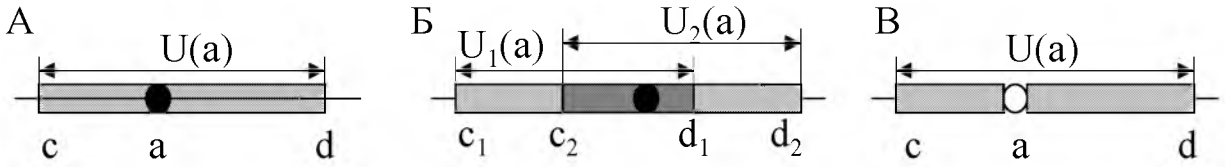


Рис. 2.1.

Произвольный интервал $]c,a[\cup]a,d[$ *называют* ***проколотой окрестностью*** *точки a. Интервал* $]a-\delta,a+\delta[$ *называют* ***δ - окрестностью*** *точки a.* ***Левой окрестностью*** *точки (числа) a называется произвольный полуинтервал* $(c,a]$. ***Правой окрестностью*** *точки (числа) a называется произвольный полуинтервал* $[a,d)$. ***Окрестностью точки*** $+\infty$ *называют интервал* $(N,+\infty)$, *а окрестностью точки*

$-\infty$ - интервал $(-\infty, N)$, где N в обоих случаях - произвольное конечное число.

Действительные числа обладают следующими основными свойствами.

1. Свойство упорядоченности: для любой пары чисел a и b выполняется одно из следующих соотношений: $a = b$, $a < b$ или $a > b$. При этом: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (свойство транзитивности).
2. Если $a < b$, то найдется такое c, что $a < c < b$.
3. $a + b = b + a$ - переместительный или коммутативный закон сложения.
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$ - сочетательный или ассоциативный закон сложения.
5. $a + 0 = a$.
6. $a + (-a) = 0$.
7. Для любого c из $a < b$ следует $a + c < b + c$.
8. $ab = ba$ - переместительный или коммутативный закон умножения.
9. $(ab)c = a(bc)$ - сочетательный или ассоциативный закон умножения.
10. $a \cdot 1 = a$.
11. $a \cdot (1/a) = 1$ $(a \neq 0)$.
12. $(a + b)c = ac + bc$ - распределительный или дистрибутивный закон умножения.
13. Для любого $c > 0$ из $a < b$ следует $ac < bc$.
14. Для любого $c > 0$ существует натуральное число $n > c$.
15. Лемма о вложенных отрезках (свойство непрерывности). **Пусть задана бесконечная последовательность отрезков $\sigma_n = [a_n, b_n]$ таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$, с длинами $d_n = b_n - a_n \to 0$. Тогда существует единственная точка (число), принадлежащая одновременно всем отрезкам.** Для интервалов и полуинтервалов аналогичное утверждение не будет верным.

*Число M (m) называется **точной верхней (нижней) гранью множества чисел** A, если выполняются следующие условия:*

1) $x \le M\ (x \ge m)$ для всех $x \in A$;

2) для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $x_0 \in A$, что $M - \varepsilon < x_0$ $(x_0 < m - \varepsilon)$.

Таким образом, если число M является точной верхней (нижней) гранью некоторого множества, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент x этого множества, который находится в промежутке $(M - \varepsilon, M]$ $([m, m + \varepsilon))$.

Точная верхняя граница множества обозначается $M = \sup A = \sup\limits_{x \in A} x$ (от латинского слова supremum - наивысший). Точная нижняя граница множества обозначается $m = \inf A = \inf\limits_{x \in A} x$ (от латинского слова infinum - наинизший).

Очевидно, что для конечного множества его точными верхней и нижней гранями будут, соответственно, наибольший и наименьший элементы этого множества.

Теорема 2.1. Любое ограниченное сверху (снизу) числом M (m) непустое множество D действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань $c \le M\,(c \ge m)$**.**

Доказательство. Для конечного множества чисел справедливость теоремы следует из того, что в таком множестве всегда можно выбрать наибольшее и наименьшее число.

Рассмотрим бесконечное множество чисел, ограниченное сверху числом M. Выберем точку $a_0 < M$ такую, чтобы отрезок $\sigma_0 = [a_0, M]$ содержал хотя бы одну точку множества D. Разделим его на два равных отрезка и обозначим через $\sigma_1 = [a_1, b_1]$ самый правый из них, который содержит точки множества D (рис. 2.2). То есть, если элементы множества D есть в обоих отрезках, то мы выбираем правый (при этом $b_1 = M$), если же они есть только в левом отрезке, то мы выбираем его (при этом $a_1 = a_0$). Затем разделим отрезок σ_1 на два равных отрезка и обозначим через $\sigma_2 = [a_2, b_2]$ самый правый из них, который содержит точки множества D. Продолжая деление отрезков таким же образом, получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\sigma_n = [a_n, b_n]$, n = 1, 2, 3, …, длины которых стремятся к нулю. Каждый из этих отрезков содержит хотя бы одну точку множества D, но правее него таких точек нет. Согласно лемме о вложенных отрезках, существует точка C, принадлежащая одновременно всем отрезкам σ_n.

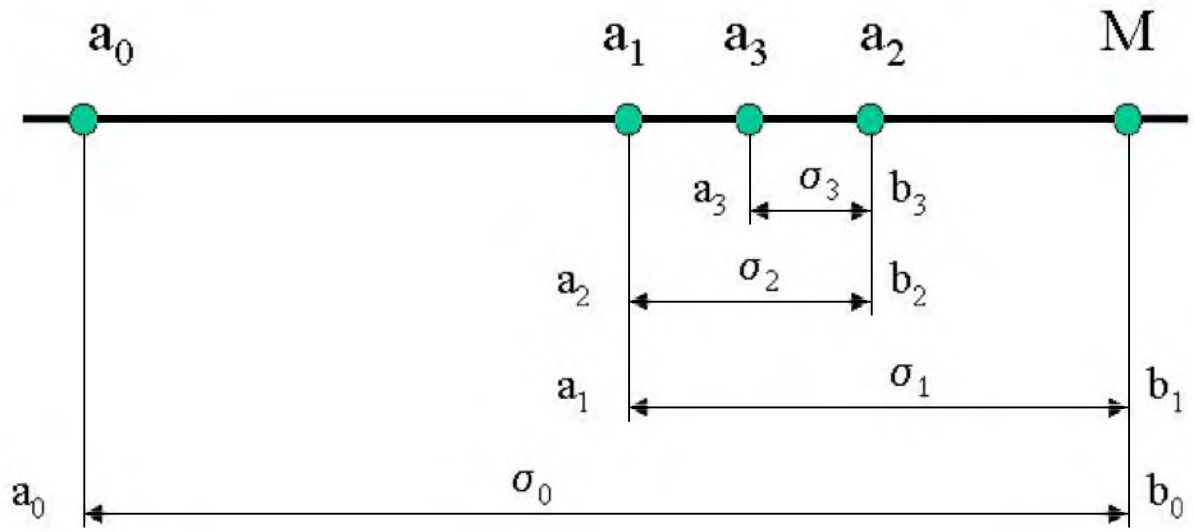


Рис. 2.2.

Пусть $x \in D$, тогда $x \le C$. Если бы существовало $x > C$, тогда в силу того, что $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, нашлось бы такое n, что точка C лежала бы правее отрезка σ_n. С другой стороны, каково бы ни было $C_1 < C$, можно указать такое σ_n, что C_1 находится левее σ_n, и при этом на σ_n имеется хотя бы одна точка $x_0 \in D$. Таким образом, мы доказали, что $C = \sup D$. Аналогично доказывается, что ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань. ☺

Из школьного курса математики известно, что для любого действительного числа можно ввести понятие модуля (абсолютной величины), определяемое следующим соотношением:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}. \qquad (2.3)$$

Для модулей действительных чисел выполняются следующие неравенства.

1. $|a| < \varepsilon \equiv -\varepsilon < a < \varepsilon$.
2. $|a - b| < \varepsilon \equiv b - \varepsilon < a < b + \varepsilon$.
3. $|a + b| \le |a| + |b|$.

Доказательство.

Рассмотрим случаи: 3.1) $a \le 0, b \le 0$; 3.2) $a \ge 0, b \ge 0$; 3.3) $a \le 0 \le b$; 3.4) $b \le 0 \le a$. Очевидно, что они полностью исчерпывают все возможные варианты значений a и b.

3.1. $|a + b| = -a - b = |a| + |b|$.

3.2. $|a + b| = a + b = |a| + |b|$.

3.3. Если $|b| \ge |a|$, то $|a + b| = |b| - |a| \le |a| + |b|$.

Если $|a| \ge |b|$, то $|a + b| = |a| - |b| \le |a| + |b|$.

3.4. Доказывается аналогично 3.3. ☺

4. $|a - b| \ge \big||a| - |b|\big| \ge |a| - |b|$.

Доказательство

Вторая часть этого неравенства непосредственно следует из определения абсолютной величины числа: $|a| - |b| = \big||a| - |b|\big|$, если $|a| \ge |b|$; $|a| - |b| < \big||a| - |b|\big|$, если $|a| < |b|$.

Для доказательства первой части неравенства рассмотрим следующие случаи: 4.1) $a \le 0, b \le 0$; 4.2) $a \ge 0, b \ge 0$; 4.3) $a \le 0 \le b$; 4.4) $b \le 0 \le a$, которые полностью исчерпывают все возможные наборы значений a и b.

4.1. Если $|b| \ge |a|$, то $|a - b| = a - b = |b| - |a| = \big||a| - |b|\big|$.

Если $|a| \ge |b|$, то $|a - b| = b - a = |a| - |b| = \big||a| - |b|\big|$.

4.2. Если $|b| \ge |a|$, то $|a - b| = b - a = |b| - |a| = \big||a| - |b|\big|$.

Если $|a| \ge |b|$, то $|a - b| = a - b = |a| - |b| = \big||a| - |b|\big|$.

4.3. Если $|b| \ge |a|$, то $|a - b| = -a + b = |a| + |b| \ge |b| - |a| = \big||a| - |b|\big|$.

Если $|a| \ge |b|$, то $|a - b| = -a + b = |a| + |b| \ge |a| - |b| = \big||a| - |b|\big|$.

4.4. Если $|b| \ge |a|$, то $|a - b| = a - b = |a| + |b| \ge |b| - |a| = \big||a| - |b|\big|$.

Если $|a| \ge |b|$, то $|a - b| = a - b = |a| + |b| \ge |a| - |b| = \big||a| - |b|\big|$. ☺

3. Числовые последовательности и их пределы

Пусть каждому натуральному числу n = 1, 2, 3, … в силу некоторого закона приведено в соответствие число x_n. *Тогда говорят, что этим определена* ***последовательность чисел (числовая последовательность)*** $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *или последовательность* $\{x_n\}$[1]. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ есть функция, заданная на множестве натуральных чисел. Понятие последовательности является одним из основных понятий математики. Наряду с числовыми последовательностями существуют последовательности, составленные из точек, функций, векторов и других объектов.

Примеры последовательностей:

1. $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$;

2. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$;

3. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$;

4. $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$;

5. $\left\{1+\frac{1}{10^n}\right\} = \{1{,}1; 1{,}01; 1{,}001; 1{,}0001; \ldots\}$;

6. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$;

7. $\left\{\begin{matrix} n\ (n = 1, 2, \ldots, 10) \\ \frac{1}{10^{n-10}}\ (n = 11, 12, 13, \ldots) \end{matrix}\right\} = \{1; 2; 3; \ldots; 10; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001; \ldots\}$.

Элементы x_n *последовательности* $\{x_n\}$ *считаются* ***различными****, если они соответствуют различным n.* При этом значения элементов x_n для разных элементов могут совпадать.

Существуют два основных способа задания последовательностей - аналитический и рекуррентный. В первом случае последовательность задают с помощью формулы, выражающей n-й член последовательности x_n через его номер n. Приведенные выше последовательности 1 - 7 заданы аналитически. Во втором случае задают один или несколько первых членов последовательности и правило, по которому каждый следующий член последовательности может быть выражен через предыдущие. Например:

$$\{x_n\} = \{x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + 2n\}.$$

[1] Иногда для обозначения последовательностей используют термин "варианта"

Последовательности 2 - 7 являются ограниченными. Последовательность 1 ограничена снизу, но не ограничена сверху.

Существует ряд последовательностей, которые занимают в математике особое место, благодаря их большому практическому значению. К ним относятся известные из школьного курса математики арифметическая и геометрическая прогрессии. Напомним, ***арифметической прогрессией*** *называют последовательность* $\{x_n\}$*, у которой каждый член, начиная со второго, больше или меньше предыдущего на постоянное для данной прогрессии число d. Число d называют* ***разностью*** *арифметической прогрессии.* Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних членов. Для арифметической прогрессии справедливы следующие соотношения:

$$x_n = x_1 + (n-1)d = \frac{x_{n-k} + x_{n+k}}{2} \quad \text{при } n > k,$$

$$S_n = n\frac{2x_1 + (n-1)d}{2} = n\frac{x_1 + x_n}{2},$$

где S_n - сумма первых n членов арифметической прогрессии.

Геометрической прогрессией *называют последовательность* $\{x_n\}$*, у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для данной прогрессии число* $q \neq 0$*. Число q называют* ***знаменателем*** *прогрессии.* Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних членов. Для геометрической прогрессии справедливы следующие соотношения:

$$x_n = x_1 q^{n-1} = \sqrt{x_{n-k} x_{n+k}} \quad \text{при} \quad n > k,$$

$$S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{x_1 - x_n q}{1-q} \quad \text{при} \quad q \neq 1.$$

При q = 1 геометрическая прогрессия является одновременно и арифметической прогрессией. Если |q| < 1, то сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии стремится к величине

$$S = \frac{x_1}{1-q}.$$

Число a называют ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, *если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех натуральных чисел n > N выполняется неравенство* $|x_n - a| < \varepsilon$.

Это записывают следующим образом: $x_n \to a$, либо $\lim x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. При этом говорят, что **последовательность** $\{x_n\}$ **сходится (стремится)** к числу a.

Из $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, то есть точка (число) $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Поэтому можно дать другое эквивалентное определение предела последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ *имеет пределом число a, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что для всех n > N любой элемент* x_m *этой последовательности попадает в ε-окрестность точки a, т.е.* $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

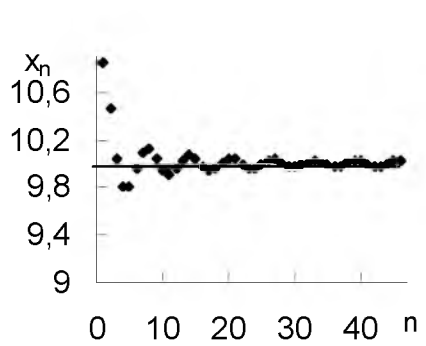
Из определения предела последовательности следует, что последовательности 1 и 6 не имеют предела, пределы последовательностей 2, 3 и 7 равны нулю, а последовательностей 4 и 5 - единице. Докажем, что $\lim \dfrac{n-1}{n} = 1$. Из равенства

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$$

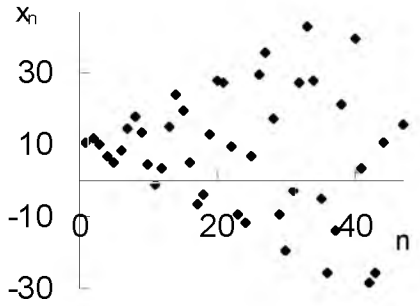
следует, что для любого положительного числа ε, выбрав произвольное натуральное $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, при любом натуральном $n > N$ мы получим верное равенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Следовательно, согласно данному определению, последовательность $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} \to 1$. ☺

Рассмотрим последовательности, представленные на рис. 3.1.

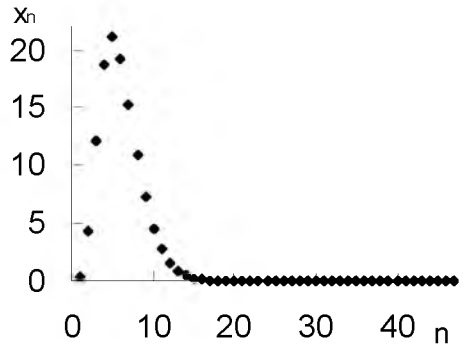
Видно, что с ростом n элементы последовательностей а, в и г все меньше отличаются от некоторых чисел, которые и являются пределами соответствующих последовательностей. Например, пределом последовательности $\{x_n\} = 10 + \dfrac{\sin n}{n}$ будет число 10. Можно доказать, что для любого положительного числа ε можно найти такое натуральное число N что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $\left|10 + \dfrac{\sin n}{n} - 10\right| = \left|\dfrac{\sin n}{n}\right| < \varepsilon$.



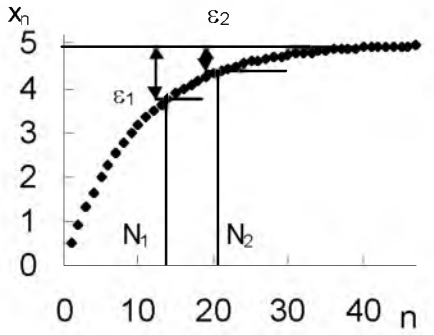
а



б



в



г

Рис. 3.1. Зависимость x_n от n для последовательностей: $\{x_n\} = 10 + \dfrac{\sin n}{n}$ (а), $\{x_n\} = 10 + n \cdot \sin n$ (б), $\{x_n\} = n^5 \exp(-n)$ (в); $\{x_n\} = 5(1 - \exp n)$ (г)

Действительно, поскольку $|\sin n| \le 1$, для $N > 1/\varepsilon$ имеем:

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \le \frac{1}{n} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon .$$

Таким образом, мы показали, что число 10 действительно является пределом последовательности $\{x_n\} = 10 + \dfrac{\sin n}{n}$. ☺

Последовательность, показанная на рис. 3.1.б, не имеет предела. Каким бы мы не выбрали число N, среди элементов этой последовательности найдутся такие, которые будут больше любого заданного положительного числа M.

Докажем это утверждение. Рассмотрим неравенство $10 + n \cdot \sin n > M$. Из него следует, что $n \cdot \sin n > M - 10$ или $\sin n > \dfrac{M-10}{n}$. Для любого положительного числа δ можно найти такое натуральное число N, что $\dfrac{M-10}{n} < \delta$ для всех $n > N$. Действительно, из условия $\dfrac{M-10}{N} < \delta$ следует, что указанное неравенст-

во будет выполняться для всех $n > \frac{M-10}{\delta}$. С другой стороны, в силу периодичности функции $\sin n$ среди элементов последовательности $\{x_n\}$ с $n > N$ обязательно найдутся такие, для которых дробная часть отношения $\frac{n}{2\pi}$ будет лежать в интервале $(0,\pi)$, т.е. $\sin n = \delta > 0\,(\delta \in (0,1))$. ☺

Из определения предела последовательности следует, что, какова бы ни была окрестность (c, d) точки a, все точки сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера n, должны попасть в эту окрестность. Поэтому, вне любой окрестности точки a будет находиться либо пустое, либо конечное множество точек последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 3.1. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b (a < b). Рассмотрим интервалы $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, где $\varepsilon = (b-a)/3$ (рис. 3.2). Согласно определению предела, первый из них должен содержать все точки $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера N_1, а второй - все точки, начиная с номера N_2. Для $n > \max\{N_1, N_2\}$ все точки должны принадлежать одновременно обоим интервалам. Но это невозможно, так как интервалы $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ не пересекаются. Следовательно, последовательность не может иметь два различных предела. ☺

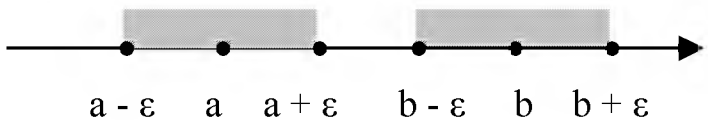


Рис. 3.2

Теорема 3.2. Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют только конечное число различающихся соответствующих элементов $(x_n \neq y_n)$, то они одновременно либо не имеют пределов, либо имеют пределы, причем в последнем случае $\lim x_n = \lim y_n$.

Доказательство непосредственно следует из определения предела последовательности. Поскольку число различающихся соответствующих элементов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ конечно, то, начиная с некоторого номера M, все остальные соответствующие элементы этих последовательностей будут совпадать. Поэтому для любого положительного числа ε либо одновременно существует, либо одновременно не существует такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняются неравенства $|x_n - a| < \varepsilon; |y_n - a| < \varepsilon$. ☺

Теорема 3.3. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда для $\varepsilon = 1$ должно найтись натуральное N такое, что $1 > |x_n - a| \geq |x_n| - |a|$ для всех $n > N$. То есть $|x_n| < 1 + |a|$. Пусть $M = \max\{|a|+1, |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|\}$. Очевидно, что $|x_n| < M$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена, что и требовалось доказать. ☺

Теорема 3.4. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет не равный нулю предел a, то найдется такое N, что $|x_n| > |a|/2$ для всех $n > N$. Больше того, для указанных n, если $a > 0$, то $x_n > a/2$; если же $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким образом, начиная с некоторого N, все x_n сохраняют знак числа a.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда для $\varepsilon = |a|/2$ должно найтись натуральное N такое, что для всех $n > N$ справедливо: $|a|/2 > |a - x_n| \geq |a| - |x_n|$. То есть $|x_n| > |a| - |a|/2 = |a|/2$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Для $a > 0$: $a - a/2 = a/2 < x_n$. Для $a < 0$: $x_n < a + |a|/2 = a - a/2 = a/2$. Таким образом, второе утверждение теоремы тоже доказано. ☺

Теорема 3.5. Если последовательность $\{x_n\} \to a$, последовательность $\{y_n\} \to b$ и $x_n \leq y_n$ для всех n = 1, 2, 3, …, то $a \leq b$.

Доказательство. Допустим, что b < a. Зададим $\varepsilon = (a-b)/2$ и подберем натуральные N_1 и N_2 такие, что $a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1)$ и $y_n < b + \varepsilon \ (n > N_2)$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для $n > N$ $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$, что противоречит условию $x_n \leq y_n$. Поэтому мы должны сделать вывод, что $a \leq b$. ☺

Теорема 3.6. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремятся к одному и тому же пределу a, и $x_n \leq z_n \leq y_n \ (n = 1,2,...)$, то последовательность $\{z_n\}$ также стремится к пределу a.

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти такие N_1 и N_2, что

$$a - \varepsilon < x_n \ (n > N_1), \ y_n < a + \varepsilon \ (n > N_2).$$

Отсюда для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ получим:

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon,$$

$$|z_n - a| < \varepsilon \ (n > N) \Rightarrow \{z_n\} \to a. \ ☺$$

Теорема 3.7. Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.

Доказательство теоремы легко провести, рассмотрев раздельно случаи $a < 0$ и $a \geq 0$.

Утверждение, обратное теореме 3.7, вообще говоря, не будет верным. Если $|x_n| \to |a|$, то возможны следующие три случая:

- $\{x_n\} \to a$;
- $\{x_n\} \to -a$;

- последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела, однако она может быть разделена на две сходящиеся последовательности, пределами которых являются числа a и -a (например, последовательность $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right\}$ расходится, хотя $\lim\left|(-1)^n\right| = 1$; при этом ее можно разделить на две последовательности $\{y_n\} = -1 + \frac{1}{2n-1}$ и $\{z_n\} = 1 + \frac{1}{2n}$, первая из которых сходится к –1, а вторая – к 1).

Теорема 3.8. Если существуют $\lim x_n$ и $\lim y_n$, **то:**

$$\begin{gathered}\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n; \\ \lim(x_n y_n) = \lim x_n \lim y_n; \\ \lim(x_n / y_n) = \lim x_n / \lim y_n \quad (\lim y_n \neq 0, y_n \neq 0 \text{ для всех n})\end{gathered} \tag{3.1}$$

Доказательство.

Пусть $\lim x_n = a, \lim y_n = b$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое N, что для всех n > N справедливы неравенства:

$$|x_n - a| < \delta; |y_n - b| < \delta. \tag{3.2}$$

Для последовательности $\{x_n + y_n\}$, принимая $\delta = \varepsilon/2$, получим:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < 2\delta = \varepsilon.$$

То есть, $\lim(x_n + y_n) = a + b = \lim x_n + \lim y_n$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Из неравенств (3.2) следует:

$a - \delta < x_n < a + \delta;\ b - \delta < y_n < b + \delta$

или в силу теоремы 3.7

$$|a| - \delta < |x_n| < |a| + \delta;\ \ |b| - \delta < |y_n| < |b| + \delta. \tag{3.3}$$

Перемножая почленно неравенства (3.3), получим:

$$|ab| - \delta(|a| + |b|) + \delta^2 < |x_n y_n| < |ab| + \delta(|a| + |b|) + \delta^2.$$

Поскольку последнее неравенство должно выполняться для любых, в том числе сколь угодно малых положительных значений δ, можно принять $\varepsilon = \delta(|a| + |b|)$ и записать:

$$|ab| - \varepsilon < |x_n y_n| < |ab| + \varepsilon \ .$$

Отсюда следует, что $\{|x_n y_n|\} \to |ab|$. Из этого в силу теоремы 3.4 следует, что: при $a > 0$, $b > 0$ или $a < 0$, $b < 0$ последовательность $\{x_n y_n\} \to |ab| = ab$; при $a > 0$, $b < 0$ или $a < 0$, $b > 0$ последовательность $\{x_n y_n\} \to -|ab| = ab$.

Таким образом, второе утверждение теоремы доказано. Приведенное доказательство имеет следующую геометрическую интерпретацию (рис. 3.3).

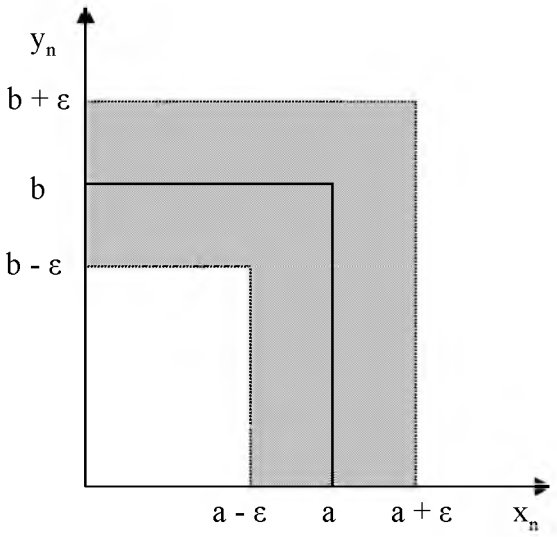


Рис. 3.3

Пусть x_n – длина одной стороны прямоугольника, а y_n – длина другой его стороны. Тогда, начиная с некоторого N, для всех $n > N$ площадь прямоугольника будет находиться в интервале от $(a - \varepsilon)(b - \varepsilon)$ до $(a + \varepsilon)(b + \varepsilon)$. По мере уменьшения ε эта площадь будет стремиться к величине ab.

Составим вспомогательную последовательность $\{z_n\} = \left\{\frac{1}{y_n}\right\}$.

Из $b - \delta < y_n < b + \delta$ следует:

$$\frac{1}{|b| + \delta} < \frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{|b| - \delta} \ \Rightarrow \ \frac{1}{|b|} - \frac{\delta}{|b|(|b| + \delta)} < \frac{1}{y_n} < \frac{1}{b} + \frac{\delta}{|b|(|b| - \delta)} \ .$$

Принимая для малых δ $\varepsilon = \frac{\delta}{b^2}$, имеем:

$$\frac{1}{|b|} - \varepsilon < |z_n| < \frac{1}{|b|} + \varepsilon \ \Rightarrow \ \frac{1}{b} - \varepsilon < z_n < \frac{1}{b} + \varepsilon \ \Rightarrow \ \left| z_n - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \lim z_n = \frac{1}{b} .$$

Но $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \equiv \{x_n z_n\} \Rightarrow \lim\frac{x_n}{y_n} = \lim x_n z_n = \frac{a}{b}$. Таким образом, третье утверждение теоремы доказано. ☺

Переменная α_n *называется* ***бесконечно малой величиной,*** *или просто* ***бесконечно малой****, если* $\lim\alpha_n = 0$*, то есть когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое N, что* $|\alpha_n| < \varepsilon$ *для любого* $n > N$.

Переменная β_n *называется* ***бесконечно большой величиной*** *или просто* ***бесконечно большой****, если для любого* $M > 0$ *найдется такое N, что* $|\beta_n| > M$ *для всех* $n > N$*, то есть* $\lim\beta_n = \infty$. Если, начиная с некоторого N, переменная принимает только положительные или только отрицательные значения, то предел β_n будет равен соответственно $+\infty$ или $-\infty$.

Доказательство следующих двух теорем студентам предлагается провести самостоятельно.

<u>Теорема 3.9.</u> Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а $\{y_n\} \to \infty$, то $\{x_n / y_n\} \to 0$.

<u>Теорема 3.10.</u> Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом $m > 0$, а последовательность $\{y_n\} \to 0$, то $\{x_n / y_n\} \to \infty$.

4. Критерии сходимости последовательностей

На практике часто бывает необходимо узнать, имеет ли данная последовательность предел, не вычисляя этот предел непосредственно. Для ответа на этот вопрос используют критерии сходимости последовательностей (теоремы существования пределов).

Теорема 4.1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ не убывает (не возрастает), то есть удовлетворяет условию $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$ для любого n =1, 2, … . Если она ограничена сверху (снизу) числом B (A), то существует предел $\lim x_n$, равный некоторому числу $M \leq B\,(m \geq a)$. Если же она не ограничена сверху (снизу), то $\lim x_n = +\infty\ (\lim x_n = -\infty)$.

Доказательство. Рассмотрим неубывающую последовательность, ограниченную сверху числом B. Тогда существует точная верхняя грань множества элементов этой последовательности $\sup x_n = M \leq B$. В таком случае $x_n \leq M$, и для всякого $\varepsilon > 0$ должно найтись такое $n = n_0$, что $M - \varepsilon \leq x_{n_0}$. В силу того, что $\{x_n\}$ не убывает, для всех $n > n_0$ будет справедливо неравенство $x_{n_0} \leq x_n$. Поэтому:

$$M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon \text{ для } n > n_0,$$
$$|x_n - M| < \varepsilon \text{ для } n > n_0 .$$

Таким образом, $M = \lim x_n$.

Если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то для любого $M > 0$ найдется такое x_{n_0}, что $M < x_{n_0}$. Так как $\{x_n\}$ не убывает, то $x_{n_0} \leq x_n$ для $n > n_0$. Таким образом, для любого $M > 0$ существует такое $N = n_0$, что $M < x_n$ для всех $n > N$. Это означает, что $\lim x_n = +\infty$.

Для невозрастающей последовательности доказательство проводится аналогично. ☺

Пусть $\{x_n\} = 2 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность ограничена снизу числом 2. Действительно, для любого натурального n величина $\frac{1}{n} > 0$ и, следовательно, $2 + \frac{1}{n} > 2$. Эта последовательность является убывающей, поскольку для любого n:

$$x_{n+1} - x_n = 2 + \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 .$$

Поэтому, согласно теореме 4.1, данная последовательность должна иметь предел. Можно доказать, что этот предел равен 2. Действительно, $|x_n - 2| = \left|\frac{1}{n}\right|$. Поэтому для любого натурального числа N можно указать такое положительное число ε (например, $\varepsilon = \frac{1}{n-1}$), что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Используя формулу бинома Ньютона[1],

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n \quad \left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right), \tag{4.1}$$

получим:

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots ,$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots > x_n ,$$

так как в x_{n+1} добавляется положительный член, а все остальные члены x_{n+1} больше соответствующих членов x_n. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает. Кроме того:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots .$$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ равна $S_n = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$. Следовательно, $x_n < 2 + 1 = 3$, и последовательность $\{x_n\}$ огра-

[1] Таблица значений коэффициентов C_n^k приведена в приложении 1.

ничена сверху. Согласно теореме 4.1, она имеет предел. В дальнейшем будет показано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281\ldots$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ (n=1, 2, …) стремится к конечному пределу a. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех n > N. Пусть n и m - произвольные натуральные числа, удовлетворяющие условию n > N, m > N. Тогда $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|x_n - x_m| = |x_n - a - x_m + a| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \text{☺}$$

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4.2 (Больцано-Коши). Если последовательность $\{x_n\}$ имеет (конечный) предел, то она удовлетворяет следующему условию (условию Коши): для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех n и m, удовлетворяющих условию n > N, m > N, выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Условие Коши можно сформулировать иначе. **Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для всех n > N и любого натурального числа p.**

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \frac{n-1}{n}$. Как было показано в предыдущем разделе, эта последовательность сходится к единице. Покажем, что она удовлетворяет условию Коши. Пусть n, m, N – натуральные числа, $n > m$ и m > N. Тогда:

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{n-1}{n} - \frac{m-1}{m}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{1}{N}.$$

Отсюда видно, что для любого $\varepsilon > 0$, выбирая произвольные натуральные числа $N > \frac{1}{\varepsilon}$ и $n, m > N$, мы получим верное неравенство $|x_n - x_p| < \varepsilon$. Таким образом, сходящаяся последовательность $\{x_n\} = \frac{n-1}{n}$ удовлетворяет условию Коши.

Верно также утверждение, обратное теореме 4.3.

Теорема 4.3. Если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то она стремится к конечному пределу, то есть существует число a такое, что $\lim x_n = a$.

Доказательство. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию Коши. Возьмем $\varepsilon = 1$ и подберем такое N, что $|x_n - x_m| < 1$ для всех n и m, удовлетворяющих условию n > N, m > N. Тогда:

$$1 > |x_n - x_m| \geq |x_n| - |x_m|,$$
$$|x_n| < 1 + |x_m|.$$

Зафиксируем какое-либо m > N. Тогда величина $|x_n|$ ограничена числом, равным $\max\{1 + |x_m|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|\}$. Для каждого n определим два числа: $\alpha_n = \inf\limits_{k>n} x_k$ и $\beta_n = \sup\limits_{k>n} x_k$. Отрезки $[\alpha_n, \beta_n]$ вложены друг в друга, то есть $[\alpha_n, \beta_n] \supset [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$, потому что

$$\alpha_n = \inf_{k>n} x_k \leq \inf_{k>n+1} x_k = \alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1} = \sup_{k>n+1} x_k \leq \sup_{k>n} x_k = \beta_n.$$

Длина отрезков $[\alpha_n, \beta_n] \to 0$ при $n \to \infty$, так как в силу условия Коши для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое n_0, что для всех $k > n_0$

$$x_{n_0} - \varepsilon < x_k < x_{n_0} + \varepsilon.$$

Отсюда:

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq \alpha_{n_0} \leq \beta_{n_0} \leq x_{n_0} + \varepsilon,$$

$$2\varepsilon \geq \beta_{n_0} - \alpha_{n_0} \geq \beta_n - \alpha_n \quad (n > n_0).$$

Согласно лемме о вложенных отрезках, существует точка a, принадлежащая всем отрезкам $[\alpha_n, \beta_n]$. Зададим произвольный интервал (c, d), содержащий точку a. Тогда найдется такое натуральное число n, что $[\alpha_n, \beta_n] \subset (c, d)$. Для всех k > n также $[\alpha_k, \beta_k] \subset (c, d)$. Следовательно, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ☺

Объединяя прямую и обратную теоремы, мы можем сформулировать следующий критерий (**критерий Коши**) существования предела последовательности.

Теорема 4.4. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась к конечному пределу, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.

5. Подпоследовательности. Бесконечные числовые множества

Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\}=\{x_1, x_2, x_3, ...\}$. *Из нее можно бесконечным числом способов выделить новую последовательность*

$$\{x_{n_k}\}=\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\},$$

где индекс n_k *пробегает бесконечную возрастающую последовательность натуральных чисел* $n_1 < n_2 < n_3 < ...$. *В таком случае последовательность* $\{x_{n_k}\}$ *называется* ***подпоследовательностью (частичной последовательностью)*** *последовательности* $\{x_n\}$.

Например:

- подпоследовательностями последовательности $\{n\}=\{1, 2, 3, ...\}$ будут последовательности:

$$\{2n\}=\{2, 4, 6, ...\},\ \{3n-2\}=\{1, 4, 7, ...\},\ \{n^2+n\}=\{2, 6, 12, ...\};$$

- подпоследовательностями последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ будут последовательности:

$$\left\{\frac{1}{3n}\right\}=\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, ...\right\},\ \left\{\frac{1}{2n+5}\right\}=\left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, ...\right\},\ \left\{\frac{1}{2n^3-1}\right\}=\left\{1, \frac{1}{15}, \frac{1}{53}, ...\right\}$$

и т.д.

<u>Теорема 5.1.</u> Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу $\{x_n\}\to a \Rightarrow \{x_{n_k}\}\to a$**.**

<u>Доказательство</u>. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу a, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что для всех n > N $|x_n-a|<\varepsilon$. Из определения подпоследовательности следует, что в этом случае для любой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ найдется такое $n_k > N$, что $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim x_{n_k}=a$. ☺

Обратное утверждение не будет верным. Например, последовательность $\{x_n\}=\{1, -1, 1, -1, ...\}$ не сходится. Однако ее подпоследовательности $\{1, 1, 1, ...\}$ и $\{-1, -1, -1, ...\}$ сходятся, причем к различным пределам.

Теорема 5.2 (Больцано–Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому конечному числу.

Доказательство. Пусть элементы последовательности $x_n \in \Delta_0 = [c, d]$. Разделим отрезок Δ_0 пополам и обозначим через Δ_1 самую правую его половину, содержащую бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Пусть x_{n_1} - один из элементов отрезка Δ_1. Разделим теперь пополам отрезок Δ_1 и обозначим через Δ_2 самую правую его половину, содержащую бесконечное число элементов $\{x_n\}$. Среди них найдется элемент x_{n_2}, для которого $n_2 > n_1$. Продолжая действовать подобным образом, получим вложенные отрезки $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$ и бесконечную последовательность принадлежащих им точек $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$. Согласно лемме о вложенных отрезках, они должны иметь единственную общую точку a, которая, очевидно, и будет являться пределом подпоследовательности x_{n_k}. ☺

Из приведенного доказательства не следует, однако, что все подпоследовательности будут сходиться к одному и тому же пределу. Как было показано выше, пределы, к которым сходятся различные подпоследовательности одной и той же последовательности (***частичные пределы***), могут быть разными. Отметим также, что число сходящихся подпоследовательностей ограниченной последовательности $\{x_n\}$ является бесконечно большим. В самом деле, для составленной нами сходящейся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ можно бесконечным числом способов построить ее сходящиеся подпоследовательности $\{x_{n_{k_l}}\}$, которые, очевидно, будут являться и подпоследовательностями $\{x_n\}$.

Число α (конечное, +∞ или -∞) называют ***верхним (нижним) пределом последовательности*** *действительных чисел $\{x_n\}$, если существует сходящаяся к нему подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и при этом всякая другая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к числу $\beta \le \alpha \ (\beta \ge \alpha)$.*

Для обозначения верхнего предела последовательности используют следующие обозначения: $\overline{\lim} x_n, \limsup x_n$. Нижний предел последовательности обозначают следующим образом: $\underline{\lim} x_n, \liminf x_n$.

Метод, который мы использовали при доказательстве теоремы Больцано-Вейерштрасса, позволил нам получить подпоследовательность, сходящуюся к верхнему пределу последовательности $\{x_n\}$. Если бы мы каждый раз выбирали самую левую половину, содержащую бесконечное число элементов $\{x_n\}$, то получили бы нижний предел последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 5.3. Последовательность $\{x_n\}$ может иметь только один верхний (нижний) предел.

Доказательство этого утверждения следует из рассмотренных ранее свойств действительных чисел. Если две различные подпоследовательности одной последовательности сходятся к пределам a и b, и при этом указанные пределы являются действительными числами, то для них выполняется одно из следующих отношений: $a < b$, $a = b$ или $a > b$. Согласно определению верхнего предела последовательности, оба числа a и b одновременно могут быть верхними пределами лишь при условии $a = b$. ☺

Теорема 5.4. Для любого $\varepsilon > 0$ интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где a - верхний (нижний) предел ограниченной последовательности $\{x_n\}$, содержит в себе бесконечное число элементов $\{x_n\}$. При этом справа (слева) от этого интервала элементы последовательности $\{x_n\}$ либо отсутствуют, либо их число конечно.

Доказательство. Если число a является верхним или нижним пределом $\{x_n\}$, то, как следует из определения, существует по крайней мере одна сходящаяся к нему подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Все элементы этой подпоследовательности, начиная с некоторого номера n_k, согласно определению предела, должны попасть в интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Число таких элементов бесконечно, и все они являются одновременно элементами $\{x_n\}$. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Если бы за пределами интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ имелось бесконечное число элементов ограниченной последовательности $\{x_n\}$, то в силу теоремы 5.2 из них можно было бы составить подпоследовательность $\{x_{n_1}\} \to \beta > \alpha\ (\beta < \alpha)$. Это противоречит условию, что α - верхний (нижний) предел последовательности $\{x_n\}$. ☺

Рассмотрим в качестве примера последовательность $\{x_n\} = \left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\}$. Можно показать, что ее верхним пределом является число 1. Рассмотрим интервал $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, где ε – произвольное положительное число, и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая образована всеми четными элементами $\{x_n\}$. Очевидно, что для всех $x \in x_{n_k}$ одновременно будет справедливо: $x \in (1,2]$. Если $\varepsilon > 1$, то все элементы $x_{n_k} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, а справа от этого интервала элементы подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ отсутствуют. Если же $0 < \varepsilon \le 1$, то в интервал $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ попадут все элементы подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, начиная с наименьшего натурального $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Таких элементов будет бесконечно много. Все остальные элементы, начиная с первого и заканчивая $N-1$, будут находиться справа от интервала $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Теперь рассмотрим элементы последовательности $\{x_n\}$, которые не вошли в подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Все эти элементы являются отрицательными числами, поэтому они не могут находиться справа от

интервала $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Таким образом, мы доказали, что общее число элементов последовательности $\{x_n\} = \left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\right\}$, которые попадают в интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где a = 1 – верхний предел, а ε – произвольное положительное число, является бесконечно большим, а число ее элементов, которые находятся справа от этого интервала, является нулевым или конечным.

Теорема 5.5. Любая последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ имеет верхний (нижний) предел, равный конечному числу, -∞ или +∞. Если последовательность ограничена, то ее верхний и нижний пределы конечны.

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то для любого номера N существует такое $n > N$, что $x_n > \max\{x_1, x_2, ..., x_N\}$. В противном случае последовательность $\{x_n\}$ была бы ограничена сверху числом $\max\{x_1, x_2, ..., x_N\}$. Отсюда следует, что можно составить неограниченную возрастающую подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \to +\infty$. Таким образом, $\overline{\lim} x_n = +\infty$. Аналогично можно показать, что если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена снизу, то она содержит неограниченную убывающую подпоследовательность $\{x_{n_1}\} \to -\infty$. Следовательно, $\underline{\lim} x_n = -\infty$.

Как следует из теоремы 5.2, из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому конечному числу. Следовательно, любая ограниченная последовательность имеет конечные верхний и нижний пределы. ☺

Терема 5.6. Из любой последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному числу, -∞ или +∞ (для ограниченной последовательности - только к конечному числу).

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 5.5 и определения верхнего (нижнего) предела последовательности.

Теорема 5.7. Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что любая ее подпоследовательность сходится к одному и тому же числу a, то существует $\lim x_n = a$.

Доказательство. Предположим, что число a конечно, и последовательность $\{x_n\}$ не сходится к нему. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального N найдется n > N такое, что $|x_n - a| > \varepsilon$. Пусть N = 1. Выберем в качестве n_1 одно из значений n, для которых выполняется неравенство $|x_n - a| > \varepsilon$. Далее примем $N = n_1 + 1$ и выберем в качестве n_2 минимальное из значений n, для которых выполняется неравенство $|x_n - a| > \varepsilon$. Продолжая действовать таким образом, мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая не сходится к числу a, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $\lim x_n = a$.

Пусть $a=+\infty$ и $\lim x_n \neq +\infty$. Тогда для любого натурального N найдется такое M > 0, что существует $x_n < M\,(n > N)$. Пусть N = 1. Выберем в качестве M любое действительное число, для которого неравенство $x_n < M$ выполняется хотя бы для одного значения n, а в качестве n_1 - любое из значений n, для которых выполняется это неравенство. Далее примем $N = n_1 + 1$ и опять выберем в качестве M любое действительное число, для которого выполняется неравенство $x_n < M$, а в качестве n_2 - одно из значений n, для которых выполняется это неравенство. Очевидно, что $n_2 > n_1$. Продолжая действовать таким образом, мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая не сходится к числу $+\infty$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $\lim x_n = +\infty$.

Аналогично можно доказать теорему для случая, когда $a = -\infty$. ☺

Рассмотрим в качестве примера последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$. Ее подпоследовательностями, в частности, являются последовательности $\left\{\frac{1}{kn}\right\}$, (k = 2, 3, 4, …). Все они также сходятся к нулю.

<u>Теорема 5.8.</u> Для верхнего и нижнего пределов последовательности справедливо соотношение $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$. При этом $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ тогда и только тогда, когда существует предел последовательности $\{x_n\}$. В этом случае $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$.

<u>Доказательство</u>. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому числу a (конечному или бесконечному), то в силу теоремы 5.1 любая ее подпоследовательность сходится к тому же числу. То есть,

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim x_n = a.$$

С другой стороны, если $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = a$, то, согласно определениям верхнего и нижнего пределов, любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к числу a. Следовательно, в силу теоремы 5.7, $\lim x_n = a$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, но не имеет предела, то, как следует из теоремы 5.2, из нее можно выделить бесконечно много сходящихся подпоследовательностей. Если бы выполнялось равенство $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = a$, то любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ должна была бы сходиться к тому же числу a. Тогда, согласно теореме 5.7, последовательность $\{x_n\} \to a$. Но это противоречит условию, что последовательность $\{x_n\}$ не сходится. Поэтому верхний и нижний пределы $\{x_n\}$ не равны друг другу, и в силу определения верхнего (нижнего) предела мы можем записать $\overline{\lim}\, x_n > \underline{\lim}\, x_n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху и снизу и не сходится, то из нее можно выделить подпоследовательности $\{x_{n_k}\}\to -\infty$ и $\{x_{n_1}\}\to +\infty$. Очевидно, что в этом случае $\underline{\lim}\, x_n = -\infty < +\infty = \overline{\lim}\, x_n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу) числом M, не ограничена снизу (сверху) и не сходится, то из нее можно выделить подпоследовательности $\{x_{n_k}\}\to -\infty$ и $\{x_{n_1}\}\to a < M$ ($\{x_{n_k}\}\to a > M$ и $\{x_{n_1}\}\to +\infty$). В этом случае $\underline{\lim}\, x_n = -\infty < a = \overline{\lim}\, x_n$ ($\underline{\lim}\, x_n = a < +\infty = \overline{\lim}\, x_n$). ☺

Теорема 5.9. Для произвольной последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ справедливы равенства $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$ и $\overline{\lim}\, x_n = -\underline{\lim}(-x_n)$. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены, то для них справедливы также неравенства: $\overline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ и $\underline{\lim}(x_n + y_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из определения верхнего (нижнего) предела. В самом деле, если некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к числу a, то будет сходиться и соответствующая ей подпоследовательность $\{-x_{n_k}\}$. При этом в силу теоремы 3.7 $\lim|x_{n_k}| = \lim|-x_{n_k}| = |a|$. Начиная с некоторого номера n, все элементы $\{x_{n_k}\}$ будут иметь знак числа a, а элементы $\{-x_{n_k}\}$ - знак числа -a. Следовательно, $\{-x_{n_k}\}\to -a$. Пусть число a является верхним пределом последовательности $\{x_n\}$. Значит, число |a| будет являться верхним пределом последовательности $\{|x_n|\}$ при $a > 0$ и ее нижним пределом при $a < 0$. Поэтому нижним пределом последовательности $-\{x_n\}$ для $a > 0$ будет являться число $-|a| = -a$ и при $a < 0$ – число $|a| = -a$. Таким образом, $\overline{\lim}\, x_n = -\underline{\lim}(-x_n)$. Аналогично можно показать, что $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$.

Пусть $\overline{\lim}(x_n + y_n) = c$, $\overline{\lim}\, x_n = a$, $\overline{\lim}\, y_n = b$. Выберем подпоследовательности $\{x_{n_k}\}\to a$ и $\{y_{n_k}\}\to b$. Очевидно, что для любых других подпоследовательностей $\lim x_{n_1} \le a$ и $\lim y_{n_m} \le b$. Поскольку элементы последовательности $\{x_n + y_n\}$ получены суммированием соответственных элементов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то элементы любой ее подпоследовательности являются суммами соответствующих элементов некоторых подпоследовательностей $\{x_{n_j}\}$ и $\{y_{n_j}\}$. Поэтому

$$\lim(x_{n_j} + y_{n_j}) = \lim x_{n_j} + \lim y_{n_j} \le a + b. \ ☺$$

Рассмотрим для примера последовательности $\{x_n\}=\{-1,1,-1,1,...\}$ и $\{y_n\}=\{-2,2,-2,2,...\}$. Легко видеть, что $\overline{\lim}(x_n+y_n)=3=\overline{\lim}\,x_n+\overline{\lim}\,y_n$ и $\underline{\lim}(x_n+y_n)=-3=\underline{\lim}\,x_n+\underline{\lim}\,y_n$. Если же мы возьмем последовательности $\{x_n\}$ и $\{-y_n\}$, то для них $\overline{\lim}(x_n+(-y_n))=1<3=\overline{\lim}\,x_n+\overline{\lim}(-y_n)$ и $\underline{\lim}(x_n+y_n)=-1>-3=\underline{\lim}\,x_n+\underline{\lim}\,y_n$.

Множество E элементов x любой природы называют ***бесконечным****, если, каково бы ни было натуральное число n, число элементов множества E больше n.*

Множество E называют ***счетным****, если оно бесконечно и его элементы можно перенумеровать, то есть установить взаимно однозначное соответствие между всеми элементами* $x\in E$ *и числами натурального ряда* $\{1,2,3,...\}$.

В этом случае все элементы множества E можно представить в виде последовательности элементов $E=\{x_1,x_2,x_3,...\}$. В частности, счетными будут множества натуральных, четных и нечетных чисел, так как их элементы можно перенумеровать следующим образом: $x_n=n$, $x_n=2n$ и $x_n=2n-1$.

Теорема 5.10. Объединение счетного числа счетных множеств является счетным множеством.

Доказательство. Запишем элементы объединяемых множеств в виде таблицы:

$$E^1=\{x_1^1,x_2^1,x_3^1,...\}$$
$$E^2=\{x_1^2,x_2^2,x_3^2,...\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E^n=\{x_1^n,x_2^n,x_3^n,...\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Установим следующий порядок нумерации элементов множества $E=\bigcup_{k=1}^{n}E^k$: вначале разделим элементы x_i^j на группы с равными значениями $i+j$ и расположим их в порядке возрастания этой суммы. Внутри каждой группы расположим элементы в порядке возрастания индекса j. В результате получим следующую последовательность: $x_1^1,x_2^1,x_1^2,x_3^1,x_2^2,x_1^3,x_4^1,...$ (при этом следует отбрасывать элементы, которые уже были занумерованы ранее, так как отдельные элементы различных множеств E^k могут совпадать). Очевидно, что в результате мы получим бесконечную перенумерованную последовательность всех элементов множества $E=\{y_1,y_2,y_3,...\}$. Таким образом, множество E является счетным. ☺

Теорема 5.11. Множество рациональных чисел является счетным.

Доказательство. Докажем для начала счетность множества положительных рациональных чисел. Любое положительное рациональное число можно представить в виде p/q (p > 0, q > 0 - целые). Для p + q = 1 таких чисел нет. Для p + q = 2 имеется единственное число 1 = 1/1. Обозначим его как x_1. Для x + y = 3 имеется два рациональных числа 1/2 и 2 = 2/1. Обозначим их соответственно x_2 и x_3. Для p + q = 4 имеется два новых рациональных числа 1/3 и 3 = 3/1. Обозначим их соответственно x_4 и x_5. Продолжая действовать таким образом, мы можем перенумеровать все положительные рациональные числа. То есть, множество всех положительных рациональных чисел является счетным.

Аналогично можно показать, что счетным является множество всех отрицательных рациональных чисел.

Объединяя множества положительных и отрицательных рациональных чисел, а также множество, состоящее из одного элемента $\{0\}$, мы получаем множество всех рациональных чисел, которое в силу теоремы 5.10 является счетным. ☺

Напротив, множество всех действительных чисел не является счетным.

Точка a называется ***предельной точкой множества*** *действительных чисел E, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от самой точки a.*

Очевидно, что для существования предельной точки множество должно содержать бесконечное число элементов.

Теорема 5.12. Любая окрестность предельной точки множества действительных чисел E содержит бесконечно много точек множества E.

Доказательство. Выберем в качестве окрестности точки a интервал $c_0 < a < d_0$. По определению этот интервал должен содержать по крайней мере одну точку $x_0 \neq a$ множества E. Если $x_0 < a$, обозначим $c_1 = x_0, d_1 = d_0$. Если же $x_0 > a$, то обозначим $c_1 = c_0, d_1 = x_0$. Интервал $(c_1, d_1) \subset (c_0, d_0)$ также является окрестностью точки a, следовательно, он также должен содержать по крайней мере одну точку $x_1 \neq a$ множества E. Если $x_1 < a$, обозначим $c_2 = x_1, d_2 = d_1$. Если же $x_1 > a$, то обозначим $c_2 = c_1, d_2 = x_1$. Интервал $(c_2, d_2) \subset (c_1, d_1)$ является окрестностью точки a и, следовательно, он также должен содержать, по крайней мере, одну точку $x_2 \neq a$ множества E. Продолжая далее, мы получим бесконечную последовательность действительных чисел $\{x_n\}$, что и доказывает теорему. Отметим также, что полученная последовательность $\{x_n\} \to a$.

Рассмотрим множество E элементов последовательности $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$. Предельной точкой этого множества является точка 1. Действительно, произвольная окрестность $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ включает в себя все точки, которые удовлетворяют неравенству $\frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon$. Решая это неравенство, получим:

$$n > (1-\varepsilon)(n+1),$$
$$n > n - n\varepsilon + 1 - \varepsilon,$$
$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Таким образом, все элементы x_n, для которых $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, попадут в рассматриваемую ε окрестность. Очевидно, что число элементов, удовлетворяющих этому неравенству, будет бесконечно большим.

В то же время для любой точки, не являющейся предельной, найдутся окрестности, которые либо не содержат элементов множества E, либо содержат конечное число таких элементов. В самом деле, все элементы множества E удовлетворяют условию $0{,}5 < x_n < 1$. Для точек $x < 0{,}5$ и $x > 1$ заведомо существуют окрестности, которые не содержат ни одной точки множества E. Пусть $x \in [0{,}5;1)$. Выберем $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$, то есть $\left(\frac{3x-1}{2}, \frac{x+1}{2}\right)$. За пределами этого интервала останутся все элементы последовательности $\{x_n\}$ с номерами, которые удовлетворяют неравенству $\frac{n}{n+1} > \frac{x+1}{2}$. Решая это неравенство, получим:

$$2n > (x=1)(n+1),$$
$$2n > nx + n + x + 1,$$
$$n > \frac{x+1}{1-x}.$$

Очевидно, что лишь конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$ может попасть в пределы выбранного интервала.

Теорема 5.13 (Вейерштрасса). Бесконечное ограниченное множество точек E имеет по крайней мере одну предельную точку.

Доказательство. Предположим, что элементы бесконечного множества E удовлетворяют условию $c \le x \le d$. Разобьем отрезок $[c, d]$ пополам и обозначим через Δ_1 самую правую его половину, которая содержит бесконечное множество точек (по крайней мере одна из его половин содержит бесконечное множество точек). Разделим теперь пополам отрезок Δ_1 и обозначим через Δ_2 самую правую его половину, которая содержит бесконечное множество точек. Продолжая действовать подобным образом, мы получим последовательность вложенных друг в друга отрезков, которые имеют единственную общую точку. Любая окрестность этой точки, очевидно, содержит бесконечное множество точек рассматриваемого множества. Следовательно, эта точка будет предельной точкой множества E.

6. Функции. Способы задания функций

Окружающий нас мир постоянно меняется. Изменяются температура и влажность воздуха, атмосферное давление, курс доллара, цены на товары, объемы производства продукции на заводах и т.д. Постоянные (не изменяющиеся) величины встречаются крайне редко. Примерами постоянных величин являются:

- отношение длины окружности к ее диаметру: для любой окружности $l/d = \pi = 3{,}14...$;
- сумма углов плоского треугольника: для любого плоского треугольника $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ рад;
- фундаментальные физические постоянные: скорость распространения электромагнитных волн в вакууме $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с, заряд электрона $e \approx \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл и др.

Значительно чаще мы имеем дело с переменными величинами.

Пусть E есть множество чисел, и в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из множества E приведено в соответствие (одно) число y. Тогда говорят, что на E задана (однозначная) ***функция*** *(одной переменной), которую записывают*

$$y = f(x) \quad (x \in E). \tag{6.1}$$

Говорят также, что этим задана ***независимая переменная (аргумент)*** *x, которая может принимать частные значения x из множества E, и каждому значению* $x \in E$ *в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой* ***функцией,*** *или* ***зависимой переменной****.*

Таким образом, термин "функция" может иметь два смысла - значение зависимой переменной, соответствующее определенному значению аргумента, и закон, устанавливающий соответствие между значениями аргумента и зависимой переменной. В первом случае для обозначения функции используют символ f(x), а во втором - часто ограничиваются одной буквой f.

На практике часто встречаются функции нескольких независимых переменных, а также неоднозначные функции. Например, температура у поверхности Земли может рассматриваться как функция координат (широты и долготы) точки, в которой она измеряется, а также времени. Ордината точки плоской окружности может быть представлена как функция абсциссы этой точки. При этом для большинства точек каждому значению абсциссы будут соответствовать два значения ординаты. Известными из школьного курса многозначными функциями являются обратные тригонометрические функции arcsin x, arctg x и др. Такие функции мы будем изучать позднее. В данном разделе, если это специально не оговаривается, будет идти речь об однозначных функциях одной переменной.

Для выражения понятия функции можно использовать геометрическую терминологию. *Говорят, что задано множество E точек x действи-*

*тельной прямой - **область определения** или **область задания** функции, и закон, в силу которого каждой точке* $x \in E$ *приводится в соответствие число y = f(x). Если некоторая точка* $x \notin E$, *то говорят, что функция f **не определена** в точке x.*

Множество E_1 *всех значений y = f(x) называется **образом** множества E или **множеством значений** функции f. Можно записать* $E_1 = f(E)$. *Говорят также, что функция f **отображает множество E на множество** E_1. Если образ* $E_1 = f(E) \subset A$, *где A - некоторое множество чисел, то говорят, что функция f **отображает множество E в множество A**.*

Зададим произвольное число $x \in [a,b]$ из области определения функции. Возьмем близкое к нему число $x' = x + \Delta x$, где Δx есть положительное либо отрицательное число, называемое ***приращением аргумента*** x.

Разность

$$\Delta f(x) = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

*называется **приращением функции f в точке x**, соответствующим приращению* Δx.

Из сделанного определения следует, что приращение функции в точке зависит от вида функции, выбранной точки и приращения аргумента, которому оно соответствует.

Для функций f и g, заданных на одном множестве E, определяются ***сумма*** f + g, ***разность*** f - g, ***произведение*** fg, ***частное*** f/g. Они являются новыми функциями, значения которых могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} f + g &= f(x) + g(x); \\ f - g &= f(x) - g(x); \\ fg &= f(x)g(x); \\ f/g &= f(x)/g(x), \end{aligned} \qquad (6.2)$$

при этом в случае частного предполагается, что $g(x) \neq 0 \ \ (x \in E)$.

Например, пусть f(x) = 2x, g(x) = 1 + x. Тогда:

$f + g = f(x) + g(x) = 1 + 3x;$
$f - g = f(x) - g(x) = x - 1;$
$fg = f(x)g(x) = 2x + 2x^2;$
$f/g = f(x)/g(x) = 2x/(1 + x) \quad (x \neq -1).$

Если функция f отображает множество E в E_1, *а функция F отображает множество* E_1 *в* E_2, *то функцию z = F(f(x)) называют **сложной функцией**, **функцией от функции,** или **суперпозицией функций f и F**. Она определена на множестве E и отображает E в* E_2.

Например, пусть $f(x) = y = x^2$; $F(y) = \sin y$. Тогда из функций f(x) и F(y) можно составить сложную функцию $z = F(f(x)) = \sin x^2$.

Сложная функция может быть также суперпозицией трех или большего числа функций. Например, пусть $y = f(x) = 2 + x$; $z = v(y) = \sqrt{y}$; $t = w(z) = \ln z$. Эти три функции задают сложную функцию $F(x) = \ln(\sqrt{2+x})$, которая определена для $x \in (-2,+\infty)$.

Существуют три основных способа задания функций - аналитический, графический и табличный.

Аналитически функция может быть задана в явном виде с помощью формулы либо в неявном виде с помощью уравнения, которое связывает аргумент и зависимую переменную. Например, формула $S = \pi r^2$ в явном виде задает функцию, которая устанавливает соответствие между радиусом круга r и его площадью S. Уравнение $e^x + e^y = 2$ задает в неявном виде функцию $y = f(x)$.

Приведем еще несколько примеров функций, которые заданы формулами:

$$1)\ y = \sqrt{16 - x^4}, \qquad 2)\ y = \ln(5 + 2x), \qquad 3)\ y = 3x + 7,$$

$$4)\ y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \qquad 5)\ y = \arccos x.$$

Мы пока рассматриваем действительные функции, то есть функции, принимающие действительные значения y для всех действительных значений аргумента x. Областями определения приведенных выше функций являются: 1) отрезок [-2, 2]; 2) интервал (-2,5; +∞); 3) вся действительная ось; 4) множество $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$; 5) отрезок [-1, 1]. Множествами значений этих функций являются: 1 - отрезок [0, 4]; 2 и 3 - интервал $(-\infty,+\infty)$; 4 – объединение интервалов $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$; 5 – отрезок $[-\pi, \pi]$.

Функции 1, 2 и 4 можно рассматривать как сложные функции:

1) $v = x^4;\ z = 16 - v;\ y = \sqrt{z}$;

2) $v = 5 + 2x;\ y = \ln v$;

3) $v = x^2 + 4;\ w = x - 2;\ y = v / w$.

На различных частях области определения функция может быть задана различными формулами. Например,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{2^x} & (-\infty<x<0),\\ 0 & (x=0),\\ \dfrac{x^2+2x}{2^x} & (x>0).\end{cases}$$

Необходимо уточнить, что мы будем называть формулой. В школьном курсе математики, говоря, что функция y = f(x) задается формулой, предполагают, что значение y можно получить из x, выполнив конечное число арифметических, алгебраических и тригонометрических операций. То есть, формула представляет собой комбинацию конечного числа математических знаков и букв. В математическом анализе понятие формулы расширяется. Позднее будет показано, что многие, если не все, встречающиеся на практике функции могут быть изображены формулой, представляющей собой некоторый бесконечный ряд, членами которого являются так называемые элементарные функции, которые будут рассмотрены несколько позже.

Достоинствами аналитического способа задания функций являются возможность установления области определения функции и нахождения ее точных значений в любой точке области определения. Недостатком аналитического способа является его плохая наглядность. Уже при не очень сложных формулах, задающих функции, без дополнительного анализа бывает трудно установить, возрастает или убывает функция в данной точке или на данном интервале, имеются ли у нее максимумы и минимумы, принадлежит ли выбранная точка области определения и т.п.

Другим методом задания функций является графический. Зададим прямоугольную декартову систему координат xOy, выберем на оси x отрезок [a, b] и изобразим кривую Γ, обладающую следующим свойством: для любой точки $x_0 \in [a,b]$ прямая, проходящая через нее параллельно оси Oy, пересекает кривую Γ только в одной точке A (рис. 6.1).

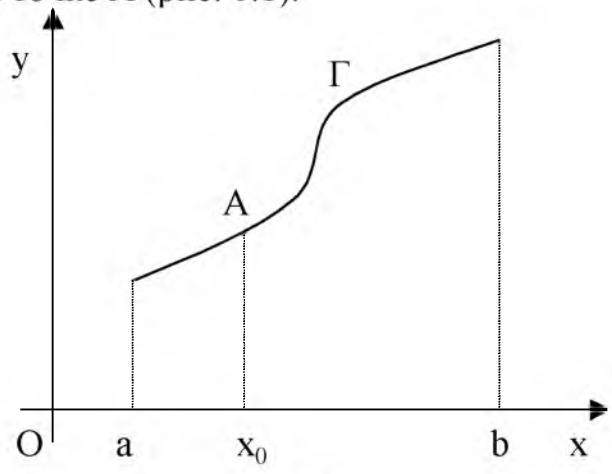


Рис. 6.1

Такую заданную в прямоугольной декартовой системе координат кривую Г называют ***графиком функции***. График определяет функцию y = f(x) на отрезке [a, b] следующим образом: если $A = (x_0, y_0)$, $x \in [a, b]$ есть некоторая точка графика, то соответствующее значение $y_0 = f(x_0)$ есть значение функции в точке x_0. С помощью графика функция может быть задана не только на отрезке, но также на интервале, полуинтервале, всей действительной оси и других числовых множествах.

Зададим на произвольном интервале (a, b) функцию f(x) и произвольное число $\alpha \neq 0$. С их помощью мы можем сконструировать новые функции, например: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x)+\alpha$; 3) $f(x+\alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. Функции 1 и 2 определены на том же интервале (a, b), что и функция f(x). При этом ординаты графика функции 1 в α раз больше соответствующих ординат графика f(x), то есть график функции 1 по сравнению с графиком функции f(x) растянут в α раз вдоль оси Ox, если α > 1, или сжат в 1/ α раз, если 0 < α < 1 (рис. 6.2). Для отрицательных значений α график функции 1 симметричен относительно оси Ox растянутому в $|\alpha|$ раз графику f(x), если $\alpha < -1$, или сжатому в $1/|\alpha|$ раз графику f(x), если $-1 < \alpha < 0$.

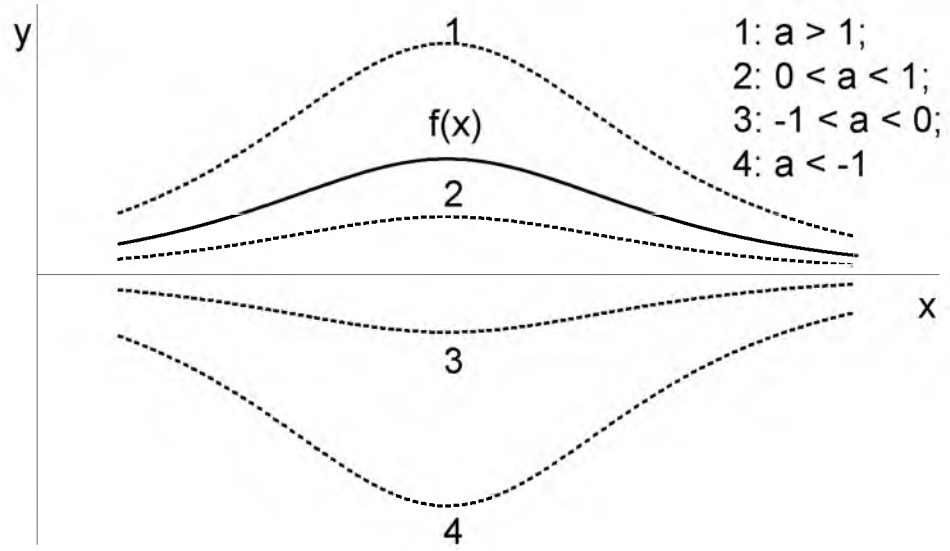


Рис. 6.2

График функции 2 по сравнению с графиком f(x) поднят на величину α при α > 0 и опущен на ту же величину при α < 0 (рис. 6.3). График функции 3 получается сдвигом графика функции f(x) влево на величину α, если α > 0, и сдвигом его вправо на величину α, если α < 0 (рис. 6.4). При этом функция 3 определена на интервале $(a-\alpha, b-\alpha)$. Если α > 0, то функция 4 определена на интервале $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right)$. Ее график получается из графика функции f(x) путем его равномерного сжатия в α раз при α > 1 или равномерного растяжения в 1/α раз при α < 1 (рис. 6.5). Если же

$\alpha < 0$, то функция 4 определена на интервале $\left(\frac{b}{\alpha},\frac{a}{\alpha}\right)$. Ее график симметричен относительно оси ординат равномерно сжатому в α раз (для $\alpha < -1$) или равномерно растянутому в $1/\alpha$ раз (для $\alpha > -1$) графику функции f(x).

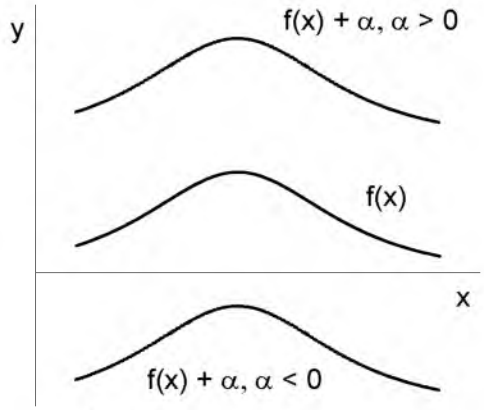


Рис. 6.3

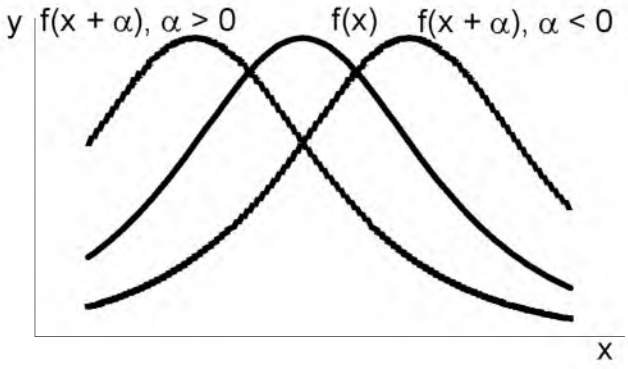


Рис. 6.4

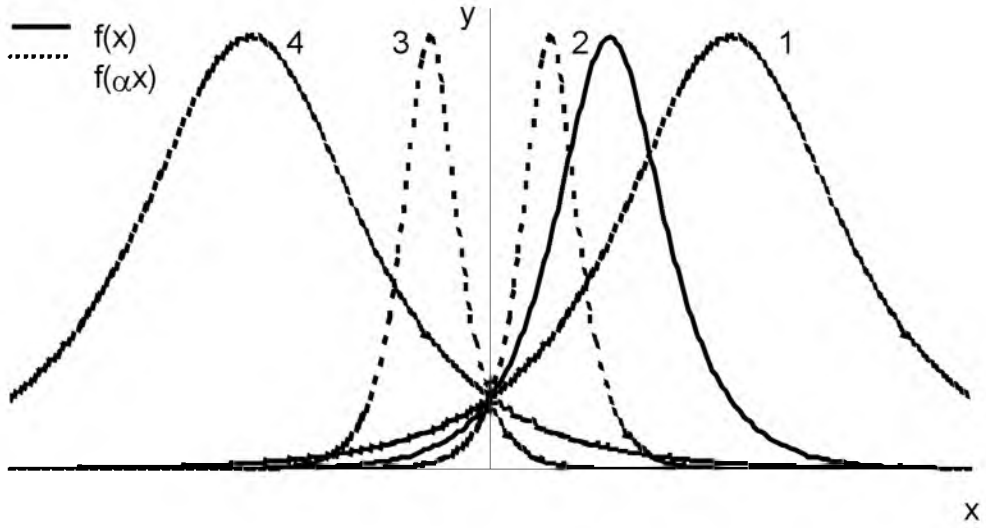


Рис. 6.5: $\alpha > 1$ (1); $0 < \alpha < 1$ (2); $-1 < \alpha < 0$ (3); $\alpha < -1$ (4)

Достоинствами графического способа задания функций являются его простота и наглядность. На графике легко увидеть области возрастания и убывания функций, точки максимума и минимума и т.п. Из графика мы можем найти значения функции для любого x, измерив ординату соответствующей точки. Правда, точность определения этих значений будет невысокой. Недостатком графического способа является также то, что, как правило, на графике можно изобразить лишь часть функции. Кроме того, этот способ становится непригодным, если требуется задать функцию, зависящую от трех и большего числа переменных.

Третьим способом задания функций является табличный. Например, измеряя через некоторые промежутки времени температуру воды в чайнике при его нагреве, мы можем получить следующую таблицу.

t, мин	0	2	4	6	8	10	12
T, °C	20	39	54	67	77	86	94

Полученная таблица задает функцию T = f(t), областью определения которой является объединение числа 0 и множества четных чисел от 2 до 12. Из таблицы легко увидеть характер изменения функции. В приведенном примере, как мы видим, температура воды с течением времени возрастает. Однако скорость нагрева постепенно замедляется, так как приросты температуры через равные промежутки времени постепенно уменьшаются. Из таблицы легко увидеть существование максимумов и минимумов функции. Кроме того, таблица дает точные значения функции в некоторых точках.

Табличный способ задания функций является наиболее простым и исторически наиболее ранним. Он широко используется на практике. Результаты измерения физических и химических величин с помощью цифровых и стрелочных приборов, результаты социологических, экономических и других исследований обычно получают в виде таблиц. Наконец, табличный способ задания функций наиболее удобен для обработки результатов на ЭВМ. Вместе с тем табличный способ не дает информации о том, как ведет себя функция в промежутках между известными нам точками. Она может быть вообще не определена в этих промежутках. Кроме того, из рис. 6.6 видно, что, имея некоторый набор пар соответственных значений (точек) переменных x и y, мы можем построить множество весьма различных функций, графики которых будут проходить через все заданные точки.

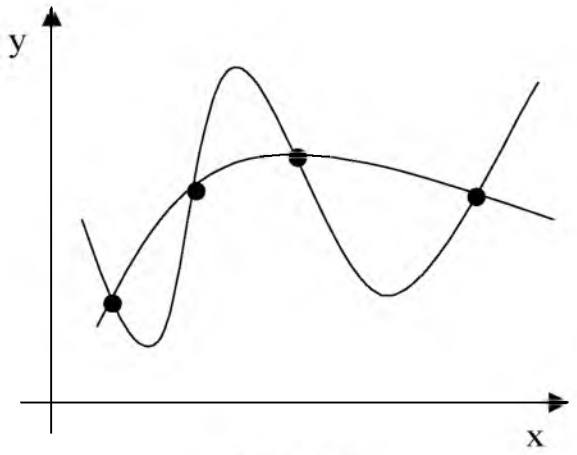


Рис. 6.6

Функция f называется ***четной*** *или* ***нечетной****, если она определена на множестве, симметричном относительно x = 0, и обладает на нем свойством f(-x) = f(x) или свойством f(-x) = -f(x), соответственно.*

Большинство функций не являются ни четными, ни нечетными. Легко проверить, что график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции - относительно начала координат (рис. 6.7). Приме-

рами четных функций являются функции $x^2, \cos x, |x|$. Примерами нечетных функций являются функции $x^3, \sin x, 1/x$. Функции $x^3 - 2x^2$, $\dfrac{1}{x+1}$, $\sin(x-2)$ не являются ни четными, ни нечетными.

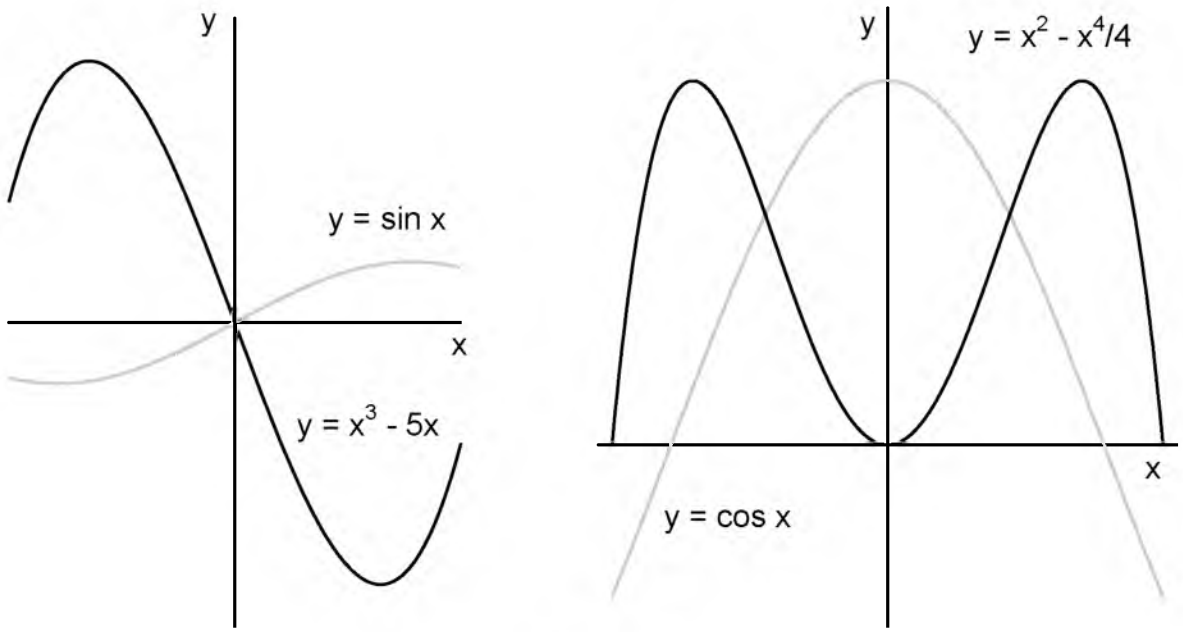


Рис. 6.7

Отметим, что многочлен $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, который является четной функцией, может содержать только четные степени независимой переменной, а многочлен, являющийся нечетной функцией, – только ее нечетные степени.

Теорема 6.1. Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией. Произведение четной функции на нечетную является нечетной функцией.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x)g(x)$. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ – четные, то:

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = F(x),$$

и $F(x)$ есть четная функция. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ – нечетные, то:

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = F(x),$$

и, следовательно, функция $F(x)$ – четная. Если же одна из функций, например $f(x)$, – четная, а вторая – нечетная, то для их произведения справедливо:

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -F(x).$$

Поэтому функция F(x) – нечетная. ☺

Функция f называется ***строго возрастающей на интервале (a, b) (или на отрезке [a, b])****, если для любых двух точек* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *(соответственно,* $x_1, x_2 \in [a, b]$*), удовлетворяющих неравенству* $x_1 < x_2$*, имеет место неравенство* $f(x_1) < f(x_2)$*.*

Функция f называется ***неубывающей на интервале (a, b) (или на отрезке [a, b])****, если для любых двух точек* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *(соответственно,* $x_1, x_2 \in [a, b]$*), удовлетворяющих неравенству* $x_1 < x_2$*, имеет место неравенство* $f(x_1) \le f(x_2)$*.*

Функция f называется ***строго убывающей на интервале (a, b) (или на отрезке [a, b])****, если для любых двух точек* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *(соответственно,* $x_1, x_2 \in [a, b]$*), удовлетворяющих неравенству* $x_1 < x_2$*, имеет место неравенство* $f(x_1) > f(x_2)$*.*

Функция f называется ***невозрастающей на интервале (a, b) (или на отрезке [a, b])****, если для любых двух точек* $x_1, x_2 \in (a, b)$ *(соответственно,* $x_1, x_2 \in [a, b]$*), удовлетворяющих неравенству* $x_1 < x_2$*, имеет место неравенство* $f(x_1) \ge f(x_2)$*.*

Неубывающие и невозрастающие на множестве E функции носят общее название ***монотонных*** *на E функций.*

По определению, функция f:

1) ***возрастает в точке x****, если существует такое* $\delta > 0$*, что*

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{6.3}$$

2) ***убывает в точке x****, если существует такое* $\delta > 0$*, что*

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0 \quad (0 < |\Delta x| < \delta); \tag{6.4}$$

3) ***достигает в точке x локального максимума****, если существует такое* $\delta > 0$*, что*

$$f(x + \Delta x) - f(x) \le 0 \quad (|\Delta x| < \delta); \tag{6.5}$$

4) ***достигает в точке x локального минимума****, если существует такое* $\delta > 0$*, что*

$$f(x + \Delta x) - f(x) \ge 0 \quad (|\Delta x| < \delta). \tag{6.6}$$

Локальные максимум и минимум функции называют также ее ***локальными экстремумами****. Локальные экстремумы называют* ***собственными****, если неравенства (6.5) и (6.6) выполняются строго. В противном случае их называют* ***несобственными****.*

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2x$. Для точки $x = -3$ существует такое $\delta > 0$, например $\delta = 1$, что для всех $\Delta x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ справедливо:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 2 = -8 + \Delta x < 0.$$

Таким образом, в точке $x = -3$ функция $f(x) = x^2 - 2x$ убывает. Для точки $x = 1$ при тех же δ и Δx:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x = 2\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x = \Delta x^2 > 0.$$

Следовательно, $x = 1$ есть точка минимума функции $f(x) = x^2 - 2x$. В точке $x = 3$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 2 = 4 + \Delta x > 0,$$

т.е. в точке $x = 3$ функция $f(x) = x^2 - 2x$ возрастает.

7. Предел функции

Число A называется ***пределом функции f в точке a****, если она определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого ε > 0 можно указать зависящее от него δ > 0 такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству* $0 < |x - a| < \delta$, *имеет место* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В данном определении дополнительное условие, что функция может быть не определена в самой точке a, сделано для общности, т.е. функция может быть в этой точке определена, а может быть и не определена. Его следствием является условие $0 < |x - a| < \delta$. Если бы в точке a функция была определена всегда, то достаточно было бы условия $|x - a| < \delta$.

Предел функции обозначается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \,(x \to a).$$

Во многих случаях (позднее будет уточнено, когда именно) предел функции в точке равен значению функции в этой точке.

Основываясь на понятии предела последовательности, можно дать иное эквивалентное определение предела функции: *число A называется* ***пределом функции f в точке a****, если она определена в некоторой окрестности* $\cup(a)$ *точки a за исключением, быть может, самой точки a, и если предел последовательности* $\{f(x_n)\}$ *существует и равен A для любой последовательности* $\{x_n\}$, *сходящейся к a и удовлетворяющей условию* $x_n \in \cup(a),\ x_n \neq a$ *для всех n.*

Докажем эквивалентность данных определений. Предположим, что существует такая сходящаяся к a последовательность $\{x_n\}$, для которой предел последовательности $\{f(x_n)\}$ не существует или не равен A. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, и в то же время для любого (в том числе сколь угодно малого) $\delta > 0$ и любого $M > N$ найдется бесконечно много таких x_m ($m > M$), что $|f(x_n) - A| \geq \delta$. Но это означает, что для любого $\delta > 0$ невозможно указать такое $\varepsilon > 0$, что из условия $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),\ x \neq a$ следует неравенство $|f(x_n) - A| < \delta$. То есть, невыполнение условий второго определения приводит к невыполнению условий первого. Таким образом, второе определение можно считать следствием первого.

Теперь предположим, что условия второго определения выполнены, но при этом не выполняется первое определение, то есть при любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существуют такие значения $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),\ x \neq a$, что $|f(x) - A| \geq \delta$. Построим

последовательность $\{x_n\}$ следующим образом. Зададим произвольные $\delta > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$. В качестве x_1 выберем произвольное значение $x \in (a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1), x \neq a$, для которого $f(x) \geq \delta$ (в силу сделанного предположения такие значения всегда существуют). Зададим следующее значение $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и выберем в качестве x_2 произвольное значение $x \in (a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2), x \neq a$, для которого $f(x) \geq \delta$. Продолжая действовать по тому же алгоритму, получим последовательность $\{x_n\} \to a$. Ей будет соответствовать некоторая последовательность $\{f(x_n)\}$, которая не сходится к числу A, что противоречит предположению о выполнении условий второго определения. Таким образом, нарушение условий первого определения приводит к нарушению условий второго, то есть первое определение можно рассматривать как следствие второго. Поскольку, как было показано выше, второе определение также следует из первого, мы можем сделать вывод, что эти определения эквивалентны. ☺

Часто говорят не о пределе функции в точке a, а о пределе функции при $x \to a$. Смысл этого понятия заключается в том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь при этом отличным от a, то соответствующее значение f(x) приближается к A.

Пример 1. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$. Эта функция определена для всех $x \neq -3$. При этом для любого $x \neq -3$ $f(x) = \varphi(x) = \dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x - 3$ и $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \varphi(x) = -6$. Таким образом, вместо вычисления предела сложной функции можно вычислять предел более простой функции. Пример показывает также, что функция может иметь предел в точке, где она не определена.

Пример 2. Пусть $\psi(x) = \sin(1/x)$. График этой функции показан на рисунке 7.1. Функция $\psi(x)$ определена для всех действительных $x \neq 0$. Она не имеет предела при $x \to 0$.

В самом деле, пусть $x_k = \dfrac{2}{\pi(2k+1)} (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда $1/x_k = (2k+1)\pi/2$ и $\{f(x_k)\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$. То есть, при $x_k \to 0$ последовательность $\{f(x_k\}$ не стремится ни к какому пределу.

Если предел функции при $x \to a$ не существует, то для отдельных последовательностей $\{x_n\} \to a \ (n \to \infty)$ предел $\lim\{f(x_n)\}$ может существовать. Например, для рассмотренной выше функции можно выделить последовательности $\{x_k\} = \dfrac{1}{k\pi}$; $\{x_n\} = \dfrac{2}{(4k+1)\pi}$; $\{x_n\} = \dfrac{2}{(4k+3)\pi}$, пределы которых равны, соответственно, 0, 1 и –1. Можно выделить и бесконечно много других последовательностей $\{x_n\} \to a \ (n \to \infty)$, для которых предел $\lim\{f(x_n)\}$ существует и находится на отрезке $[-1, 1]$.

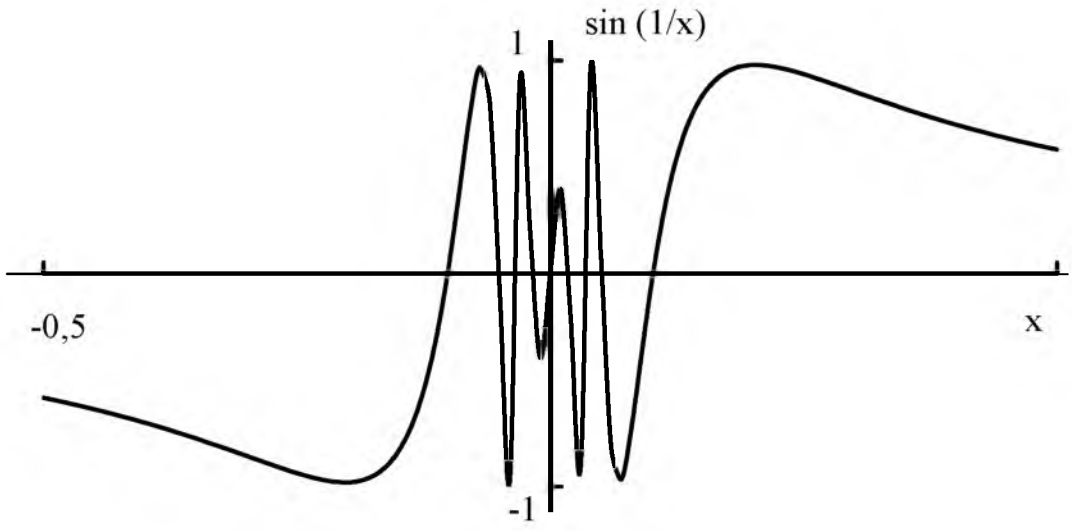


Рис. 7.1. График функции $f(x) = \sin(1/x)$

По аналогии с терминологией, используемой для последовательностей, такие пределы называют ***частичными пределами функции*** и выделяют среди них ***верхний*** и ***нижний пределы***. Можно показать, что равенство верхнего и нижнего пределов является необходимым и достаточным условием существования предела функции.

Число A называется ***пределом функции f при x*** $\to \infty$, *если функция f определена для всех x, удовлетворяющих неравенству* $|x| > K$ *при некотором* $K > 0$, *и для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти число M > K такое, что* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *для всех x, удовлетворяющих неравенству* $|x| > M$.

Можно также дать следующее эквивалентное определение. *Число A называется* ***пределом функции f при x*** $\to \infty$, *если f(x) определена для всех x, удовлетворяющих условию* $|x| > M$ *при некотором положительном M и* $\lim\limits_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$ *для любой последовательности* $\{x_n\} \to \infty$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$. Ее пределом при $x \to \infty$ является единица. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, получаем:

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} < \frac{1}{M} < \varepsilon .$$

Можно ввести другие бесконечные пределы функции, в частности: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ и т.д. Первое из приведенных соотношений выражает, что функция f определена в некоторой окрестности $+\infty$, и для любого

положительного числа N существует число L такое, что для всех x > L имеет место f(x) > N. Например, если $f(x)=x^3$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Второе соотношение выражает, что функция f определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и для любого положительного числа N можно найти такое $\delta>0$, что для всех $x\in(a-\delta,a+\delta)$ будет справедливо неравенство $f(x)<-N$. Для функции $f(x)=-\dfrac{2}{(x-3)^2}$ предел $\lim\limits_{x\to3} f(x)=-\infty$.

Теорема 7.1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, где A – конечное число, то в некоторой окрестности $\cup(a)$ функция f ограничена, то есть существует положительное число M такое, что $|f(x)|\le M$ для всех $x\in\cup(a), x\ne a$.

Доказательство. Примем $\varepsilon=1$. Из определения предела функции следует, что в некоторой окрестности $\cup(a)$ $|f(x)-A|<\varepsilon=1$. Тогда $1>|f(x)-A|\ge|f(x)|-|A|\Rightarrow|f(x)|<1+|A|$. Выбирая $M=1+|A|$, получаем $|f(x)|<M$, что и требовалось доказать. ☺

Условие $x\ne a$ в формулировках этой и последующих теорем обусловлено тем, что функция, имеющая предел в точке a, может быть не определена в этой точке. Если же функция в точке a определена, то условие $|f(x)|\le M$ будет выполняться и для x = a, т.к. в этом случае значение f(a) будет конечным числом.

Теорема 7.2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $A\ne0$, то существует такая окрестность $\cup(a)$, что $|f(x)|>|A|/2$ для всех $x\in\cup(a), x\ne a$. Более того, для указанных x справедливы неравенства $f(x)>A/2$, если A > 0, и $f(x)<A/2$, если A < 0.

Доказательство. Из условия теоремы и определения предела функции следует, что для $\varepsilon=|A|/2$ существует такая окрестность точки a, что

$$\frac{|A|}{2}>|A-f(x)|\ge|A|-|f(x)|\Rightarrow|f(x)|>\frac{|A|}{2}. \qquad (7.1)$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Из неравенства (7.1) следует $A-\dfrac{|A|}{2}<f(x)<A+\dfrac{|A|}{2}$.

Отсюда имеем: для A > 0 - $f(x)>A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}$;

для A < 0 - $f(x)<A+\dfrac{-A}{2}=\dfrac{A}{2}$.

Теорема доказана. ☺

Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x)=\cos x$. Ее предел $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Можно указать такую окрестность $\cup(1)$, а именно - $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$, что для всех принадлежащих ей значений x будет выполняться неравенство $\cos x>0{,}5$.

Теорема 7.3. Если $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=A_1$ **и** $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=A_2$**, и на некоторой окрестности** $\cup(a), x\neq a$ **выполняется неравенство** $f_1(x)\le f_2(x)$**, то** $A_1\le A_2$**.**

Доказательство. Предположим, что условие теоремы выполняется. Тогда из определения предела последовательности следует:

$$A_1-\varepsilon<f_1(x)\le f_2(x)<A_2+\varepsilon \;\Rightarrow\; A_1<A_2+2\varepsilon.$$

Поскольку полученное неравенство должно выполняться при любых, в том числе сколь угодно малых положительных значениях ε, $A_1\le A_2$. В самом деле, при $A_1=A_2$ условие $A_1<A_2+\varepsilon$, очевидно, будет выполнено при любом $\varepsilon>0$. Если же $A_1>A_2$, то для $\varepsilon\le(A_1-A_2)/2$ получим $A_1<A_2+A_1-A_2$, т.е. $A_1<A_1$. ☺

Следует отметить, что даже если для значений функции сформулировать более жесткое условие $f_1(x)<f_2(x)$, то о пределах мы сможем утверждать лишь то, что $A_1\le A_2$.

Рассмотрим в качестве примера функции $f_1(x)=\frac{x-1}{x-2}$ и $f_2(x)=\frac{x+1}{x+2}$. Для всех $x>2$ справедливо $f_2(x)<f_1(x)$. Однако $\lim\limits_{x\to\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f_2(x)=1$. Для функций $g_1(x)=\sin x$ и $g_2(x)=2\sin x$ на интервале $(0,\pi)$ выполняется неравенство $g_1(x)<g_2(x)$. Аналогичное соотношение выполняется для пределов этих функций в любой точке указанного интервала, например:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g_1(x)=1<2=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}g_2(x).$$

Теорема 7.4. Если $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=A$**, и на некоторой окрестности** $\cup(a)$, $x\neq a$ **выполняется неравенство** $f_1(x)\le\varphi(x)\le f_2(x)$**, то** $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$**.**

Доказательство. Согласно определению предела и условию теоремы, в некоторой окрестности точки a справедливо:

$$A-\varepsilon<f_1(x)\le\varphi(x)\le f_2(x)<A+\varepsilon \;\Rightarrow\; A-\varepsilon<\varphi(x)<A+\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$. ☺

Теорема 7.5 (критерий Больцано-Коши существования предела функции). Для того чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и для всякого $\varepsilon>0$ существовала такая окрестность $\cup(a)$, что для любых точек $x',x''\in\cup(a);\ x',x''\neq a$, было справедливо неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Доказательство. Докажем вначале, что указанное условие является необходимым, то есть из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ следует, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, где A - конечное число. Тогда существует такая окрестность $\cup(a)$, для которой $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, и

$$|f(x'-f(x'')|=|(f(x')-A)+(A-f(x''))|=|(f(x')-A)-(f(x'')-A)|\geq$$
$$\geq|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом, необходимость рассматриваемого условия доказана. Теперь докажем, что оно является достаточным, то есть из того, что в некоторой окрестности $\cup(a)$ для любых $x',x''\in\cup(a);\ x',x''\neq a$ $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ следует, что функция f имеет в точке a конечный предел.

Зададим произвольную последовательность $\{x_n\}\to a,\ x_n\neq a$. Согласно критерию Больцано-Коши, для всякой сходящейся последовательности найдется натуральное число N такое, что для любых $n,m>N$ будет справедливо $x_n,x_m\in\cup(a)$. Тогда, согласно условию теоремы, $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$, последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условию Больцано-Коши и, следовательно, имеет предел. Таким образом, для каждой сходящейся к a последовательности действительных чисел $x_n\neq a$ существует $\lim f(x_n)$. Рассмотрим две последовательности $\{x_n'\}\to a$ и $\{x_n'\}\to a$, для которых $x_n',x_n''\neq a$. Тогда $\{f(x_n')\}\to A'$ и $f(x_n'')\to A''$. Составим последовательность $\{x_1',x_1'',x_2',x_2'',\ldots\}$. Она будет сходиться к a. Тогда последовательность $\{f(x_1'),f(x_1''),f(x_2'),f(x_2''),\ldots\}$ должна иметь конечный предел A. Это возможно только в том случае, если $A=A'=A''$. Таким образом, имеет конечный предел, равный A, и функция f. Теорема доказана. ☺

Теорема 7.6. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, где A и B - конечные числа. Тогда:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=A\pm B;$$
$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\varphi(x)\right]=AB;$$
$$\lim_{x\to a}\left[f(x)/\varphi(x)\right]=A/B\ \ (B\neq 0).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}\to a$, $x_n\neq a$. Согласно определению предела функции, $\lim f(x_n)=A$, $\lim\varphi(x_n)=B$. Из теоремы 3.8 следует, что для пределов последовательностей $\{f(x_n)\pm\varphi(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot\varphi(x_n)\}$ и $\{f(x_n)/\varphi(x_n)\}$ справедливы следующие равенства:

$$\lim\{f(x_n)\pm\varphi(x_n)\}=A\pm B;$$
$$\lim\{f(x_n)\cdot\varphi(x_n)\}=AB;$$
$$\lim\{f(x_n)/\varphi(x_n)\}=A/B.$$

Эти равенства справедливы для любой последовательности $\{x_n\}\to a$, $x_n\neq a$. Отсюда, согласно определению предела функции, следует справедливость утверждения теоремы. ☺

Пусть, например, $f(x)=\dfrac{x-1}{2-x}$, $g(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=-\frac{1}{2};\ \lim_{x\to 0}g(x)=-2;$$

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-1}{2-x}+\frac{x-2}{x+1}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4x-5}{-x^2+x+2}\right]=-2\frac{1}{2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}g(x);$$

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-1}{2-x}-\frac{x-2}{x+1}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x^2-4x+3}{-x^2+x+2}\right]=1\frac{1}{2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}f(x)-\lim_{x\to 0}g(x);$$

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-1}{2-x}\cdot\frac{x-2}{x+1}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-x}{x+1}\right]=1=\lim_{x\to 0}f(x)\cdot\lim_{x\to 0}g(x);$$

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)/g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-1}{2-x}:\frac{x-2}{x+1}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2-1}{-x^2+4x-4}\right]=\frac{1}{4}=$$
$$=\lim_{x\to 0}f(x)\cdot\lim_{x\to 0}g(x).$$

Теорема 7.7. Если функция f(x) в некоторой окрестности $\cup(a)$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| > M > 0$, а для функции $\varphi(x)$ имеет место $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ ($\varphi(x) \neq 0$ при $x \neq a$), то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$.

Доказательство. Из того, что $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, на основании определения предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую окрестность $\cup_1(a)$, что для всех $x \in \cup_1(a)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$. Принимая $W = \dfrac{1}{\varepsilon}$, получаем: $\dfrac{1}{|\varphi(x)|} > W$ для всех $x \in \cup_1(a)$. При этом $W \to +\infty$, когда $\varepsilon \to 0$. Таким образом, для любого положительного числа W можно указать такую окрестность точки a, что $\left|\dfrac{1}{\varphi(x)}\right| > W$ при $x \in \cup_1(a)$. Учитывая первое условие теоремы, получаем: $\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right| > MW$ при $x \in \cup(a) \cap \cup_1(a)$.

Пусть $M \geq 1$. Тогда из полученного неравенства, согласно определению, следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$. Если же $0 < M < 1$, то следует учесть, что мы можем выбрать новую окрестность $\cup_2(a) \subset \cup_1(a)$ такую, что для всех $x \in \cup_2(a)$ будет выполняться неравенство $\dfrac{1}{|\varphi(x)|} > MW$. Отсюда видно, что при $0 < M < 1$ для любого положительного числа W мы также можем указать окрестность $\cup(a) \cap \cup_2(a)$ точки a такую, что для всех принадлежащих ей значений x выполняется неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right| > MW$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, что и требовалось доказать. ☺

Следствие. Если функция $\varphi(x) \to 0\,(x \to a, \varphi(x) \neq 0)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\varphi(x)} = \infty$.

Теорема 7.8. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где A - конечное число и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Доказательство. Согласно определению, для любых $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ существуют такие окрестности $\cup_1(a)$ и $\cup_2(a)$, что для всех $x \in \cup_1(a), x \neq a$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, и для всех $x \in \cup_2(a)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| > M$ или $0 < \dfrac{1}{|\varphi(x)|} < \dfrac{1}{M}$. Но тогда для всех $x \in \cup_1(a) \cap \cup_2(a), x \neq a$

будет выполняться неравенство $0 < \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{M}$. Таким образом, для любого $\varepsilon^* > 0$ существует такая окрестность $\cup(a) = \cup_1(a) \cap \cup_2(a)$, что для всех $x \in \cup(a)$, $x \neq a$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| < \varepsilon^*$. Это и означает, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$. ☺

Следствие. Если функция $\varphi(x) \to \infty \left(x \to a, \varphi(x) \neq 0\right)$**, то** $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0$**.**

Теорема 7.9. Пусть для функции f(x), определенной в некоторой окрестности точки a (конечной или бесконечной), выполняется условие: из всякой сходящейся к a последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ **можно выделить подпоследовательность** $\{x_{n_k}\}$**, для которой** $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = A$**. Тогда** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$**.**

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A$. Тогда на основании (второго) определения предела функции можно сделать вывод, что существует такая последовательность $\{x_n\} \to a$, что $\lim\{f(x_n)\} \neq A$. Если эта последовательность сходится к числу $B \neq A$, то все ее подпоследовательности также сходятся к числу B. Следовательно, из нее нельзя выделить подпоследовательность, которая сходится к A, что противоречит условию. Если же последовательность $\{f(x_n)\}$ не имеет предела, то из нее можно выделить подпоследовательность, которая сходится к конечному числу, отличному от A, -∞ или +∞. Любая ее подпоследовательность будет сходиться к тому же пределу, т.е. не будет сходиться к числу A. Таким образом, предположение о том, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A$, противоречит условию теоремы, и мы должны сделать вывод, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. ☺

8. Непрерывность функции в точке

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа. Рассмотрим два графика, показанные на рис. 8.1 и 8.2. График функции, представленный на рис. 8.1, естественно назвать непрерывным. Он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги.

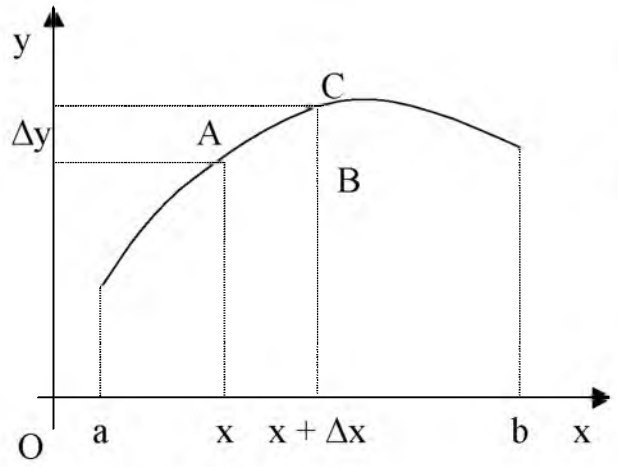


Рис. 8.1

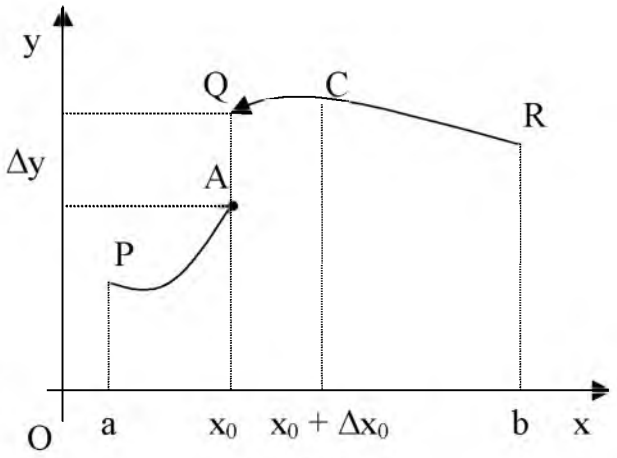


Рис. 8.2

Зададим произвольное число $x \in [a,b]$ из области определения функции, показанной на рис. 8.1, и некоторое достаточно малое приращение аргумента Δx. Соответствующее приращение функции Δy на рис. 8.1 равно длине отрезка BC. Очевидно, что если мы будем уменьшать Δx, то приращение функции Δy тоже будет уменьшаться, и $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Теперь рассмотрим график функции, показанной на рис. 8.2. Он состоит из двух непрерывных кусков, которые не соединены друг с другом. В точке x_0 этот график имеет разрыв. Условимся для определенности считать, что значение рассматриваемой функции в точке x_0 равно длине отрезка, соединяющего точку A с точкой $(x_0, 0)$. В знак того, что точка A принадлежит графику функции, она выделена кружком. Стрелка, нарисованная у точки Q, показывает, что точка Q не принадлежит графику функции f. Рассмотрим изменение приращения функции в точке x_0 при $\Delta x \to 0$. Если $\Delta x < 0$, то, как и в предыдущем случае, $\Delta y \to 0$. Если же $\Delta x > 0$, то при $\Delta x \to 0$ приращение функции будет стремиться к положительному числу, равному длине отрезка AQ на рис. 8.2.

Функцию f(x) называют ***непрерывной в точке a*** *(конечной), если она определена в ее некоторой окрестности (в том числе и в самой точке a) и при этом* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Примечание. Из того, что f(x) определена в некоторой окрестности $\cup(a)$, следует, что значения функции при всех $x \in \cup(a)$, а также $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ являются конечными числами.

Пусть функция f(x) определена в некоторой окрестности конечной точки a, и пусть существует такое положительное число ε_0, *что для любого* $\delta > 0$ *найдется точка* x_δ *такая, что* $|a - x_\delta| < \delta; |f(a) - f(x_\delta)| \geq \varepsilon_0$. *Тогда говорят, что функция f(x)* ***разрывна (имеет разрыв)*** *в точке a.*

Математическое понятие непрерывности функции отражает часто встречающееся на практике свойство, которое заключается в том, что малому приращению аргумента соответствует малое приращение зависимой переменной (функции). Понятие непрерывности возникло как результат идеализированного описания движения тел в пространстве, изменения физических систем со временем, так называемых сплошных сред - газов, жидкостей, твердых тел и т.п. процессов и объектов. Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которыми оперирует математический анализ. Разрывные функции отражают происходящие в природе и обществе скачкообразные и дискретные процессы и системы. Например, скорость и энергия движущегося тела скачкообразно изменяются при ударе; объем, плотность и многие другие свойства вещества скачкообразно изменяются при плавлении или кристаллизации, а для наносистем также и при изменении числа атомов и т.п.

Основные свойства непрерывных функций выражают приведенные ниже теоремы.

Теорема 8.1. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны в точке a, то непрерывными в точке a являются их сумма $f(x) \pm \varphi(x)$**, произведение** $f(x) \cdot \varphi(x)$**, а также, при дополнительном условии** $\varphi(a) \neq 0$**, частное** $f(x)/\varphi(x)$**.**

Доказательство. Из того, что f(x) и φ(x) определены в некоторой окрестности $\cup(a)$, следует, что в той же окрестности определены функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, а также, если $\varphi(a) \neq 0$, функция $f(x)/\varphi(x)$.

Согласно определению непрерывности, из того, что функции f(x) и φ(x) непрерывны в точке a, следует, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$. Тогда, согласно теореме 7.6,

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) \pm \varphi(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \varphi(x) = f(a) \pm \varphi(a);$$
$$\lim_{x \to a}\left(f(x)\varphi(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} \varphi(x) = f(a)\varphi(a);$$
$$\lim_{x \to a}\left(f(a)/\varphi(a)\right) = \lim_{x \to a} f(a) / \lim_{x \to a} \varphi(a) = f(a)/\varphi(a) \quad \left(\varphi(a) \neq 0\right).$$

Из того, что функции f(x) и φ(x) определены в некоторой окрестности $\cup(a)$, следует, что в той же окрестности определены также функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$ и, при дополнительном условии $\varphi(a) \neq 0$, функция $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Согласно определению непрерывности, из полученных равенств следует справедливость утверждения теоремы. ☺

Теорема 8.2. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке a, и функция f(y) непрерывна в точке $b=\varphi(a)$, то сложная функция $F(x)=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Зададим $\varepsilon>0$. Вследствие непрерывности функции f в точке b найдется такое $\sigma>0$, что f(y) определена на интервале $(b-\sigma;b+\sigma)$, и $|f(y)-f(b)|<\varepsilon$ для всех $y\in(b-\sigma,b+\sigma)$. Вследствие непрерывности $\varphi(x)$ найдется $\delta>0$ такое, что $\varphi(x)$ определена на интервале $(a-\delta,a+\delta)$, и $|\varphi(x)-\varphi(a)|<\sigma$ для $|x-a|<\delta$. Отсюда следует, что для всех $x\in(a-\delta,a+\delta)$ сложная функция $f(\varphi(x))$ определена и $|f(\varphi(x))-f(\varphi(a))|<\varepsilon$ или $|F(x)-F(a)|<\varepsilon$. ☺

Если функция Φ(x) получена из нескольких функций с помощью конечного числа только арифметических действий и операций функции от функции, то последовательным применением теорем 8.1 и 8.2 можно доказать, что Φ(x) непрерывна. Непосредственно из определения непрерывности функции и теорем о свойствах пределов вытекают следующие две теоремы.

Теорема 8.3. Если функция f(x) непрерывна в точке a, то существует окрестность $\cup(a)$ точки a, на которой f(x) ограничена.

Теорема 8.4. Если функция f(x) непрерывна в точке a, то существует окрестность $\cup(a)$ точки a, на которой $|f(x)|>\frac{|f(a)|}{2}$. Более того, если f(a) > 0, то

$$\frac{f(a)}{2}<f(x)\quad(x\in\cup(a)).$$

Если же f(a) < 0, то

$$\frac{f(a)}{2}>f(x)\quad(x\in\cup(a)).$$

Примерами функций, непрерывных для всех действительных x, являются f(x) = const, $f(x)=x^n$, f(x) = sin x, $f(x)=|x|$.

Если функция f(x) не является непрерывной в точке x = a, и в то же время существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, то говорят, что f(x) имеет устранимый разрыв в точке a. То есть, если f(x) не определена в a, то ее можно доопределить, положив $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$, после чего f(x) станет непрерывной в точке a.

Например, функция $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ имеет разрыв в точке x = 2 и не определена в ней. Однако ее можно доопределить в этой точке, положив f(2) = 4. В этом случае функция будет непрерывной в точке x = 2.

Если функция f непрерывна для всех x в достаточно малой окрестности точки a, за исключением x = a, и неограничена в этой окрестности, то говорят, что она имеет ***бесконечный разрыв*** *в точке a.*

Конечное число A называют ***правым пределом функции f в точке a*** *(конечной или бесконечной), если f определена в некоторой правой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такую правую окрестность точки a, что для всех принадлежащих ей* $x \neq a$ *выполняется неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично дается определение ***левого предела.***

Если a - конечное число, то правый и левый пределы функции f(x) в точке a обозначают, соответственно:

$$f(a+0) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A; \quad f(a-0) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = A.$$

Пределы функции f(x) при $x \to \infty$ обозначают:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty) = A; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty) = A; \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = f(\infty) = A.$$

Например: для функции $f(x) = 1 + e^x$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$; для функции $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$.

Теорема 8.5. Для того чтобы функция f имела предел в конечной точке a, необходимо и достаточно, чтобы ее правый и левый пределы в этой точке существовали и были равны между собой. В этом случае: $f(a+0) = f(a-0) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Доказательство следует из определений предела функции, а также ее правого и левого пределов.

Теорема 8.6. Пусть функция f не убывает на интервале (a, b), где, в частности, может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$. **Если она ограничена сверху числом M, то существует конечный предел** $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \leq M$. **Если же функция f не ограничена сверху, то** $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.

Доказательство. Из ограниченности функции f следует существование точной верхней грани множества ее значений: $\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) = A \leq M$. Таким образом, $f(x) \leq A$ для всех $x \in (a,b)$, и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in (a,b)$ та-

кое, что $A-\varepsilon<f(x_1)<A$. В силу того, что функция f не убывает, для всех x, удовлетворяющих неравенству $x_1 \le x < b$, справедливо утверждение: $f(x_1)\le f(x)$. Поэтому для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $x_1 < b$, что $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x < b$. Это и означает, что $A=\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$.

Если функция f не ограничена сверху, то для любого числа M существует $x_1 \in (a,b)$ такое, что $M < f(x_1)$, и вследствие того, что функция f не убывает на (a,b), $M<f(x_1)\le f(x)$ для всех $x\in(x_1,b)$. Это и означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)=+\infty$. ☺

Теорема 8.7. Если функция f не убывает на интервале (a,b), где может быть $a=-\infty$, $b=+\infty$, и ограничена снизу числом m, то существует конечный предел функции f в точке a справа $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=A\ge m$. Если же функция f не ограничена снизу, то $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$.

Доказательство аналогично приведенному выше для теоремы 8.6.

Подобные теоремы могут быть доказаны также для невозрастающих на интервале (a,b) функций.

Теорема 8.8. Если функция f не убывает на отрезке [a,b], то в каждой точке $x\in(a,b)$ существуют пределы f(x-0) и f(x+0) и выполняются неравенства $f(x-0)\le f(x)\le f(x+0)$. Существуют также пределы f(a+0) и f(b-0), удовлетворяющие неравенствам: $f(a)\le f(a+0)\le f(b-0)\le f(b)$.

Доказательство вытекает из теорем 8.6, 8.7, если учесть, что функция f не убывает на каждом из отрезков [a,x], [x,b].

Аналогичную теорему можно сформулировать для функции, которая не возрастает на отрезке [a, b].

*Функцию f называют **непрерывной в конечной точке a справа (слева)**, если существует предел f(a+0), и f(a+0) = f(a) (соответственно, если существует предел f(a-0), и f(a-0) = f(a)).*

*Если для функции f в конечной точке a пределы f(a-0) и f(a+0) существуют и являются конечными числами, и при этом функция f имеет разрыв в точке a, то говорят, что она имеет в точке a **разрыв первого рода**.*

*Если функция f определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и имеет в точке a разрыв, не являющийся разрывом первого рода, то говорят, что функция f имеет в точке a **разрыв второго рода**.*

Примерами разрыва второго рода могут служить разрывы функций $f(x)=1/x$ и $f(x)=\sin(1/x)$ в точке $x=0$.

Из данных определений следует, в частности, что о существовании разрыва функции в точке можно говорить лишь тогда, когда функция определена в некоторой окрестности этой точки, за исключением, быть может, ее самой.

Теорема 8.9. Если функция f, заданная на отрезке [a,b], монотонна на нем, то, какова бы ни была точка $x \in [a,b]$, функция f в ней либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода.

Доказательство. Из теоремы 8.8 следует, что для любого $x_0 \in [a,b]$ существуют $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$. Если при этом $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, то в точке x_0 функция имеет разрыв 1-го рода. Если же $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, то в силу монотонности функции $f(x_0+0) = f(x_0) = f(x_0-0)$. В самом деле, для неубывающей функции невозможно $f(x_0+0) < f(x_0)$ и $f(x_0) < f(x_0-0)$. Для невозрастающей функции невозможно $f(x_0+0) > f(x_0)$ и $f(x_0) > f(x_0-0)$. ☺

9. Непрерывность функции на отрезке

Функция f называется ***непрерывной на отрезке*** *[a,b] (на множестве точек x, удовлетворяющих неравенствам* $a \le x \le b$*, где a и b - конечные числа), если она непрерывна во всех точках интервала (a,b) (множества точек x, удовлетворяющих неравенствам* $a < x < b$*), непрерывна справа в точке a и слева в точке b.*

Теорема 9.1. Если все значения x_n последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к числу d, принадлежат отрезку [a,b], то и $d \in [a,b]$.

Доказательство. Согласно определению предела последовательности, для всех $n > N$ справедливо неравенство: $d - \varepsilon < x_n < d + \varepsilon$. Предположим, что $d < a$. Тогда, выбрав $\varepsilon = a - d$, получим, что для всех n, начиная с некоторого номера N, будет выполняться неравенство: $2d - a < x_n < a$. Это противоречит условию теоремы, что все $x_n \in [a,b]$. Следовательно, $d \ge a$.

Предположим теперь, что $d > b$. Тогда, выбрав $\varepsilon = d - b$, получим, что для всех n, начиная с некоторого номера N, справедливо неравенство: $b < x_n < 2d - b$. Это также противоречит условию теоремы, что все $x_n \in [a,b]$. Следовательно, $d \le b$. ☺

Теорема 9.2 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке [a,b], то она ограничена на нем.

Доказательство. Функция f непрерывна в каждой точке интервала (a,b). Следовательно, она ограничена в некоторой окрестности каждой точки этого интервала. Она непрерывна и ограничена также в некоторой правой окрестности точки a и некоторой левой окрестности точки b. Следовательно, она ограничена на всем отрезке [a,b]. ☺

Если функция f непрерывна на интервале (a,b) или на полуинтервалах [a,b), (a,b], то она не обязательно будет на них ограничена. Например, функция tg x непрерывна на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, но не ограничена на нем. Отличие от предыдущего случая заключается в том, что мы не можем теперь считать функцию f непрерывной справа в точке a и непрерывной слева в точке b. Поэтому мы не можем судить о ее ограниченности в правой окрестности точки a и левой окрестности точки b. Эту функцию можно доопределить, приняв:

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{tg} x, & -\pi/2 < x < \pi/2; \\ f(x) = 0, & x = \pm \pi/2. \end{cases}$$

Такая функция будет конечной в каждой точке отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$. Однако она не будет на этом отрезке ограниченной.

Теорема 9.3 (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке [a,b] функция f достигает в некоторых точках этого отрезка своих максимума и минимума. То есть, существуют такие точки $\alpha,\beta \in [a,b]$, для которых имеет место:

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha), \quad \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Таким образом, $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$ **для всех** $x \in [a,b]$.

Доказательство. Согласно теореме 9.2, непрерывная на отрезке [a,b] функция f(x) ограничена на нем. Следовательно, существуют точные верхняя и нижняя грани множества значений функции f для $x \in [a,b]$, которые и являются максимальным и минимальным значениями f в рассматриваемом интервале. ☺

Для функции, которая непрерывна на интервале или полуинтервале, такое свойство может отсутствовать. Например, функция $f(x) = x^2$ непрерывна и ограничена на интервале (0,1). Точные нижняя и верхняя грани множества значений функции f(x) на этом интервале существуют и равны, соответственно, 0 и 1. Однако нет таких значений $x_1, x_2 \in (0,1)$, для которых $f(x_1) = 0$ или $f(x_2) = 1$.

Теорема 9.4 (первая теорема Больцано-Коши). Если функция f непрерывна на отрезке [a,b] и числа f(a) и f(b) не равны нулю и имеют противоположные знаки, то на интервале (a,b) имеется по крайней мере одна точка с такая, что f(c) = 0.

Доказательство. Обозначим отрезок $[a,b] = \Delta_0$. Разделим Δ_0 пополам. Если в центре отрезка Δ_0 значение f(x) = 0, то теорема доказана. Если нет, то одна из половин отрезка Δ_0 такова, что на ее концах значения функции имеют противоположные знаки. Обозначим эту половину через Δ_1 и разделим ее пополам. Теперь, если в центре отрезка Δ_1 значение функции f(x) = 0, то теорема доказана. Если же нет, то одна из половин отрезка Δ_1 такова, что на ее концах значения функции имеют противоположные знаки. Обозначим эту половину через Δ_2 и опять разделим ее пополам. Продолжая действовать таким образом, мы либо получим в некоторой точке f(x) = 0, либо построим последовательность вложенных отрезков. Для этих отрезков существует единственная общая точка c. Поскольку значения функции f на концах каждого из отрезков противоположны, то значение f(c) = 0. В противном случае нашлась бы окрестность $\cup(c)$ такая, что для всех $x \in \cup(c)$ было бы f(x) < 0 или f(x) > 0. ☺

Следствие (вторая теорема Больцано-Коши). Если функция f непрерывна на отрезке [a, b], f(a) = A, f(b) = B (A ≠ B) и C - произвольное число, находящееся между числами A и B, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка c, для которой f(c) = C.

Это следствие можно сформулировать иначе.

Непрерывная на отрезке [a,b] функция f, для которой f(a) ≠ f(b), принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка [a, b].

Доказательство. Введем новую функцию F(x) = f(x) - C. В силу непрерывности f функция F также будет непрерывной на отрезке [a, b]. При этом значения F на концах отрезка [a, b], очевидно, имеют противоположные знаки. Тогда, согласно теореме 9.4, внутри интервала (a, b) должна найтись точка c, для которой F(c) = 0, или f(c) = F(c) + C = C. ☺

Данное следствие не означает, однако, того, что функция f на интервале (a, b) не может принимать значений, которые не лежат между f(a) и f(b) (рис. 9.1.а).

Если f(a) = f(b) = A, то непрерывная функция f на интервале (a, b) может не принимать на нем значения f(c) = A (рис. 9.1.б).

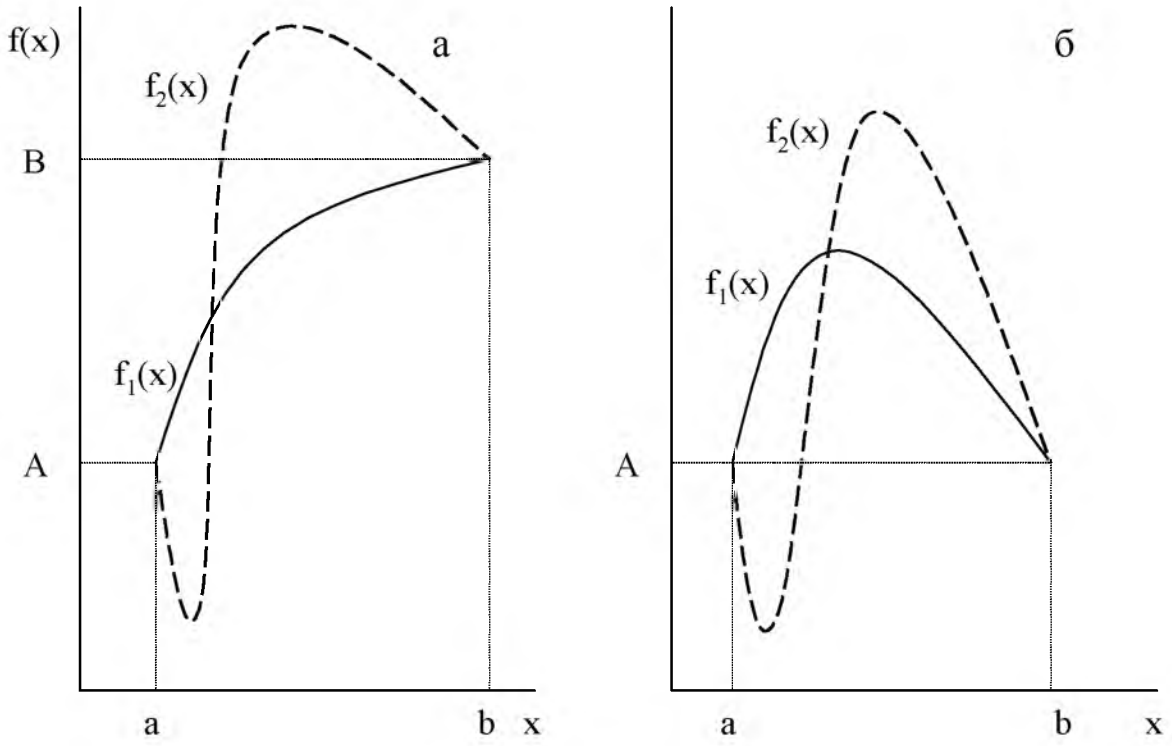


Рис. 9.1

Если функция f(x) определена на некотором промежутке Ω (открытом или закрытом), и для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что для любых* $x, x_0 \in \Omega$, *удовлетворяющих неравенству* $|x - x_0| < \delta$, *справедливо* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *то функцию f(x) называют* ***равномерно непрерывной*** *в промежутке* Ω.

Непрерывность функции во всех точках некоторого промежутка не ведет обязательно к равномерной непрерывности функции на этом промежутке. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна во всех точках интервала $(0, +\infty)$, но не является на нем равномерно непрерывной.

Теорема 9.5 (Кантора). Если функция f(x) определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на нем.

Доказательство. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 9.3, в некоторых точках интервала $[a,b]$ функция f(x) принимает свои минимальное и максимальное на этом интервале значения. Пусть

$$f(x_1) = \min\{f(x) \;\; x \in [a,b]\},\; f(x_2) = \max\{f(x) \;\; x \in [a,b]\}.$$

Тогда, если $\varepsilon_0 = f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$, то для всех $x \in [a,b]$, $x_0 \in (a,b)$ будет выполняться неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. То есть условие равномерной сходимости будет выполнено для $\delta = b - a$.

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon_0 = f(x_2) - f(x_1) > \varepsilon$. Функция может достигать максимального и минимального значений в нескольких изолированных точках отрезка $[a,b]$ либо на некоторых открытых или закрытых промежутках, принадлежащих $[a,b]$. При этом количество собственных экстремумов для рассматриваемой функции конечно. В противном случае, на основании теоремы 5.13, бесконечное ограниченное множество точек максимума должно было бы иметь предельную точку x^*, т.е. точку, в любой сколь угодно малой окрестности которой имеется бесконечно много других собственных максимумов (минимумов). В таком случае функция должна иметь в этой точке разрыв. В самом деле, если бы функция была непрерывна в точке x*, то она либо являлась бы точкой собственного максимума (минимума), либо была бы точкой, в которой функция возрастает либо убывает.

Предположим, что предельная точка связана с бесконечным числом собственных максимумов функции f(x). Тогда x^* не может быть точкой собственного максимума, поскольку в любой сколь угодно малой ее окрестности находится бесконечно много других точек, в которых функция имеет то же значение. Она не может быть точкой собственного минимума. В противном случае существовала бы окрестность $\cup(x^*)$ такая, что для всех $x \in \cup(x^*)$ было бы справедливо $f(x) - f(x^*) < \chi = f(x_2) - f(x^*)$. Но такая окрестность не существует, поскольку в любой окрестности точки x^* функция бесконечно много раз принимает значение $f(x_2)$. Функция не может также возрастать или убывать в точке x^*, потому что в любой ее сколь угодно малой левой окрестности и любой сколь угодно малой правой окрестности есть точки собственного максимума. Таким образом, рассматриваемая функция не может быть непрерывна в точке x^*.

Введем обозначение: $\delta^* = \delta$, если на отрезке $[a,b]$ имеется только по одной точке, где функция достигает своего максимального и минимального значений. Если же эти значения достигаются в нескольких точках или на некоторых промежутках, то в качестве δ^* выберем расстояние между ближайшими со-

седними точками, где достигаются максимальное и минимальное значения функции.

Разобьем $[a,b]$ на n_1 отрезков равной длины $\delta_1 < \delta^*/2$ и обозначим их через $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \ldots, \Delta_{1n_1}$. На каждом из этих отрезков функция также принимает некоторые минимальное и максимальное значения. Обозначим: $\varepsilon_{1i} = f(x_{1i\,max}) - f(x_{1i\,min})$ - разность между максимальным и минимальным значениями функции на i-ом отрезке; $\alpha_{1i} = \left|f(x_{1\,i+1\,max}) - f(x_{1\,i\,min})\right|$ - модуль разности между максимальным на i+1 и минимальным на i-ом отрезках значениями функции; $\beta_{1i} = \left|f(x_{1\,i+1\,min}) - f(x_{1\,i\,max})\right|$ - модуль разности между минимальным на i+1 и максимальным на i-ом отрезках значениями функции, и выберем $\varepsilon_1 = \max\{\varepsilon_{1i}, \alpha_{1i}, \beta_{1i}\}$. При таком выборе $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, поскольку ближайшие соседние точки, в которых функция принимает максимальное и минимальное на отрезке $[a,b]$ значения, не могут попасть в один и тот же или в соседние отрезки Δ_{1i}. Если $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то для любых $x, x_0 \in [a,b]$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta_1$, будет справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В противном случае выберем в качестве δ_1^* расстояние между ближайшими соседними точками x_{1min}, x_{1max}, для которых $\left|f(x_{1max}) - f(x_{1min})\right| = \varepsilon_1$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на $n_2 > n_1$ равных отрезков Δ_{2i} длиной $\delta_2 < \delta_1^*/2$ и, в соответствии с описанной выше процедурой, найдем значение $\varepsilon_2 = \max\{\varepsilon_{2i}, \alpha_{2i}, \beta_{2i}\}$. Если $\varepsilon_2 < \varepsilon$, то для любых $x, x_0 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta_2$ будет справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если же $\varepsilon_2 > \varepsilon$, продолжим процедуру деления отрезка $[a,b]$ на части. При этом мы получим монотонно убывающую последовательность $\{\varepsilon_i\}$, которая в силу непрерывности рассматриваемой функции стремится к нулю. Поэтому для некоторого номера i будет выполнено условие $\varepsilon_i < \varepsilon$. Соответственно, для всех $x, x_0 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta_i$, будет справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. ☺

Следствие. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при произвольном разбиении отрезка $[a,b]$ на промежутки с длинами, меньшими δ, в каждом из полученных промежутков разность между максимальным и минимальным на данном промежутке значениями f(x) будет меньше ε.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из доказательства теоремы 9.5.

Зададим какую-либо функцию y = f(x) на произвольном множестве чисел E и обозначим через E_1 = f(E) ее образ. Каждому $y \in E_1$ приведем в соответствие множество всех $x \in E$, для которых f(x) = y. *Таким образом, на множестве E_1*

определена функция $x = \varphi(y)$, *которая в общем случае будет многозначной. Она называется* ***обратной функцией*** *по отношению к f(x).*

Если функция x = φ(y) обратна функции y = f(x), то функции y = f(x) и y = φ(x) называют ***взаимно обратными***. Примерами взаимно обратных функций являются y = cos x и y = arccos x; y = x и y = 1/x и т.д. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой y = x (рис. 9.2).

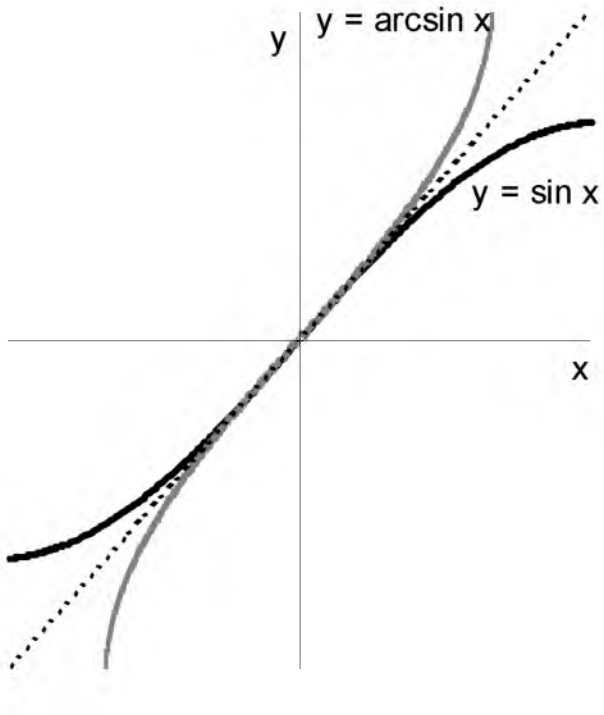


Рис. 9.2

Теорема 9.6. Пусть y = f(x) есть непрерывная строго возрастающая (строго убывающая) на отрезке [a,b] функция и A = f(a), B = f(b). Тогда образом [a,b] является отрезок [A,B] ([B,A]), и обратная к f функция x = φ(y) однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на [A,B] ([B,A]).

Доказательство. Докажем теорему для случая строго возрастающей функции. Пусть $E_1 = f([a,b])$. По условию, $A, B \in E_1$. Поскольку функция f непрерывна на E = [a, b], то, согласно следствию из теоремы 9.4, любая точка отрезка [A, B] принадлежит E_1. Если же точка не принадлежит отрезку [A,B], то в силу строгой монотонности функции f она не может быть образом какой-либо точки $x \in [a,b]$. В самом деле, предположим, что некоторые точки $C, D \in E_1$, и при этом справедливы неравенства: $C = f(c) < A$, $D = f(d) > B$. Если предположить, что точки $c, d \in [a,b]$, то $\frac{C-A}{c-a} < 0$, $\frac{D-B}{d-b} < 0$. Это противоречит условию, что функция f строго возрастает на [a, b]. Таким образом, мы показали, что отрезок [A, B] является образом отрезка [a, b].

Из условия

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$$

следует:

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}=\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}>0.$$

Таким образом, функция $x=\varphi(y)$, обратная f, является строго монотонной. Из монотонности и однозначности f следует однозначность функции φ. В самом деле, если бы φ была не однозначна, то существовали бы $x_1, x_2 \in [a,b]$, такие, что $f(x_1)=f(x_2)$. Это противоречит условию, что f - строго возрастающая функция.

Теперь докажем непрерывность функции $x=\varphi(y)$ в любой точке отрезка [A, B]. Пусть y_0 есть внутренняя точка отрезка [A, B], то есть $y_0 \in (A,B)$. Ей соответствует единственная точка x_0 такая, что $y_0 = f(x_0)$ или $x_0 = \varphi(y_0)$.

Зададим произвольное число $\varepsilon>0$, достаточно малое, чтобы выполнялось условие $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\subset[a,b]$. Обозначим: $y_1=f(x_0-\varepsilon)$, $y_2=f(x_0+\varepsilon)$. Из строгой монотонности φ следует, что для любого $y\in(y_1,y_2)$ соответствующее значение $x=\varphi(y)\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

Таким образом, мы доказали, что для любого достаточно малого положительного числа ε, удовлетворяющего условию $[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\subset[a,b]$, можно подобрать такую окрестность (y_1, y_2) точки y_0, что $|x-x_0|=|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$ для всех $y\in(y_1,y_2)$. Тем самым мы доказали непрерывность функции φ в произвольной точке y_0 интервала (A, B).

Рассмотрим теперь крайние точки отрезка [A, B]. Точке y_0 = A соответствует $x_0=a=\varphi(y_0)$. Положим: $x_1=a+\varepsilon<b$, $y_1=f(x_1)$. Тогда для всех $y\in[y_0,y_1)$, справедливо: $|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$. Таким образом, функция φ непрерывна в точке A справа. Аналогично доказывается ее непрерывность в точке B слева. Поскольку φ непрерывна во всех точках интервала (A, B), непрерывна справа в точке A и непрерывна слева в точке B, то она непрерывна на всем отрезке [A, B]. ☺

Используя тот же подход, можно доказать теорему для случая строго убывающей функции f.

Теорема 9.7. Пусть y = f(x) есть непрерывная строго возрастающая (убывающая) на интервале (a, b) функция, и пусть

$$A = \inf f(x),\ \ B = \sup f(x),\ \ x \in (a,b),$$

где, в частности, может быть a, A = -∞, b, B = +∞.

Тогда образом (a, b) является интервал (A, B) (интервал (B, A)), и обратная к f функция x = φ(y) однозначна, строго возрастает (убывает) и непрерывна на (A, B) (непрерывна на (B, A)).

Доказательство. Докажем теорему для строго возрастающей функции. Поскольку $A = \inf f(x),\ B = \sup f(x)$, число y < A или y > B не может принадлежать образу f(a, b). Можно утверждать также, что $A, B \notin f(a,b)$. В противном случае существовали бы точки $x_1, x_2 \in (a,b)$ такие, что A = f(x_1), B = f(x_2). Так как на интервале (a, b) всегда можно найти точки $x_1' < x_1$ и $x_2' > x_2$, то в силу строгой монотонности f существуют $f(x_1') < A$ и $f(x_2') > B$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, мы доказали, что $f(a,b) \in (A,B)$.

Пусть $y \in (A,B)$. Тогда в силу приведенных выше определений должны найтись такие $x_1, x_2 \in (a,b)$, что

$$y_1 = f(x_1) < y < f(x_2) = y_2.$$

Кроме того, вследствие строгого возрастания f будет справедливо неравенство $x_1 < x_2$. Функция f непрерывна на отрезке $[x_1, x_2] \subset (a,b)$. Поэтому, когда x пробегает [x_1, x_2], она должна пробегать все значения между y_1 и y_2, в том числе и значение y. Отсюда следует, что существует такое значение $x = \varphi(y)$, для которого y = f(x). Причем в силу строгой монотонности функции f это значение единственно. Тем самым мы доказали, что определенная выше функция $x = \varphi(y)$ есть обратная к f функция, а интервал (A, B) является образом интервала (a, b).

Функция φ непрерывна в точке y в силу теоремы 9.6 (она обратна функции f, определенной на отрезке [x_1, x_2], включающем точку x). Очевидно, что функция φ возрастает. Действительно, по условию для $x' < x''$ $(x', x'' \in (a,b))$ справедливо $y' = f(x') < f(x'') = y''$. Но тогда для монотонной функции φ из $y' < y''$ $(y', y'' \in (A,B))$ следует $x' = \varphi(y') < \varphi(y'') = x''$. Таким образом, теорема доказана. ☺

10. Элементарные функции и их свойства

Показательная функция

Зададим положительное число a. Если n - натуральное число, то величина a^n определяется как произведение n сомножителей, каждый из которых равен a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$. Число $a^{1/n}$ определяется как арифметическое значение корня n-й степени из a, то есть такое положительное число b, для которого $b^n = a$.

Пусть p/q (q > 0) есть неотрицательная рациональная дробь. Тогда, по определению, принимают:

$$a^{p/q} = \left(a^p\right)^{1/q} = \left(a^{1/q}\right)^p, \quad a^0 = 1, \quad a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}. \tag{10.1}$$

Этим на множестве рациональных чисел определена функция $y = a^x$ (a > 0). В курсе элементарной математики доказывается, что она обладает свойством:

$$a^{x+y} = a^x a^y. \tag{10.2}$$

Там же доказывается, что если $x < y$, $a > 1$, то $a^x < a^y$.

Функцию a^x можно доопределить для всех иррациональных x так, что она будет непрерывной на всем множестве действительных чисел, и для нее будет справедливо характеристическое свойство (10.2). Доопределенная таким образом функция a^x называется ***показательной***. Ее график показан на рис. 10.1.

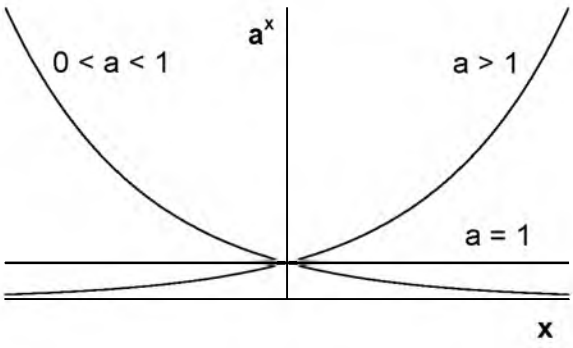


Рис. 10.1

Можно доказать, что единственной (если не считать $f(x) \equiv 0$) функцией, которая определена и непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет на нем свойству (10.2), является показательная функция. Именно поэтому свойство (10.2) называют характеристическим свойством показательной функции.

Показательная функция отображает действительную ось $(-\infty,+\infty)$ на открытую полуось $(0,+\infty)$. Она непрерывна на всем множестве действительных

чисел. При этом: если $a > 1$, то показательная функция строго возрастает, если $0 < a < 1$, то она строго убывает, и если $a = 1$, то $a^x \equiv 1$ (рис. 10.1).

Показательная функция обладает следующими свойствами.

1. Если $x < y$, то $a^x < a^y$ для $a > 1$, $a^x = a^y$ для $a = 1$ и $a^x > a^y$ для $a < 1$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ при $a > 1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ при $0 < a < 1$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ при $a > 1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ при $0 < a < 1$.
4. $a^{xy} = (a^x)^y$.

Логарифмическая функция

Логарифмом числа y при основании a (логарифмической функцией) *называется функция, обратная показательной функции* $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. График логарифмической функции показан на рис. 10.2.

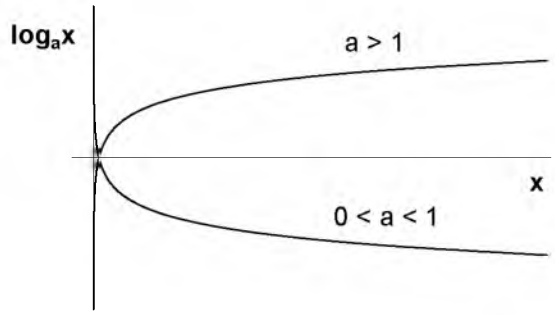


Рис. 10.2

Логарифм обозначается $\log_a y$. Логарифмы числа y при основаниях 10 и e обозначаются, соответственно, $\lg y$ и $\ln y$. Условие $a \neq 1$ связано с тем, что для $a = 1$ и произвольного действительного числа r справедливо тождество $a^r \equiv 1$. Выражение $r = \log_1 x$ не может считаться функцией. В противном случае областью определения такой функции было бы единственное число $x = 1$, а множеством значений - интервал $(-\infty, \infty)$.

Логарифмическая функция отображает открытую полуось $(0,+\infty)$ на действительную ось $(-\infty,+\infty)$. Она непрерывна на всем множестве действительных чисел. При этом: если $a > 1$, то логарифмическая функция строго возрастает, если $0 < a < 1$, то она строго убывает.

Представляя логарифмическую функцию в обычном виде, то есть заменяя y на x и наоборот, можно дать следующие формулировки ее основных свойств.

1. При $a > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \log_a x = -\infty$. (10.3)

При $0 < a < 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = +\infty$. (10.4)

2. $\log_a a^x = x$. (10.5)

3. $a^{\log_a x} = x$. (10.6)

4. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. (10.7)

5. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. (10.8)

6. $\log_a x^y = y \log_a x$. (10.9)

7. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$. (10.10)

Свойство (10.4) является для логарифмической функции характеристическим. Единственная (кроме $f(x) \equiv 0$) функция, которая определена и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$ и обладает на нем свойством (10.4), - это логарифмическая функция.

Степенная функция

Функция x^b, где x - переменная, а b – постоянная, называется ***степенной***. Ее график приведен на рис. 10.3.

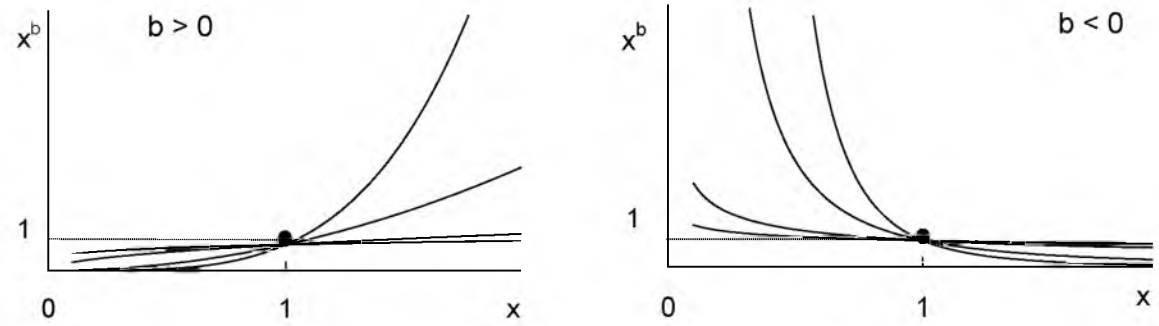


Рис. 10.3

Степенная функция определена на положительной полуоси $(0,+\infty)$ и имеет смысл также как действительная функция при отрицательных x, если b - целое или рациональное p/q, где q - нечетное число.

Функция x^b является непрерывной на всей области своего определения. При $b > 0$ она строго возрастает и обладает следующими свойствами:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty; \tag{10.11}$$

При $b > 0$ естественно принять, что $0^b = 0$. В этом случае функция x^b становится непрерывной справа в точке $x = 0$.

При $b < 0$ функция x^b строго убывает и обладает свойствами:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^b = 0. \qquad (10.12)$$

Для положительных x и y справедливо следующее характеристическое свойство степенной функции: $(xy)^b = x^b y^b$. Степенная функция является единственной (кроме $f(x) \equiv 0$), которая обладает этим свойством, а также определена и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$. Кроме того, при положительных x справедливо равенство $x^b = e^{b\ln x}$.

Функция $\dfrac{\sin x}{x}$

Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ определена для всех действительных $x \neq 0$. Эта функция четна и немонотонна. Однако она может быть представлена в виде бесконечного числа монотонно убывающих и монотонно возрастающих участков. Наибольший интерес представляет поведение функции $\dfrac{\sin x}{x}$ вблизи x = 0. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Для этого рассмотрим окружность единичного радиуса (рис. 10.4).

Длины отрезков AB, AD и дуги AC удовлетворяют неравенству

$$AB < AC < AD. \qquad (10.13)$$

Для его доказательства рассмотрим рисунок 10.5.

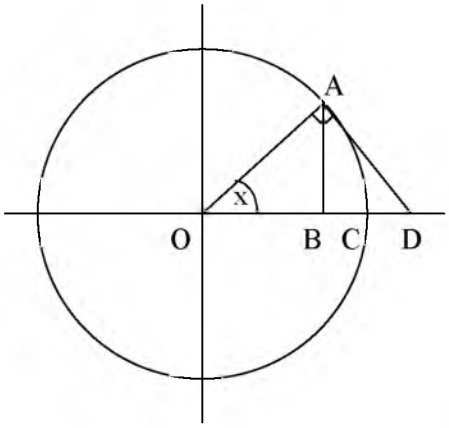


Рис. 10.4

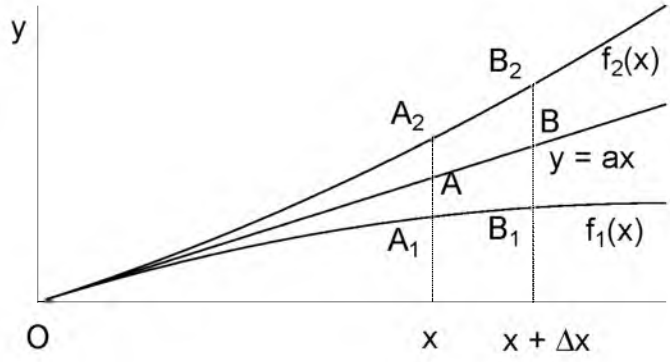


Рис. 10.5

Здесь AB - отрезок прямой, заданной уравнением y = ax. Дуги A_1B_1 и A_2B_2 - отрезки непрерывных кривых, заданных уравнениями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. При

достаточно малых значениях Δx эти дуги практически совпадают с отрезками прямых A_1B_1 и A_2B_2.

Для отрезка AB приращение функции $y = ax$ на произвольном малом отрезке от x до $x + \Delta x$ равно

$$\Delta y = \sqrt{\Delta x^2 + a^2 \Delta x^2} = \Delta x^2 \sqrt{1 + a^2} .$$

Приращение функции $f_1(x)$ на том же участке равно[1]

$$\Delta f_1(x) \approx \sqrt{\Delta x^2 + \alpha^2 \Delta x^2} = \Delta x \sqrt{1 + \alpha^2} ,$$

где α - тангенс угла наклона отрезка A_1B_1. Поскольку для любой точки дуги $y = f_1(x)$ справедливо соотношение $\alpha < a$, то $\Delta f_1(x) < \Delta y$ для любых x и Δx.

Приращение функции $f_2(x)$ на участке от x до $x + \Delta x$ равно

$$\Delta f_2(x) \approx \sqrt{\Delta x^2 + \beta^2 \Delta x^2} = \Delta x \sqrt{1 + \beta^2} ,$$

где β - тангенс угла наклона отрезка A_2B_2. Поскольку для любой точки дуги $y = f_2(x)$ справедливо соотношение $\beta > a$, то $\Delta f_2(x) > \Delta y$ для любых x и Δx.

Из полученных соотношений и вытекает неравенство 10.13. Поскольку радиус окружности был принят равным единице, то:

$$AB = \sin x, \quad AC = x, \quad AD = \operatorname{tg} x .$$

Отсюда:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

При $x \to 0 \quad \cos x \to 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\sin x}{x} \to 1 .$

Функция $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ определена для произвольных действительных $x \neq 0$. Она обладает свойством $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = e$. Для $x \to +\infty$ доказательство можно провести, доказав монотонность f и воспользовавшись полученным нами ра-

[1] Строгое доказательство этого можно получить, используя теорему 12.1 и определение дифференцируемости функции.

нее результатом для предела последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (раздел 4). Для $x \to -\infty$ введем z = -x. Тогда:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to+\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} = \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z}{z-1}\right)^z = \lim_{z\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)\right] = e.$$

Говорят, что на множестве точек E переменная f имеет ***порядок φ****, или, что f есть* ***O большое от φ****, если для любого* $x \in E$ *справедливо неравенство* $|f(x)| \le C|\varphi(x)|$*, где C - некоторая положительная константа, не зависящая от x.*

Это утверждение записывается следующим образом: f(x) = O(φ(x)) на E. Например: $\sin x = O(x)$ для $x \in (-\infty, +\infty)$.

Если на некотором множестве E справедливо f(x) = O(1), это означает, что для любого $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x)| \le C$, где C - некоторая постоянная величина, то есть функция f(x) ограничена на E.

Если на множестве E справедливо $f(x) = O(\varphi(x))$ и $\varphi(x) = O(\psi(x))$, то, очевидно, $f(x) = O(\psi(x))$.

Говорят, что переменная f есть ***O большое от φ*** *при* $x \to a$*, если существует такая окрестность* $\cup(a)$ *конечной или бесконечной точки a, что* $f(x) = O(\varphi(x))$ $(x \in \cup(a),\ x \ne a)$*, то есть существует такая окрестность* $\cup(a)$*, на которой, за исключением, быть может, самой точки a, функции f и φ определены, и отношение* $f(x)/\varphi(x)$ *ограничено.*

Например: $x = O(\sin x)$ $(x \to 0)$.

Говорят, что переменная f есть ***o малое от φ*** *при* $x \to a$*, если* $f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x)$*, где* $\varepsilon(x) \to 0$ *при* $x \to a$. Это записывают следующим образом: $f(x) = o(\varphi(x))$ $(x \to a)$. При этом предполагается, что функции f, φ и ε определены на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Из определения следует, что если f есть o малое от φ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.

Например: $x^n = o(x)$ $(x \to 0)$ и $x = o(x^n)$ $(x \to \infty)$ для любого натурального n > 1; $x^n = o(e^x)$ $(x \to +\infty, n = 1, 2, 3, \ldots)$; $\ln x = o(x)$ $(x \to +\infty)$.

Заметим, что справедливыми будут также утверждения: $x^n = O(x)$ при $x \in (-1, 1)$ и $x = O(x^n)$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Отсюда видно, что если $f(x) = o(\varphi(x))$, то заведомо будет справедливым и утверждение: $f(x) = O(\varphi(x))$. Это легко доказать, основываясь на приведенных выше определениях. Обрат-

ное, вообще говоря, неверно. Например, для функций $f(x) = 2x$ и $\varphi(x) = 2x + 1$ справедливо $f(x) = O(\varphi(x))$, однако утверждение, что $f(x) = o(\varphi(x))$, неверно.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются ***эквивалентными (асимптотически равными)*** *при $x \to a$, если обе они определены и не равны нулю в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$. Это записывается следующим образом: $f_1(x) \approx f_2(x)$.

Теорема 10.1. Для того чтобы две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ были эквивалентными при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) \quad (x \to a), \quad f_2(x) \neq 0 \quad (x \neq a).$$

Доказательство. Если $f_1(x) \approx f_2(x)$, то из определения эквивалентности функций следует:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 + \varepsilon(x) \quad (\varepsilon(x) \to 0,\ x \to a).$$

То есть, $f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)\varphi(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x))$. Таким образом, необходимость доказана.

Пусть теперь $f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x))$. Тогда $f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)\varphi(x)$, где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to a$. В этом случае $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 + \varepsilon(x) = 1$. Таким образом, достаточность тоже доказана. ☺

Теорема 10.2. Пусть в окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, заданы три функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $\Lambda(x)$. Если $f_1(x) \approx f_2(x)$ $(x \to a)$, то $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\Lambda(x)] = \lim\limits_{x\to a}[f_2(x)\Lambda(x)]$. Последнее равенство следует понимать следующим образом: если существует предел, стоящий в левой части равенства, то существует, и притом равный ему, предел, стоящий в правой части, и наоборот. Если же один из этих пределов не существует, то не существует и второй.

Доказательство. Предположим, что предел, стоящий в левой части равенства, существует и $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\Lambda(x)] = C$. Тогда:

$$\lim_{x\to a}[f_2(x)\Lambda(x)] = \lim_{x\to a} f_2(x) \cdot \lim_{x\to a} \Lambda(x) = 1 \cdot \lim_{x\to a} f_1(x)\Lambda(x) = \lim_{x\to a}[f_1(x)\Lambda(x)],$$

что и требовалось доказать. ☺

Если же предел, который стоит в левой части, не существует, то не существует, по крайней мере, один из пределов $\lim\limits_{x\to a}\Lambda(x)$ или $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 1\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$. Соответственно, не существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\left[f_2(x)\Lambda(x)\right]$.

Примеры эквивалентных функций:

1) $\sin x \approx x \quad (x\to 0)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;

2) $x \approx \operatorname{tg} x \quad (x\to 0)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}\right] = 1$;

3) $e^h - 1 \approx h \quad (h\to 0)$ вследствие того, что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\ln(1+z)} =$

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+z)^{1/z}} = \dfrac{1}{\ln e} = 1$, здесь использовано обозначение $z = e^h - 1$;

4) $\ln(1+u)\approx u \quad (u\to 0)$, потому что $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = \lim\limits_{u\to\infty}\ln(1+u)^{1/u} = \ln e$

$= 1$;

5) $\sqrt[n]{1+u} - 1 \approx \dfrac{u}{n} \quad (u\to 0)$ вследствие того, что $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1+u}-1}{u/n} =$

$= \lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{u}{u\left[(1+u)^{(n-1)/n} + (1+u)^{(n-2)/n} + \ldots + 1\right]/n} = 1$;

6) $1-\cos x \approx \dfrac{x^2}{2} \quad (x\to 0)$, потому что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2/2}{x^2} = 1/2.$

Если для функции φ(x) можно подобрать числа α и m такие, что $\varphi(x)\approx\alpha x^m$, $x\to 0$, $\alpha\neq 0$, *то говорят, что функция* αx^m *есть* ***главный степенной член функции*** *φ(x).*

Правые части асимптотических формул 1 - 6 представляют собой главные степенные члены левых частей соответствующих равенств. В общем случае для нахождения главных степенных частей используют формулу Тейлора (14.4).

<u>Теорема 10.3.</u> Если αx^m, βx^n ($\alpha, \beta \neq 0$) есть главные степенные члены функций φ и ψ, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^m}{\beta x^n} = \begin{cases} \alpha/\beta & (m = n), \\ 0 & (m > n), \\ \infty & (m < n). \end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. На основании определения эквивалентности функций и свойств пределов можем записать

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)}{\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\alpha x^m}{\lim\limits_{x\to 0}\beta x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^m}{\beta x^n} = \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0} x^{m-n}.$$

При $m = n$ $\dfrac{\alpha}{\beta}\lim\limits_{x\to 0} x^{m-n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. При $m > n$ $\dfrac{\alpha}{\beta}\lim\limits_{x\to 0} x^{m-n} = \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot 0 = 0$. При $m < n$ $\dfrac{\alpha}{\beta}\lim\limits_{x\to 0} x^{m-n} = \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{1}{0} = \infty$. ☺

11. Производная функции

Понятие производной возникло как результат решения задач о построении касательных к кривым и определении скоростей движения тел при неравномерном движении.

Рассмотрим задачу о нахождении скорости движения тела при неравномерном движении. Из школьного курса физики известно, что при описании неравномерного движения вводят понятие средней скорости:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{s}$ - перемещение тела за время Δt, $\vec{r}$ - его радиус-вектор. Мгновенную, или истинную скорость тела определяют как предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}.$$

Из курса физики известны и другие задачи, приводящие к нахождению аналогичных пределов. Например: сила, действующая на тело, $\vec{F} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{p}$ - изменение импульса тела за время Δt; мощность силы $W = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$, где ΔA - работа, совершаемая силой за время Δt; сила тока $I = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$, где Δq - заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время Δt.

Рассмотрим теперь задачу о построении касательной к кривой. Пусть кривая Γ (рис. 11.1) есть график непрерывной функции f(x). Зададим на ней точки A и S с абсциссами x и $x + \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$. Секущая AC образует с положительным направлением оси Ox угол β, тангенс которого равен: $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{BC}{AB}$.

Устремим Δx к нулю. В силу непрерывности функции f(x) величина $\Delta f(x) \to 0$. При этом точка C, двигаясь по кривой Γ, будет стремиться к точке A. Если окажется, что при любом способе стремления Δx к нулю отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to k = \text{const}$, то угол β будет стремиться к некоторому углу $\alpha \neq \pi/2$, а секущая AC будет стремиться занять в пределе положение прямой AT, которая является касательной к кривой Γ в точке A.

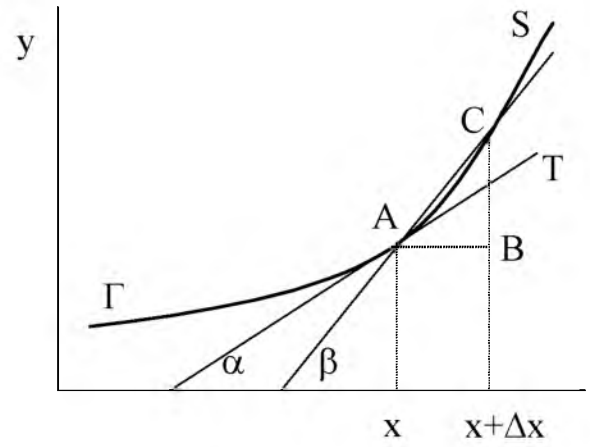


Рис. 11.1

Тангенс угла, который прямая AT составляет с положительным направлением оси Ox,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Все рассмотренные задачи привели к одной и той же математической операции - нахождению предела отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Эта операция называется ***дифференцированием функции***.

Производной функции f(x) в точке x *называют предел, к которому стремится отношение ее приращения Δf(x) в этой точке к соответствующему приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю:*

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \dot{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции от переменной x также является функцией от переменной x. Поэтому она тоже может иметь производную.

Если производная функции f'(x) существует, то ее называют ***второй производной функции*** *f(x) и обозначают*

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \ddot{f}(x).$$

Аналогично определяются производные высших порядков $f^{(n)}(x)$, где n - натуральное число, обозначающее порядок производной. Производные высших порядков широко используются в физике и других приложениях математики. Например, ускорение тела есть производная скорости движения тела, то есть вторая производная перемещения тела:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}.$$

Электродвижущая сила индукции в цепях переменного тока:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2},$$

где Ф - магнитный поток, L - индуктивность контура.

Теорема 11.1. Если функция f(x) имеет производную в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из существования конечного предела $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ следует, что $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0.$$

Это равенство и означает, что функция f(x) в точке x непрерывна. ☺

Утверждение, обратное теореме 11.1, в общем случае будет неверным. Возможно, что функция f(x) непрерывна в некоторой точке x, но не имеет в этой точке производной. Примером может служить функция $f(x) = |x|$, которая непрерывна в точке x = 0, однако производной в ней не имеет.

Говорят, что функция f(x) имеет в точке x ***бесконечную производную*** *(+∞ или -∞), если в этой точке* $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = +\infty$ *или, соответственно,* $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\infty$.

Правой производной функции f(x) в точке x *называют величину* $f'_+(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Левой производной функции f(x) в точке x *называют величину* $f'_-(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Теорема 11.2. Для того чтобы существовала производная функции f(x) в точке x необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и были равны между собой.

Доказательство теоремы студентам предлагается выполнить самостоятельно.

Функция, изображенная на рис. 11.2.а, имеет производную в точке x_0. Функция, изображенная на рис. 11.2.б, не имеет производной в точке x_0, но имеет в этой точке левую $f'_-(x_0)$ и правую $f'_+(x_0)$ производные, причем $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. Функции, изображенные на рис. 11.2.в и 11.2.г, имеют в точке x_0 бесконечные производные: соответственно, $f'(x_0) = +\infty$ и $f'(x_0) = -\infty$. Функции, изображенные на рис. 11.2.д и 11.2.е, не имеют производной в точке x_0, но имеют в ней бесконечные левую и правую производные: для первой из них $f'_-(x_0) = +\infty$ и $f'_+(x_0) = -\infty$, а для второй - наоборот, $f'_-(x_0) = -\infty$ и $f'_+(x_0) = +\infty$.

Известны функции, непрерывные на отрезке [a, b], но не имеющие производной ни в одной точке этого отрезка (функция Вейерштрасса). Графики таких функций нарисовать невозможно, но они могут быть заданы с помощью формул.

Другим интересным примером является функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ для рациональных } x, \\ x^2 \text{ для иррациональных } x. \end{cases}$$

Она разрывна при всех $x \neq 0$, но в точке $x = 0$ имеет производную $f'(0) = 0$.

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на интервале $(-\infty, +\infty)$, для всех $x \neq 0$ она имеет производную, но в точке $x = 0$ не имеет не только производной, но также левой и правой производных.

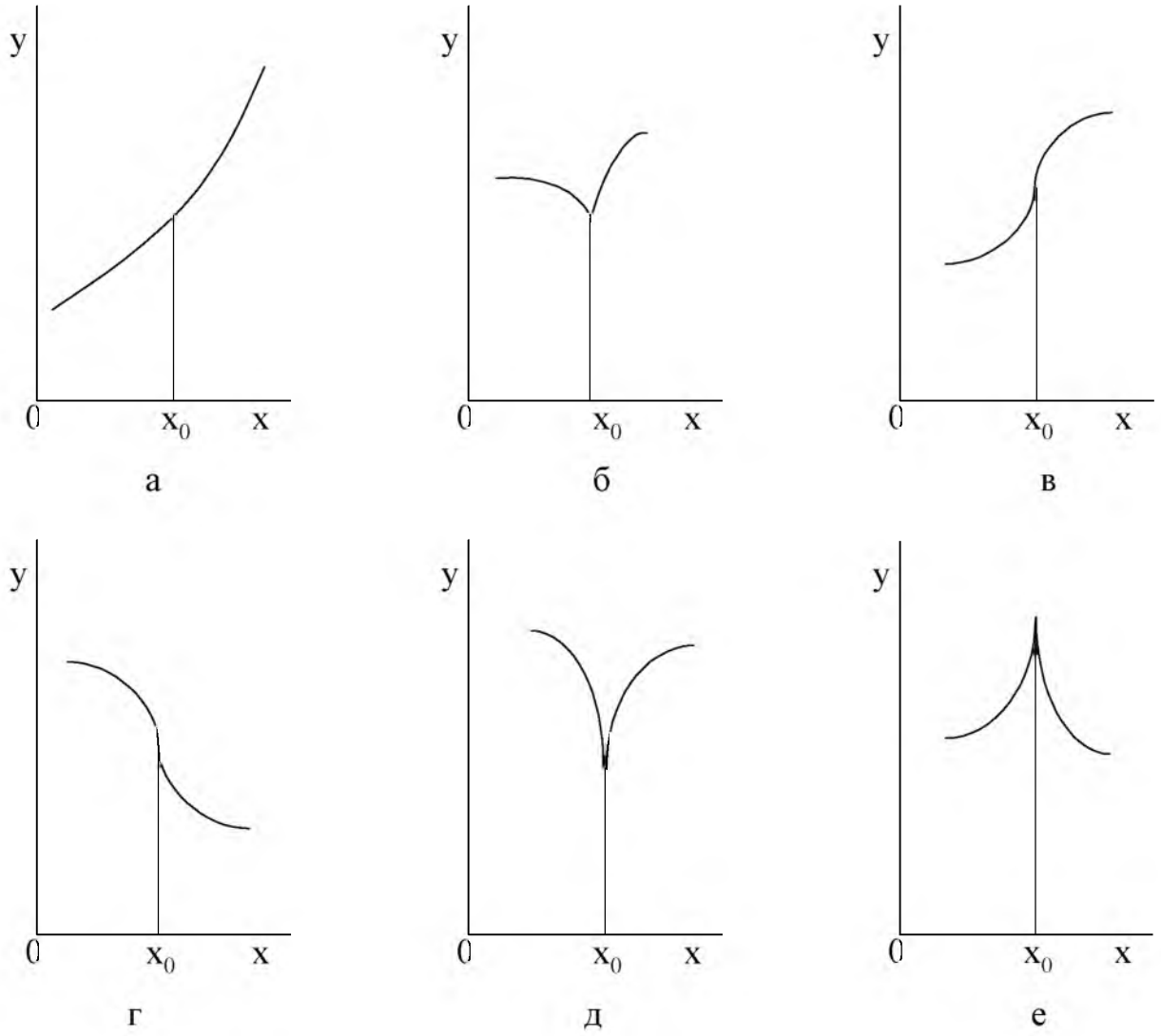


Рис. 11.2

Теорема 11.3. Если функции u(x) и v(x) имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное (при дополнительном условии $v(x) \neq 0$) имеют в точке x производные и справедливы равенства:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$
$$(uv)' = u'v + v'u; \qquad (11.1)$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Доказательство. Первые два равенства непосредственно следуют из определения производной и аналогичных теорем для пределов функций.

Рассмотрим третье равенство:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{\Delta x} = \frac{1}{v^2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{uv+\Delta uv - uv - u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta uv - u\Delta v}{\Delta x} = \frac{1}{v^2}\left(\lim_{\Delta x\to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

☺

Производная постоянной величины C, очевидно, тождественно равна нулю во всей области определения функции C: $C' \equiv 0$. Это следует из того, что для постоянной функции $\Delta f(x) = C - C = 0$.

Производная функции C·f(x), где C – некоторое постоянное число, равна $(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$. Это следует из теоремы 11.3. В частности, $(3x)' = 3\cdot 1 = 3$.

Из теоремы 11.3 легко получить также: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

Производная степенной функции $f(x) = x^n$:

$$\left(x^n\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \ldots + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

При выводе последнего выражения мы воспользовались разложением бинома Ньютона, полученным нами ранее для натуральных n. Однако можно показать, что полученный результат справедлив для любых действительных n.

Производная функции $f(x) = \sin x$:

$$\sin' x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x .$$

Аналогично можно показать, что $\cos' x = -\sin x$.

Приведем без вывода еще несколько часто используемых формул для нахождения производных:

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x ; \qquad \operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x ;$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1); \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a ; \qquad \left(e^x\right)' = e^x ; \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} ;$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x ; \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x ; \qquad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} ; \qquad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} .$$

Функция x^m, где m - натуральное число, имеет на всей действительной оси производные любого порядка. При этом:

$$\left(x^m\right)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{(m-n)} \qquad \text{для } n \le m, \qquad (11.2)$$

и

$$\left(x^m\right)^{(n)} = 0 \qquad \text{для } n > m. \qquad (11.3)$$

Степенная функция x^a, где a - произвольное действительное число, для всех положительных x имеет производную любого порядка n, определяемую выражением

$$\left(x^{(a)}\right)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}. \qquad (11.4)$$

Показательная функция a^x имеет для всех действительных x производную порядка n, которая может быть найдена по формуле $\left(a^x\right)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$. Для экспоненты e^x $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

Функции sin x и cos x имеют производные любого порядка n, которые определяются следующими выражениями:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\ \ (n = 1, 2, \ldots). \qquad (11.5)$$

Теорема 11.4. Производная от четной функции есть функция нечетная и, наоборот, производная от нечетной функции есть функция четная.

Доказательство. Пусть функция f(x) четная. Тогда:

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = -f'(x).$$

Если же функция f(x) нечетная, то:

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x).$$

12. Дифференциал функции. Производные сложной и обратной функции

Функцию f(x) называют ***дифференцируемой*** *в точке x, если ее приращение в этой точке можно записать в виде*

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0), \qquad (12.1)$$

где A - некоторая константа, не зависящая от Δx.

Теорема 12.1. Для того чтобы функция f(x) имела производную в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в этой точке.

Доказательство. Докажем вначале необходимость выполнения условия 12.1. Если функция f(x) имеет в точке x производную, то существует предел $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A$. Отсюда следует, что $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$ или $\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$. Таким образом, необходимость условия 12.1 доказана.

Теперь докажем его достаточность. Пусть для функции f(x) в точке x выполняется условие 12.1. Тогда $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. Перейдем к пределу:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Следовательно, производная функции f в точке x существует и равна A. Таким образом, достаточность условия 12.1 также доказана. ☺

Равенство 12.1 показывает, что если $A = f'(x) \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ приращение функции эквивалентно первому слагаемому правой части 12.1 ($\Delta y \approx A\,\Delta x$). Поэтому для $A \neq 0$ это слагаемое называют ***главным линейным членом приращения функции,*** или ***дифференциалом функции f(x) в точке x***. Таким образом, дифференциалом функции f(x) в точке x является величина $dy = df = f'(x)\Delta x$. В целях симметрии записи величину приращения функции чаще обозначают dx. В этом случае дифференциал функции обозначают $dy = df = f'(x)dx$. Отсюда следует, что производная функции f в точке x равна $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, то есть она равна отношению дифференциала функции f в точке x к соответствующему дифференциалу независимой переменной x. При этом дифференциал независимой переменной равен ее произвольно заданному

приращению Δx и не зависит от x. Дифференциал же функции в точке x зависит от x и от Δx.

Рассмотрим рис. 12.1.

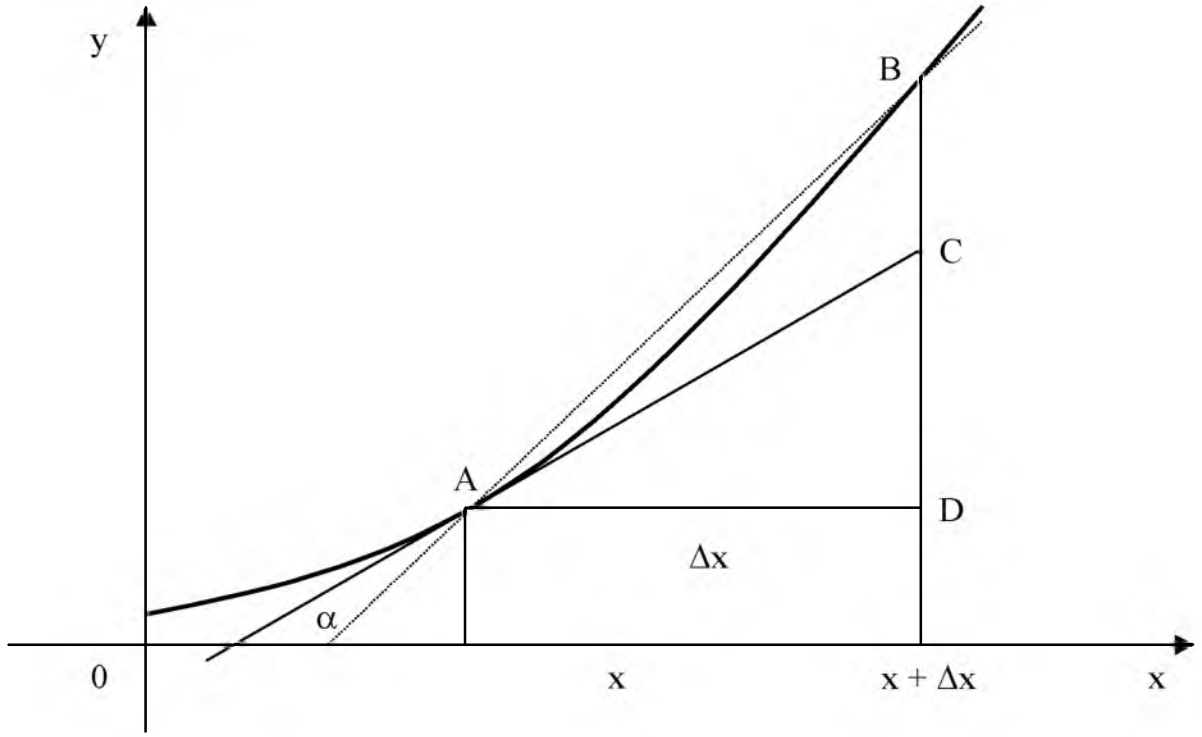


Рис. 12.1

A и B - точки графика функции f, соответствующие значениям аргумента x и x + Δx. Их ординаты равны f(x) и f(x + Δx), соответственно. Приращение функции f(x + Δx) - f(x) равно длине отрезка BD = CD + BC. При этом длина отрезка CD равна абсолютной величине дифференциала функции f в точке x: $|CD| = |AD \cdot \operatorname{tg}\alpha| = |f'(x) \cdot \Delta x|$. Как видно из рисунка, величина второго члена приращения (длина отрезка BC) при больших Δx может даже превосходить главный член. Однако при $\Delta x \to 0$ она является бесконечно малой более высокого порядка, чем дифференциал. При $f'(x) \neq 0$ для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $\dfrac{|BC|}{|CD|} < \varepsilon$.

Дифференциалом 2-го порядка функции f(x) в точке x, соответствующим приращению (дифференциалу) независимой переменной $dx = \Delta x$, является величина

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y''dx)dx = y''dx^2. \qquad (12.2)$$

Аналогично, дифференциалом n-го порядка функции f(x) в точке x, соответствующим приращению (дифференциалу) независимой переменной $dx = \Delta x$, является величина

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (12.3)$$

Из 12.3 следует, что производная n-го порядка функции f(x) в точке x есть отношение

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \qquad (12.4)$$

где в числителе стоит n-й дифференциал f в точке x, соответствующий тому значению dx, которое стоит в знаменателе.

Теорема 12.2. Пусть задана сложная функция z = F(x) = f(φ(x)), где y = φ(x), z = f(y). При этом функция φ имеет производную в точке x, а функция f(y) имеет производную в точке y = φ(x). Тогда существует производная функции F(x) в точке x, равная F'(x) = f'(y)·φ'(x).

Доказательство. Поскольку функция φ(x) имеет производную в точке x, то она дифференцируема в этой точке, и для достаточно малых Δx можно записать:

$$\Delta y = \varphi'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x \quad (\varepsilon(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0).$$

Аналогично, в силу того, что функция f(y) имеет производную в точке y, для достаточно малых Δy справедливо:

$$\Delta z = f'(y)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta y)\Delta y \quad (\varepsilon_1(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0).$$

При достаточно малых Δx и, следовательно, Δy

$$\Delta z = f'(y)\varphi'(x)\Delta x + f'(y)\varepsilon(\Delta x)\Delta x + \Delta y\varepsilon_1(\Delta y) \quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(x),\ \Delta x \to 0\right).$$

Разделим обе части полученного равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Тогда:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(x) = f'(y)\varphi'(x) + \lim_{\Delta x \to 0} f'(y)\varepsilon(\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\varepsilon_1(\Delta y) = f'(x)\varphi'(x),$$

что и требовалось доказать. ☺

Если $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, $x = \psi(\xi)$ и все три функции имеют производные в соответствующих точках, то $z'(\xi) = z'(y)y'(x)x'(\xi)$.

Пусть, например, $z = e^{\sin 3x^2}$.

Введем вспомогательные функции: $w = 3x^2$; $v = \sin w$; $z = e^v$. Тогда:

$$\frac{dz}{dx} = 6x \cdot \cos w \cdot e^v = 6x \cos\left(3x^2\right) e^{\sin 3x^2}.$$

Формула Лейбница. Пусть функция f представима в виде $f = uv$, где u и v - функции, имеющие в некоторой точке производные порядка n. Тогда функция f также имеет в этой точке производную порядка n, определяемую формулой Лейбница:

$$f^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}v = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \qquad (12.5)$$

где C_n^k - биномиальные коэффициенты.

Найдем теперь дифференциал для случая, когда переменная y является сложной функцией, то есть $y = \varphi(u)$; $u = \psi(x)$. В этом случае:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = \frac{dy}{du}du \qquad (12.6)$$

при условии, что дифференциал du, который стоит в третьем члене, соответствует тому дифференциалу dx, который стоит во втором. Таким образом, форма записи первого дифференциала инвариантна относительно переменной. Для дифференциалов более высоких порядков такой инвариантности нет.

Теорема 12.3. Если $y = f(x)$ есть строго монотонная непрерывная функция и $x = \varphi(y)$ - обратная к ней функция, имеющая в точке y производную $\varphi'(y) \neq 0$, то функция f имеет в соответствующей точке производную $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная строго возрастающая или строго убывающая на интервале (a, b) функция, $x = \varphi(y)$ - обратная к ней функция, интервал (A, B) - есть образ (a, b). В соответствии с теоремой 9.5, функция $x = \varphi(y)$ будет однозначной, строго монотонной и непрерывной на (A, B). Зафиксируем $x \in (a,b)$ и дадим ему приращение Δx такое, что $x + \Delta x \in (a,b)$. Тогда функция f получит приращение Δy такое, что $y, y + \Delta y \in (A,B)$. Поскольку прямая и обратная функции непрерывны, из

$\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$ и наоборот. Пусть функция φ имеет в точке x производную $\varphi'(y) \neq 0$. Найдем, чему будет равна производная функции y = f(x):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x / \Delta y};$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x / \Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x / \Delta y)} = \frac{1}{\varphi'(y)} \ . \ \text{☺}$$

Пусть, например, на интервале (-1, 1) задана функция $y = f(x) = \arcsin x$. Тогда обратная ей функция $x = \varphi(y) = \sin y$. Согласно теореме 12.3, производная

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ . \qquad (12.7)$$

Если в точке y производная $\varphi'(y) = 0$, то в соответствующей точке x производная $f'(x) = +\infty$ для строго возрастающей функции f(x), и $f'(x) = -\infty$ для строго убывающей функции f(x). Если в точке y $\varphi'(y) = \infty$, то в соответствующей точке x производная $f'(x) = 0$.

Найдем производную функции $y = \log_a x$. На основании теоремы 12.3 можно записать:

$$y' = \frac{1}{\left(a^y\right)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x} \ . \qquad (12.8)$$

Для натурального логарифма из 12.8 получаем: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

13. Критерии возрастания и убывания функции. Критерии существования экстремумов

Во многих случаях бывает важно знать, как ведет себя функция в некоторой точке или на некотором интервале. Ответить на этот вопрос часто помогают рассматриваемые в данной главе критерии.

Теорема 13.1. Если функция f(x) имеет в точке x положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) в этой точке.

Доказательство. Пусть функция f(x) имеет в точке x положительную производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Тогда при достаточно малых $\delta > 0$ для всех Δx, удовлетворяющих неравенству $|\Delta x| < \delta$, имеем $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. А это и означает, что функция f(x) возрастает в точке x. Аналогично доказывается вторая часть теоремы. ☺

Теорема 13.2 (теорема Ферма). Если функция f(x) достигает в точке x локального экстремума (максимума или минимума), и в ней существует производная f'(x), то f'(x) = 0.

Доказательство. Если $f'(x) \neq 0$ в точке x, то в силу теоремы 13.1 функция f(x) в этой точке либо убывает, либо возрастает. Следовательно, она не имеет в точке x экстремума. ☺

Точки, в которых производная функции равна нулю, называют ***стационарными****.*

Пусть, например, $f(x) = \cosh^{-1} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$. График этой функции показан на рис. 13.1.

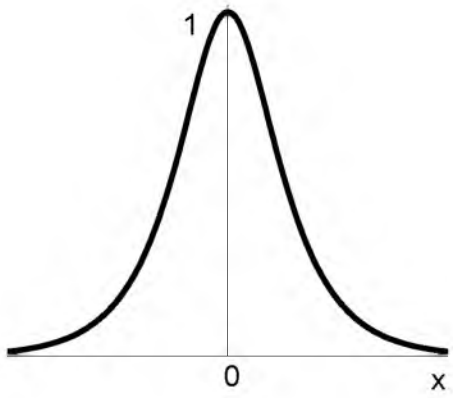


Рис. 13.1

Ее производная:

$$f'(x) = -\frac{2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{2\left(\left(e^{-x} - e^x\right)\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}.$$

При $x < 0$ $f'(x) > 0$, и функция возрастает. При $x > 0$ $f'(x) < 0$, и функция убывает. В точке $x = 0$ производная $f'(x) = 0$, и функция имеет в этой точке локальный максимум.

Теорема 13.2 дает необходимое условие существования локального экстремума функции. Это условие не является достаточным. Например, для функции f(x) = C = const во всех точках f'(x) = 0. Однако очевидно, что эта функция

не имеет локальных экстремумов. Для функции $f(x) = x^3$ в точке $x = 0$ имеем $f'(x) = 0$. Но во всех точках, в том числе и при $x = 0$, эта функция возрастает. Поэтому она не имеет локального экстремума при $x = 0$.

Несмотря на это, теорему Ферма часто используют для нахождения экстремумов. В этом случае вначале находят стационарные точки, а затем проверяют, являются ли они точками максимума или минимума. Такой подход часто оказывается более эффективным, чем использование методов, которые основаны на других критериях.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Для нее можно записать:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \quad \left(\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1\right).$$

В любой сколь угодно малой окрестности $|x| < \delta$ точки $x = 0$ как справа, так и слева от этой точки функция $f(x)$ принимает и положительные, и отрицательные значения, то есть не монотонна. Поэтому в точке $x = 0$ она не только не имеет локального экстремума, но также не возрастает и не убывает в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Теорема 13.3 (теорема Ролля). Пусть функция f(x) имеет производную на интервале (a, b), непрерывна на отрезке [a, b] и принимает на его концах равные значения, то есть f(a) = f(b). Тогда на интервале (a, b) имеется хотя бы одна точка ξ, для которой f'(ξ) = 0.

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(x)$ она имеет на отрезке (a, b) максимальное M и минимальное m значения. Если $m = M = f(a) = f(b)$, то $f(x) = m$ для всех $x \in [a, b]$, и $f'(\xi) = 0$ для любой точки $\xi \in (a, b)$. Если же указанные равенства одновременно не выполняются, то, по крайней мере, одно из чисел m или M отлично от $f(a)$. Пусть это будет число M. Тогда максимум $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ достигается в некоторой точке ξ интервала (a, b). По условию теоремы, производная функции $f(x)$ в точке ξ существует, и, поскольку это точка локального максимума, согласно теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$. Аналогично разбирается случай $m \neq f(a)$. ☺

Теорема 13.4 (теорема Коши о среднем). Пусть функции φ(x) и ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b] и имеют производные на интервале (a, b), которые не обращаются в нуль одновременно. При этом $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$. Тогда на интервале (a, b) найдется точка c, для которой выполняется равенство

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a<c<b). \tag{13.1}$$

Доказательство. Введем функцию

$$F(x)=[\psi(b)-\psi(a)]\varphi(x)-[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi(x).$$

Очевидно, что F(x) непрерывна на [a, b] и дифференцируема на (a, b), так как она получена из функций, которые обладают этими свойствами, с помощью операций вычитания и умножения на действительные числа. Кроме того, легко убедиться, что F(a) = F(b). Согласно теореме Ролля, существует такая точка $c\in(a,b)$, что F'(c) = 0, то есть

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi'(c)=[\psi(b)-\psi(a)]\varphi'(c).$$

Число $\varphi'(c)\neq 0$. В противном случае, из условия $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$ следовало бы: $\psi'(c)=0$. Но это противоречит условию теоремы. Разделив обе части полученного равенства на $[\varphi(b)-\varphi(a)]\varphi'(c)$, получим равенство 13.1. ☺

Пусть, например, $\psi(x)=2x^2-x$, а $\varphi(x)=3x+5$. Их производные будут равны, соответственно: $\psi'(x)=4x-1$ и $\varphi'(x)=3$. Рассмотрим отрезок $[-1,1]$. В этом случае:

$$\frac{\psi(1)-\psi(-1)}{\varphi(1)-\varphi(-1)}=\frac{1-3}{8-2}=-\frac{1}{3},\ \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{4x-1}{3}.$$

Решая уравнение $\frac{4x-1}{3}=-\frac{1}{3}$, находим, что в точке x = 0, которая лежит внутри интервала (-1, 1), выполняется равенство 13.1.

Теорема 13.5 (теорема Лагранжа о среднем). Пусть функция φ(x) непрерывна на отрезке [a, b] и имеет производную на интервале (a, b). Тогда на интервале (a, b) существует точка c, для которой выполняется равенство

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(c)(b-a) \quad (a<c<b). \tag{13.2}$$

Доказательство. Введем функцию $\psi(x) = x$. Согласно теореме Коши, можем записать:

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi'(c)}{1}.$$

Отсюда и получаем выражение 13.2. ☺

Выражение 13.2 называют ***формулой (Лагранжа) конечных приращений****.*

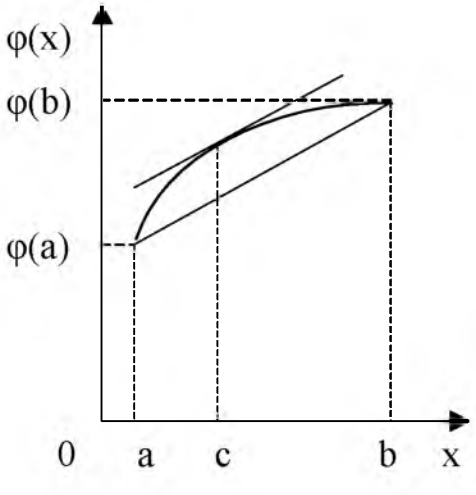


Рис. 13.2

Теореме 13.5 можно дать простые геометрическую и физическую интерпретации (рис. 13.2). Запишем формулу 13.2 в виде:

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \varphi'(c). \qquad (13.3)$$

Левая часть выражения 13.3 представляет собой тангенс угла наклона хорды, соединяющей точки $(a,\varphi(a))$ и $(b,\varphi(b))$. Его правая часть представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = \varphi(x)$ в точке $x = c$.

Таким образом, равенство 13.3 означает, что на интервале (a, b) существует такая точка c, что касательная, проведенная к графику функции $y = \varphi(x)$ в точке с абсциссой c, будет параллельна хорде, которая соединяет точки графика с абсциссами a и b.

Если функция $y = \varphi(x)$ описывает механическое перемещение тела в зависимости от времени, то левая часть равенства 13.3 представляет собой среднюю скорость движения тела между моментами времени a и b, а правая - мгновенную скорость в момент c. Соответственно, равенство 13.3 утверждает, что для любого интервала времени (a, b) существует такой момент c, в который мгновенная скорость движения тела равна средней скорости его движения за этот интервал.

Теорема 13.6. Функция, непрерывная на отрезке [a, b] и имеющая неотрицательную (положительную) производную на интервале (a, b), не убывает (строго возрастает) на [a, b].

Доказательство. Пусть $a \le x_1 < x_2 \le b$. Тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому на интервале (x_1, x_2) найдется такая точка c, для которой справедливо равенство:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < c < x_2). \qquad (13.4)$$

Если $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f'(c) > 0$ и $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ для любых x_1, x_2, удовлетворяющих условиям $a \le x_1 < x_2 \le b$. Следовательно, функция f(x) строго возрастает на отрезке [a, b].

Если же $f'(x) \ge 0$ на (a, b), то $f'(c) \ge 0$ и $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \ge 0$ для любых x_1, x_2, удовлетворяющих условиям $a \le x_1 < x_2 \le b$. Следовательно, функция f(x) не убывает на отрезке [a, b]. ☺

Теорема 13.7. Функция, непрерывная на отрезке [a, b] и имеющая неположительную (отрицательную) производную на интервале (a, b), не возрастает (строго убывает) на [a, b].

Доказательство можно провести аналогично теореме 13.6.

Теорема 13.8. Если производная функции f(x) на интервале (a, b) равна нулю, то на этом интервале f(x) постоянна.

Доказательство. На основании теоремы Лагранжа имеем:

$$f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1),$$

где x_1 - некоторая фиксированная точка интервала (a, b), x - произвольная точка этого интервала, c - зависящая от x_1 и x точка, лежащая между x и x_1. Из условия теоремы следует, что для всех $x \in (a,b)$ $f'(c) = 0$ и $f(x) = f(x_1) = \text{const}$. ☺

Теорема 13.9. Если функция f(x) непрерывна в окрестности точки x_0 и имеет производную

$f'(x) \ge 0 \ (\le 0)$ **справа от x_0,**
$f'(x) \le 0 \ (\ge 0)$ **слева от x_0,**

то x_0 есть точка локального минимума (максимума) функции f(x).

Доказательство теоремы следует из формулы конечных приращений:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \quad (0 < \theta < 1).$$

Справа от точки x_0 величина $x - x_0 > 0$ и $\Delta f > 0$ $(\Delta f < 0)$. Слева от точки x_0 величина $x - x_0 < 0$ и $\Delta f > 0$ $(\Delta f < 0)$. Но это и означает, что x_0 является точкой локального минимума (максимума). ☺

В теореме 13.9 не предполагалось существования производной в самой точке x_0, но если такая производная существует, то по теореме Ферма она равна нулю.

Теорема 13.10. Если функция f(x) удовлетворяет условиям $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 есть точка локального минимума (максимума) функции f(x).

Доказательство. Из существования в точке x_0 второй производной функции f(x) следует, что в некоторой окрестности этой точки функция f(x) непрерывна и имеет первую производную. Из того, что $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), согласно теореме 13.6 (13.7), следует, что f'(x) возрастает (убывает) в точке x_0. Поскольку $f'(x_0) = 0$, то для возрастающей f'(x) имеем: $f'(x) < 0$ слева от точки x_0, и $f'(x) > 0$ справа от x_0. Тогда, согласно теореме 13.9, можно сделать вывод, что x_0 есть точка локального минимума функции f(x). Аналогично можно показать, что для убывающей f'(x) x_0 будет являться точкой локального максимума. ☺

Рассмотрим функцию $f(x) = \cosh^{-1}(x)$. Ее вторая производная:

$$f''(x) = \left(\frac{2\left(e^{-x} - e^{x}\right)}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2} \right)' = 2\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 6}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^3}.$$

В точке $x = 0$ значение второй производной $f''(0) = -1$. Значение первой производной в той же точке, как было показано выше, равно нулю. Следовательно, согласно теореме 13.10, $x = 0$ есть точка максимума функции $f(x) = \cosh^{-1}(x)$, как это и видно из рис. 13.1.

14. Формула Тейлора. Ряд Тейлора

Многие функции невозможно строго исследовать. Поэтому одной из актуальных задач математического анализа является разработка методов приближения (аппроксимации) сложных функций более простыми, которые достаточно мало отличаются от них на выбранном интервале. Один из основных методов аппроксимации функций связан с их разложением в ряд Тейлора.

Пусть нам задан произвольный многочлен

$$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n . \qquad (14.1)$$

Зададим произвольное число a и произведем замену x на (x - a) + a:

$$P(x) = b_0 + b_1[(x-a)+a] + b_2[(x-a)+a]^2 + \ldots + b_n[(x-a)+a]^n .$$

Далее, раскрывая скобки и приводя подобные при одинаковых степенях (x - a), получим:

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 + \ldots + \beta_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k , \qquad (14.2)$$

где β_k – постоянные, значения которых зависят от исходных коэффициентов b_i.

Равенство 14.2 называют ***разложением многочлена P(x) по степеням*** (x - a), а числа β_k - ***коэффициентами*** этого разложения.

При последовательном дифференцировании P(x) получим:

$$P'(x) = \beta_1 + 2\beta_2(x-a) + \ldots + n\beta_n(x-a)^{n-1};$$
$$P''(x) = 2\beta_2 + 2\cdot 3\beta_3(x-a) + \ldots + (n-1)n(x-a)^{n-2};$$
$$P'''(x) = 2\cdot 3\beta_3 + 2\cdot 3\cdot 4\beta_4(x-a) + \ldots + (n-2)(n-1)n(x-a)^{n-3};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^{(k)} = k!\beta_k + 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)(x-a) + \ldots + (n-k+1)(n-k+2)\ldots n(x-a)^{n-k} .$$

При x = a получаем $P^{(k)}(a) = k!\beta_k$, откуда

$$\beta_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 1,2,\ldots). \qquad (14.3)$$

Из формулы 14.3 следует, что многочлен P(x) можно разложить по степеням (x - a) единственным способом, а именно:

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \quad (14.4)$$

Формулу 14.4 называют ***формулой Тейлора***. В случае a = 0 она принимает вид:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k. \quad (14.5)$$

Формулу 14.5 называют ***формулой Маклорена*** или ***формулой Тейлора - Маклорена***.

Пусть в окрестности точки a задана функция f(x), имеющая в этой окрестности производные до n-го порядка включительно. Найдем числа f(a), f'(a), f''(a),…,$f^{(n-1)}$(a) и составим функцию

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \quad (14.6)$$

Q(x) есть многочлен степени n - 1, называемый ***(n - 1)-м многочленом Тейлора функции f(x)***. Если бы функция f(x) также была многочленом степени n - 1, то, как указывалось выше, было бы справедливо тождество Q(x) = f(x). В противном случае можно записать формулу Тейлора функции f(x) в окрестности точки a в виде:

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x), \quad (14.7)$$

где $Q_{n-1}(x)$ - (n - 1)-й многочлен Тейлора функции f(x), а $R_n(x)$ - ***остаточный член (или n-й остаток)*** рассматриваемой формулы Тейлора.

Теорема 14.1. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, x] вместе со всеми своими производными до (n - 1)-го порядка включительно и имеет производную порядка n на интервале (a, x). Тогда n-й остаточный член формулы Тейлора для функции f(x) может быть записан в форме Лагранжа или в форме Коши.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a, x), \tag{14.8}$$

где ξ есть некоторая точка интервала (a, x), зависящая от x и n, при этом возможно как x > a, так и x < a.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1, \tag{14.9}$$

где θ - число, зависящее от x и n.

Доказательство. Представим остаток в виде

$$R_n(x) = (x-a)^p H,$$

где p - натуральное число, H - число, зависящее от x (постоянное при постоянном x). Выполним формальную замену постоянной a на переменную u и будем считать x постоянной величиной. Тогда формула Тейлора может быть записана в виде:

$$\Phi(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-u)^k}{k!} f^{(k)}(u) + (x-u)^p H =$$

$$= f(u) + \frac{x-u}{1} f'(u) + \ldots + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(u) + (x-u)^p H.$$

Функция $\Phi(u)$ определена и непрерывна для всех значений $u \in [a, x]$, потому что на этом отрезке непрерывна исходная функция f(x) и все ее производные до (n - 1)-й включительно. Из определения функции $\Phi(u)$ следует, что при u = a значение функции $\Phi(u) = \Phi(a) = f(x)$. При u = x справедливо $\Phi(u) = \Phi(x) = f(x)$, поскольку в этом случае все члены формулы Тейлора, кроме первого,

равны нулю. Кроме того, функция Φ(u) имеет производную n-го порядка на интервале (a, x), так как на нем имеет производную n-го порядка исходная функция f(x). Таким образом, функция Φ(u) удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому между точками a и x существует промежуточная точка $u = a + \theta(x - a)$ такая, что Φ'(u) = 0. Найдем производную функции Φ(u):

$$\Phi'(u) = f'(u) - f'(u) + (x-u)f''(u) - (x-u)f''(u) + \dots .$$

$$-\frac{(x-u)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(u) + \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(u) - p(x-u)^{p-1}H =$$

$$= \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(u) - p(x-u)^{p-1}H .$$

Подставляя в полученное выражение значение $u = a + \theta(x - a)$, получим:

$$\Phi'(u) = \frac{(x-a-\theta(x-a))^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - p(x-a-\theta(x-a))^{p-1}H = 0;$$

$$\frac{(x-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)) = pH;$$

$$R_n = (x-a)^p H = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)). \qquad (14.10)$$

Выбирая в 14.10 значение p равным n, получаем:

$$R_n = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-n}}{n(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)),$$

т.е. остаточный член в форме Лагранжа. Если же в 14.10 положить p = 1, то получим:

$$R_n = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}a(+\theta(x-a)),$$

т.е. остаточный член в форме Коши. ☺

Теорема 14.2. Если функция f(x) имеет непрерывную производную порядка n в точке a, то эта функция может быть разложена по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$R_n = o\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a)\,. \tag{14.11}$$

Доказательство. Из существования в точке a непрерывной производной $f^{(n)}(x)$ порядка n следует, что существует некоторая окрестность этой точки, в которой непрерывны производные функции f(x) n-го и (n-1)-го порядков, то есть соблюдены условия для разложения f(x) по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда:

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}\left(a+\theta(x-a)\right) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}\left(a+\theta(x-a)\right) - f^{(n)}(a)\right] = (x-a)^n o(1) \quad (x \to a),$$

поскольку при $x \to a$ справедливо:

$$\frac{\left|f^{(n)}\left(a+\theta(x-a)\right) - f^{(n)}(a)\right|}{n!} = 1 \cdot \varepsilon(x) \quad \left(\varepsilon(x) \to 0 \text{ при } x \to a\right).$$

Отсюда получаем:

$$r_n(x) = (x-a)^n o(1) = o\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a).$$

Подставляя в формулу Тейлора полученное значение R_n, получим:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o\left((x-a)^n\right) = \tag{14.12}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a).$$

☺

Теорема 14.3. Если функция f(x) может быть разложена по формуле Тейлора с остатком в форме Пеано, то такое разложение единственно.

Доказательство. Используем метод математической индукции. Предположим, что возможны различные разложения функции по формуле Тейлора:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x-a)^i+o_1(x-a)^n$$

и

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i(x-a)^i+o_2(x-a)^n .$$

Рассмотрим случай n = 1. Тогда

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-a)+o_1(x-a)=\beta_0+\beta_1(x-a)+o_2(x-a).$$

Из формулы Тейлора следует, что $\alpha_0=\beta_0=f(a)$. Если $\alpha_1\neq\beta_1$, то при $x\to a$ имеем:

$$f(x)-f(x)=\alpha_1(x-a)+o_1(x-a)-\beta_1(x-a)-o_2(x-a)=$$
$$=\alpha_1(x-a)-\beta_1(x-a)+o_3(x-a)=(\alpha_1-\beta_1)(x-a)+o_3(x-a)\neq o(x-a).$$

Таким образом, мы должны сделать вывод, что $\alpha_1=\beta_1$ и разложение по формуле Тейлора при n = 1 является единственным.

Предположим теперь, что разложение является единственным для n = m – 1 и не является единственным при n = m. Тогда для произвольной функции f(x) выполняются равенства $\alpha_i=\beta_i$ при всех i < m и $\alpha_m\neq\beta_m$. Формулы Тейлора для двух различных разложений функции будут иметь вид:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m-1}(x-a)^i\alpha_i+(x-a)^m\alpha_m+o_1(x-a)^m$$

и

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m-1}(x-a)^i\beta_i+(x-a)^m\beta_m+o_2(x-a)^m .$$

Отсюда получаем:

$$f(x)-f(x)=\alpha_m(x-a)^m+o_1(x-a)^m-\beta_m(x-a)^m-o_2(x-a)^m=$$
$$=\alpha_m(x-a)^m-\beta_m(x-a)^m+o_3(x-a)^m=(\alpha_m-\beta_m)(x-a)^m+o_3(x-a)^m\neq$$
$$\neq o(x-a)^m .$$

Таким образом, мы показали, что теорема верна для n = 1, и из предположения о справедливости теоремы для некоторого n = m – 1 следует ее справедливость для n = m. Тем самым мы доказали, что теорема справедлива для любого числа членов разложения. Это и означает его единственность. ☺

Теорема 14.4. Формула Тейлора разложения четной (нечетной) функции в окрестности точки x = 0 содержит в себе члены только четной (нечетной) степени x.

Доказательство. Воспользуемся, как и в предыдущем случае, методом математической индукции. Пусть f(x) есть четная функция. Тогда ее можно разложить в ряд по формуле Тейлора следующим образом:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2!} + o\left(x^2\right).$$

Из определения четной функции и свойств ее производных следует:

$$f(-x) = f(0) - xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2!} + o\left(x^2\right) = f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2!} + o\left(x^2\right).$$

Отсюда получаем: $xf'(0) \equiv 0$ и, поскольку это тождество должно выполняться для любых x, из него следует $f'(x) \equiv 0$.

Предположим теперь, что для всех нечетных производных функции f(x) вплоть до порядка k = 2n – 1 справедливо равенство $f^{(k)}(0) \equiv 0$. Тогда эту функцию можно разложить по формуле Тейлора следующим образом:

$$f(x) = f(0) + \frac{x^2f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}f^{(2n)}(0)}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} + \\ + \frac{x^{2n+2}f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

Поскольку функция четная, то:

$$f(-x) = f(0) + \frac{x^2f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}f^{(2n)}(0)}{(2n)!} + \frac{(-x)^{2n+1}f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} + \\ + \frac{x^{2n+2}f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = f(x) - 2\frac{x^{2n+1}f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = f(x).$$

Отсюда получаем: $x^{2n+1}f^{(2n+1)}(0) \equiv 0$, что возможно только при $f^{(2n+1)} \equiv 0$.

Таким образом, мы показали, что формула Тейлора разложения произвольной четной функции в окрестности точки x = 0 не содержит члена с первой степенью x. Кроме того, из предположения, что она не содержит членов с нечетными степенями x вплоть до степени 2n – 1, следует, что она не содержит также и члена со степенью 2n + 1. Тем самым теорема доказана для общего случая. ☺

Рассмотрим теперь разложения некоторых элементарных функций по формуле Тейлора.

Функция $f(x) = e^x$. Для этой функции: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, …, $f^{(n)}(x) = e^x$. При a = 0 формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа принимает вид:

$$e^x = e^0 + \frac{xe^0}{1} + \frac{x^2e^0}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}e^0}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x} = \tag{14.13}$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

Для любого x величина остатка $|R_n| < \frac{|x|^n e^x}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$. Для x < 0 величина остатка $|R_n| < \frac{|x|^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Функция $f(x) = \sin x$. Для этой функции $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, …, $f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2)$. Формула Тейлора по степеням x с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$\sin x = \sin 0 + \frac{x}{1}\cos 0 - \frac{x^2}{2!}\sin 0 - \frac{x^3}{3!}\cos 0 + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right) + \frac{x^n}{n!}\sin\left(\frac{\theta\pi n}{2}\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{v+1}\frac{x^{2v-1}}{(2v-1)!} + \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!}\sin\left(\theta x + (2v+1)\frac{\pi}{2}\right). \tag{14.14}$$

В выражении 14.14 учтено, что все нечетные члены формулы Тейлора равны нулю, поэтому может быть выполнена замена n = 2v.

Приведем без вывода формулы Тейлора еще для некоторых функций.

$$1)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{v-1}\frac{x^{2(v-1)}}{(2(v-1))!} + \frac{x^{2v}}{(2v)!}\cos(\theta x + v\pi), \tag{14.14}$$

$$|R_{2v}(x)| \le \frac{|x|^{2v}}{(2v)!} \to 0 \quad (v \to \infty).$$

$$2)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n\ . \qquad (14.16)$$

Остаток в форме Лагранжа имеет вид $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(1+\theta x)^n}$, а в форме Коши - $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$. При $-1 < x \le 1$ величина остатка стремится к нулю при $n \to \infty$. При $x \le -1$ функция $\ln(1+x)$ не имеет смысла. При $x > 1$ остаточный член не стремится к нулю при $n \to \infty$.

$$3)\ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^n + R_n(x). \qquad (14.17)$$

Остаток в форме Лагранжа имеет вид $R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n(1+\theta x)^{m-n}$, а в форме Коши - $R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$. При натуральном m и любом x все члены формулы, начиная с (m + 1)- го, исчезают и формула Тейлора превращается в формулу бинома Ньютона. Для ненатуральных m формула (14.17) имеет смысл для всех x > -1. При этом для -1 < x < 1 остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$. При x > 1 остаточный член не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Выражение

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots, \qquad (14.18)$$

где u_k - числа, которые в силу некоторого закона зависят от индекса k (k = 0, 1, 2, …), называется ***рядом****.*

Пусть $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ - сумма первых n членов ряда. Числа S_n образуют некоторую последовательность. Если существует конечный предел этой последова-

тельности $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что ***ряд*** 14.18 ***сходится*** и имеет ***сумму***, равную S. При этом пишут $S = u_0 + u_1 + ... + u_k + ...$.

Если функция f(x) имеет в некоторой окрестности точки a производные сколь угодно высокого порядка, то для нее можно составить ряд:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... , \qquad (14.19)$$

который называется рядом Тейлора функции f(x) по степеням (x - a). Для заданных значений x и a этот ряд может сходиться или расходиться. На практике наиболее важен случай, когда он сходится к значению функции f(x) в точке a. Как видно из формулы 14.7, это имеет место тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора $R_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$.

Функцию f(x), разлагающуюся в ряд Тейлора по степеням (x - a), сходящийся к f(x) в некоторой окрестности точки a, называют ***аналитической*** *во всех точках этой окрестности (открытой).* В частности, она будет аналитической в самой точке a. Примерами аналитических функций являются рассмотренные выше функции e^x, sin x, cos x в интервале $(-\infty,+\infty)$, $(1 + x)^m$ в интервале (-1, 1), ln (1 + x) в полуинтервале $(-1,1]$.

Для функций, заданных на интервале, можно построить следующую классификацию:

1) произвольные (разрывные) функции;
2) непрерывные функции;
3) функции, имеющие производную n-го порядка для некоторого n;
4) функции, имеющие непрерывную производную n-го порядка для некоторого n;
5) бесконечно дифференцируемые функции (т.е. имеющие непрерывные производные любого порядка);
6) аналитические функции.

В этом перечне каждый следующий класс функций содержится в предыдущем.

15. Выпуклость и вогнутость графика функции. Асимптоты

Понятия выпуклости функции (выпуклости множества) играют важную роль в математическом анализе и других разделах современной математики. Более подробно эти понятия будут даны в § 18. Здесь же мы дадим лишь их упрощенное предварительное рассмотрение применительно к функциям одной переменной.

Говорят, что кривая y = f(x) ***обращена в точке x_0 выпуклостью кверху (книзу)****, если существует такая окрестность $\cup(x_0)$, что для всех $x \in \cup(x_0)$ касательная к кривой y = f(x) в точке с абсциссой x_0 расположена выше (ниже) самой кривой.*

Говорят, что точка x_0 есть ***точка перегиба*** *кривой y = f(x), если существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ кривая y = f(x) находится с одной стороны от касательной, построенной к ней в точке x_0, а для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ - с другой стороны.*

Говорят также, что x_0 является ***точкой перегиба*** *непрерывной кривой y = f(x), если производная $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$.*

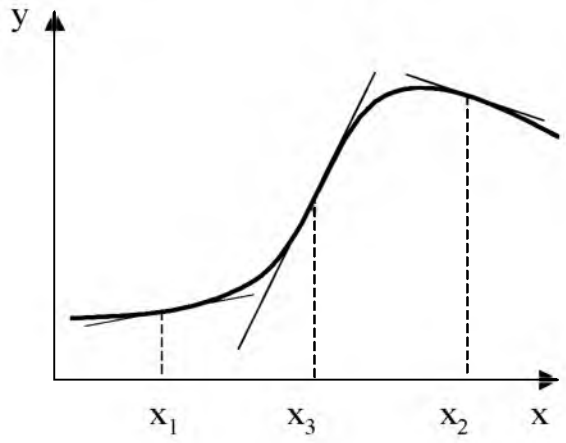


Рис. 15.1.

Примеры.

Кривая, показанная на рис. 15.1, обращена выпуклостью книзу в точке x_1 и выпуклостью кверху в точке x_2. Кроме того, она имеет перегиб в точке x_3.

Кривая $y = x^n$ обращена выпуклостью книзу и не имеет перегибов для любого натурального четного n. Для любого натурального нечетного $n > 1$ кривая $y = x^n$ обращена выпуклостью кверху при $x < 0$ и выпуклостью книзу при $x > 0$. При этом она имеет перегиб в точке $x = 0$.

Кривая $y = \ln x$ обращена выпуклостью кверху для любого $x > 0$ и не имеет точек перегиба. Кривая $y = e^x$ обращена выпуклостью вниз на всей действительной оси и также не имеет точек перегиба.

Теорема 15.1. Если функция f(x) имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную, и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то кривая $y = f(x)$ в точке x_0 обращена выпуклостью книзу (кверху).

Доказательство. Разложим функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Если ограничиться двумя первыми членами разложения, то ряд будет иметь следующий вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x), \qquad (15.1)$$

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1). \qquad (15.2)$$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (15.3)$$

Таким образом, остаток $R(x) = f(x) - \varphi(x)$ дает превышение кривой $y = f(x)$ над касательной к ней, проведенной в точке x_0. В силу непрерывности $f''(x)$ из формулы 15.2 следует, что при $f''(x_0) > 0$ остаток $R(x) > 0$ в рассматриваемой окрестности точки x_0. Следовательно, график функции в точке x_0 лежит выше графика касательной, и кривая $y = f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью книзу. При $f''(x) < 0$, напротив, график функции лежит ниже касательной и кривая $y = f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью кверху.

Теорема 15.2. Если функция f(x) такова, что производная $f'''(x)$ непрерывна в точке x_0, $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$, то кривая $y = f(x)$ имеет в x_0 точку перегиба.

Доказательство. Если при разложении f(x) в ряд Тейлора ограничиться первыми тремя членами, то разложение будет иметь вид 15.1 с остаточным членом

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < x_0). \qquad (15.4)$$

Поскольку $f'''(x)$ непрерывна, и $f'''(x) \neq 0$, то $f'''(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0, т.е. для достаточно малой окрестности точки x_0 $f'''(x_0 + \theta(x - x_0))$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0. Величина $(x - x_0)^3$, напротив, изменяет свой знак при переходе через точку x_0. Следовательно, при этом переходе изменяется также знак остатка R(x). А это и означает, что x_0 является точкой перегиба.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение двух предыдущих.

Теорема 15.3. Пусть функция f(x) обладает следующими свойствами: $f'(x) \neq 0$, $f''(x_0) = \ldots = f^{(k)}(x_0) = 0$, $f^{(k+1)}(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f^{(k+1)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если k - нечетное число, то кривая y = f(x) обращена в точке x_0 выпуклостью вверх при $f^{(k+1)}(x_0) < 0$ и вниз при $f^{(k+1)}(x_0) > 0$. Если же k - четное число, то x_0 есть точка перегиба кривой.

Если же при выполнении остальных вышеуказанных условий $f'(x_0) = 0$, то для нечетных k функция f(x) достигает в точке x_0 максимума при $f^{(k+1)}(x_0) < 0$ и минимума при $f^{(k+1)}(x_0) > 0$.

Доказательство. Если при разложении f(x) в ряд Тейлора ограничиться первыми k + 1 членами, то разложение будет иметь вид 15.1 с остаточным членом

$$R(x) = \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < x_0). \qquad (15.4)$$

Рассмотрим вначале случай $f'(x) \neq 0$. Поскольку $f^{(k+1)}(x)$ непрерывна и $f^{(k+1)}(x) \neq 0$, то $f^{(k+1)}(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0, т.е. для достаточно малой окрестности точки x_0 $f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0. Величина $(x - x_0)^{k+1}$ изменяет свой знак при переходе через точку x_0, если k четное, и сохраняет его, если k - нечетное. Следовательно, при этом переходе для нечетного k сохраняется также знак остатка R(x) и x_0 является точкой перегиба. Для нечетного k знак R(x) при переходе не изменяется. Соответственно, в этом случае кривая y = f(x) обращена в точке x_0 выпуклостью вверх при $f^{(k+1)}(x_0) < 0$ и вниз при $f^{(k+1)}(x_0) > 0$.

Очевидно, $R(x_0) \equiv 0$. Если $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой y = f(x) в точке x_0 расположена горизонтально и имеет уравнение $\varphi(x) = f(x_0) = \text{const}$ и f(x) $= = f(x_0) + R(x)$. Величина $f(x) - f(x_0)$ будет иметь тот же знак, что и R(x). Следовательно, для нечетного k знак $f(x) - f(x_0)$ при переходе через x_0 не изменяется и совпадает со знаком $f^{(k+1)}(x_0)$. Поэтому при $f^{(k+1)}(x_0) < 0$ функция f(x) достигает в точке x_0 максимума, а при $f^{(k+1)}(x_0) > 0$ - минимума. Заметим, что наличие максимума или минимума функции в рассматриваемой точке является свойством, которое дополняет выпуклость графика вверх или вниз. В самом деле, в точке максимума, график функции обращен выпуклостью вверх, а в точке минимума – выпуклостью вниз, что соответствует утверждению данной теоремы для случая, когда $f'(x) \neq 0$.

Для четного k величина $f(x) - f(x_0)$ изменяет знак при переходе через точку x_0. Соответственно, как и в случае $f'(x) \neq 0$, в точке x_0 функция будет иметь перегиб. Примером могут служить функции вида $f(x) = x^{2n-1}$, где n – натуральное число. Значения всех их производных, вплоть до производной порядка 2n – 2 включительно, в точке x = 0 равны нулю; $f^{(2n-1)}(0) = (2n-1)!$ отлична от нуля. При x < 0 графики этих функций обращены выпуклостью вверх, при x > 0 – выпуклостью вниз, в точке x = 0 они имеют перегиб.

Кривая y = f(x) называется ***<u>выпуклой кверху (книзу) на отрезке</u>*** *[a, b], если любая дуга этой кривой с концами в точках* x_1, x_2 $(a \le x_1 < x_2 \le b)$ *расположена не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 15.2).*

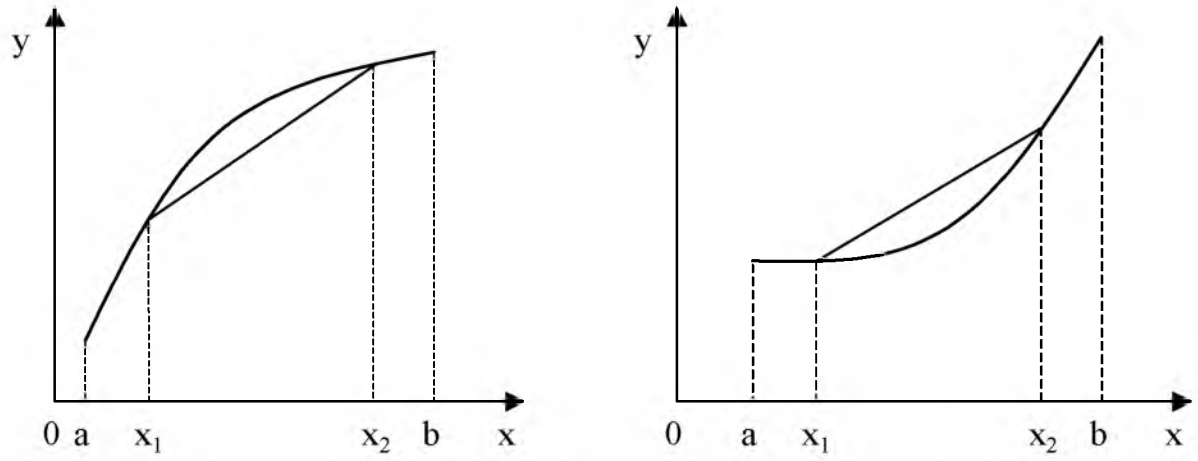


Рис. 15.2

<u>Теорема 15.4.</u> Пусть функция f(x) непрерывна на [a, b] и имеет вторую производную на (a, b). Тогда для того, чтобы кривая y = f(x) была выпуклой кверху (книзу) на [a, b] необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ **для всех** $x \in (a,b)$**.**

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим произвольный отрезок $[x_1, x_1+\Delta x] \subset (a,b)$. Уравнение хорды, которая стягивает дугу кривой y = f(x) с концами в точках x_1 и $x_1 + \Delta x$, имеет вид: $v = f(x_1) + \alpha(x - x_1)$; уравнение касательной к кривой в точке x_1: $w = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. Уравнение самой кривой можно записать в виде: $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 + o\left((x - x_1)^2\right)$. При этом для кривой, обращенной в точке x_1 выпуклостью вверх, будет выполняться соотношение: $\alpha < f'(x_1)$, а для кривой, выпуклость которой в этой точке обращена вниз, - $\alpha > f'(x_1)$. При $x \to x_1$ $(x \in [x_1, x_1 + \Delta x])$ в силу того, что $(x - x_1)^2 = o(x - x_1)$, будут также выполняться неравенства: $v(x) < y(x) < w(x)$ для функции, обращенной выпуклостью вверх, и $v(x) > y(x) > w(x)$ для функции, обращенной выпуклостью вниз. Это означает, что для произвольной точки x_1 интервала (a, b) существует такая ее правая окрестность $(x_1, x_1 + \Delta x)$, что хорда, которая стягивает дугу кривой y = f(x) с концами в точках x_1 и $x_1 + \Delta x$, лежит ниже дуги при $f''(x_1) < 0$ и выше неё при $f''(x_1) > 0$. Аналогично можно показать, что для произвольной точки x_1 интервала (a, b) существует ее левая окрестность с теми же свойствами. В этом случае для кривой, обращенной в точке x_1 выпуклостью вверх, будет выполняться соотношение: $\alpha > f'(x_1)$, а для кривой, выпуклость которой в этой точке обращена вниз, - $\alpha < f'(x_1)$. Однако,

поскольку теперь $x - x_1 < 0$, при $x \to x_1$ для кривых, обращенных выпуклостями вверх или вниз, по-прежнему будут выполняться соотношения $v(x) < y(x) < w(x)$ и $v(x) > y(x) > w(x)$, соответственно.

В крайних точках отрезка [a, b], очевидно, $f(a) = v(a)$ и $f(b) = v(b)$. Таким образом, мы показали, что все условия выпуклости (вогнутости) функции на отрезке выполнены. Тем самым теорема доказана.

Раскрытие неопределенностей

В ряде случаев бывает необходимо найти пределы, приводящие к неопределенностям вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\varphi(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a. Пусть a - конечное число и для функций f(x) и φ(x) найдены главные степенные члены относительно (x - a):

$$f(x) = \alpha_p (x-a)^p + o\left((x-a)^p\right) \quad \left(x \to a,\ \alpha_p \neq 0\right),$$
$$\varphi(x) = \beta_q (x-a)^q + o\left((x-a)^q\right) \quad \left(x \to a,\ \beta_q \neq 0\right).$$

Тогда:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_p (x-a)^p}{\beta_q (x-a)^q} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_p}{\beta_p} & (p = q), \\ 0 & (p > q), \\ \infty & (p < q). \end{cases} \qquad (15.5)$$

Например,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)}{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{1}{3} + o(1)}{\dfrac{1}{6} + o(1)} = -2.$$

Для разложения функций в ряд необходимо, чтобы они имели производные в точке x = a. Однако это условие выполняется не всегда, бывают также случаи, когда производные существуют, но их сложно вычислить. В таких ситуациях часто оказывается полезной следующая теорема.

Теорема 15.5. Пусть функции f(x) и φ(x) непрерывны и имеют производные в окрестности точки a (a - конечное число или ∞), за исключением, быть может, самой точки a; при этом φ(x) и φ'(x) не равны нулю в указанной окрестности, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$**. Тогда, если существует предел**

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \qquad (15.6)$$

(конечный или бесконечный), то существует также равный ему предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \qquad (15.7)$$

Теорема может быть сформулирована только для левого или правого предела. Тогда под окрестностью точки a следует понимать, соответственно, ее левую или правую окрестность.

Доказательство. Пусть a - конечное число. Если известно, что пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ существуют, то вопрос о существовании и конкретных значениях f(a) и φ(a) становится несущественным (в силу определения предела функции). Примем:

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \varphi(a) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0.$$

Теперь функции f и φ непрерывны в точке a. Применяя теорему Коши, мы можем сделать вывод, что, какова бы ни была точка x из рассматриваемой окрестности, между a и x найдется точка $\xi = a + \theta(x - a)$ $(0 < \theta < 1)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (15.8)$$

Если предел 15.6 существует, то из 15.8 следует, что существует также $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = A$ и, следовательно, справедливо равенство 15.7.

Обратное утверждение в общем случае будет неверным. Из существования предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$ не следует, что предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ существует и равен A.

Пусть, например, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ и $\varphi(x) = \sin x$. Поскольку $\sin x \approx x$ $(x \to 0)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin(1/x)=0.$$

В то же время предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}2x\frac{\sin(1/x)}{\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos(1/x)}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$$

не существует.

Рассмотрим теперь случай $a=\infty$. Сделаем подстановку $x = 1/u$ и рассмотрим функции $F(u) = f(1/u)$ и $\Phi(u)=\varphi(1/u)$. Они непрерывны в окрестности точки 0 (правой окрестности точки 0 для $a = +\infty$ и левой для $a = -\infty$) и имеют в этой окрестности производные по u. Кроме того, в этой окрестности $\Phi\neq 0$ и $\Phi'\neq 0$. При этом $\lim\limits_{u\to 0}F(u)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ и $\lim\limits_{u\to 0}\Phi(u)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то, очевидно, существует и равный ему предел $\lim\limits_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}$. Тогда на основании доказанного выше для конечного a получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{F(u)}{\Phi(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{F'(u)}{\Phi'(u)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Следующие две теоремы студентам предлагается доказать самостоятельно.

<u>Теорема 15.6.</u> Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. Тогда в некоторой окрестности точки a определена функция $x'=\lambda(x)$ такая, что $\lim\limits_{x\to a}x'=\lim\limits_{x\to a}\lambda(x)=a$, и одновременно

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x')}{f(x)}=0,\quad\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x')}{\varphi(x)}=0,$$

то есть,

$$f(x)\approx f(x)-f(x'),\quad\varphi(x)\approx\varphi(x)-\varphi(x')\quad(x\to a).$$

Теорема 15.7. Пусть функции f(x) и φ(x) непрерывны и имеют производные f' и φ' в окрестности (в частности, в правой или в левой окрестности) точки a (конечной или бесконечной), за исключением самой точки a. При этом, в указанной окрестности φ и φ' не равны нулю, и

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \quad (+\infty \text{ или } -\infty).$$

Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$**, то существует также и равный ему предел** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$**.**

Обратное утверждение в общем случае неверно, из существования предела $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ не следует существование предела $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Например, пусть $f(x) = x - \cos x$ и $\varphi(x) = x$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = 1.$$

В то же время предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \sin x}{1} = 1 + \lim_{x\to\infty} \sin x$$

не существует.

Теоремы 15.5 и 15.7 называют **правилами Лопиталя**.

Неопределенности других видов могут быть сведены к двум предыдущим случаям.

Если $f \to \infty$, $\varphi \to \infty$, то $f - \varphi = \left(\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{\varphi}\right) : \dfrac{1}{f\varphi}$ и мы получаем неопределенность вида 0/0.

Если $f \to 0$, $\varphi \to \infty$, то $f\varphi = \dfrac{f}{1/\varphi}$, и мы опять получаем неопределенность вида 0/0.

Логарифмирование выражений u^v, приводящих к неопределенностям вида 0^0, ∞^0, 1^∞, дает неопределенность вида $0\cdot\infty$.

*Функция f называется **гладкой** на отрезке [a, b], если ее производная на этом отрезке непрерывна.*

Теорема 15.8. Пусть функция f(x) является гладкой на отрезке [a, b]. Тогда на этом отрезке функция f(x) непрерывна.

Доказательство. Согласно данному выше определению и определению непрерывности функции на отрезке, можно записать:

$$\lim_{x\to x^*} f'(x) = f'(x^*) \quad \text{для всех } x^* \in (a,b);$$
$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f'(x) = f'(a); \quad \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f'(x) = f'(b).$$

Тогда для каждой $x^* \in (a,b)$ существует такая окрестность $\cup(x^*)$, что для всех $x \in \cup(x^*)$ справедливо:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*);$$
$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*) + \lim_{x\to x^*}\left[f'(x^*)(x - x^*)\right] + 0 = f(x^*). \qquad (15.9)$$

Аналогично можно показать, что для правой окрестности точки a и левой окрестности точки b будут выполняться равенства:

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = f(a), \quad \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x) = f(b). \qquad (15.10)$$

Выполнение равенств 15.9 и 15.10 и означает непрерывность функции f(x) на отрезке [a, b].

Доказанную теорему можно рассматривать как необходимое (но не достаточное) условие гладкости функции. Например, функция $f(x) = |x|$ является непрерывной на всей действительной прямой, но она не обладает на ней свойством гладкости, поскольку не имеет производной в точке x = 0.

Можно дать другое, эквивалентное предыдущему, определение гладкой функции. *Функция f называется гладкой на отрезке [a, b], если она на этом отрезке непрерывна и имеет на интервале (a, b) непрерывную производную f' такую, что существуют конечные пределы* $f'(a+0) = A$ *и* $f'(b-0) = B$.

Характерной особенностью графиков негладких функций является наличие на них хотя бы одной точки излома, т.е. точки, в которой тангенс угла наклона к графику функции скачкообразно изменяется.

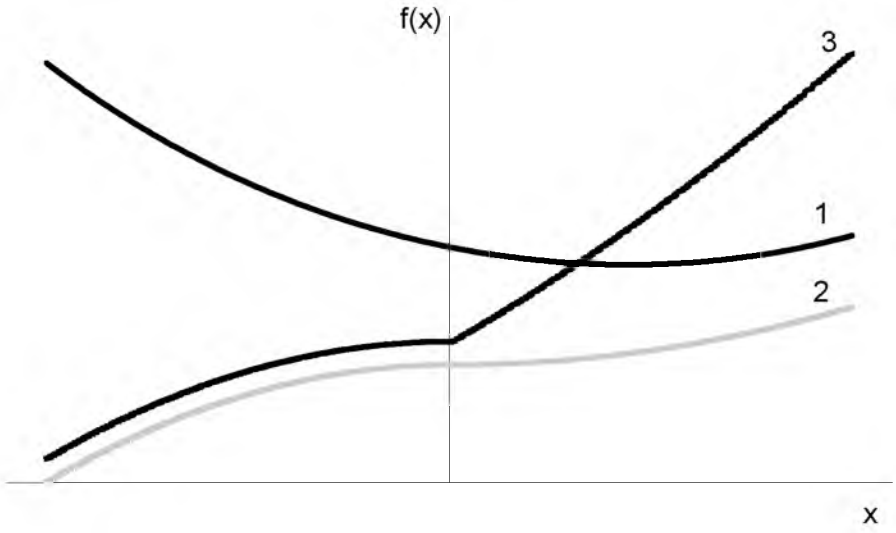


Рис. 15.3

На рис. 15.3 показаны графики трех функций:

$$1 - f(x) = \exp\left(1 + \frac{x}{10}\right) + \exp\left(2 - \frac{x}{12}\right);$$

$$2 - f(x) = \begin{cases} 5 - x^2/20 & (x \le 0), \\ 5 + x^2/40 & (x>0); \end{cases}$$

$$3 - f(x) = \begin{cases} 6 - x^2/20 & (x \le 0), \\ 6 + x + x^2/40 & (x>0). \end{cases}$$

Первые две функции непрерывны и имеют непрерывные производные. Третья функция непрерывна, но ее производная имеет разрыв в точке x = 0. Из рисунка видно, что это приводит к появлению излома на графике функции.

Функция f называется ***кусочно-непрерывной*** *на отрезке [a, b], если она определена и непрерывна всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек* $x_1, x_2, \ldots, x_N \in (a,b)$*, в которых существуют конечные пределы f слева и справа.*

Кусочно-непрерывная функция непрерывна на каждом из интервалов (x_i, x_{i+1}). Независимо от того, определена ли кусочно-непрерывная функция в точках x_i, x_{i+1}, ее можно доопределить в них таким образом, что она будет непрерывной на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Функция f называется ***кусочно-гладкой*** *на отрезке [a,b], если на этом отрезке сама f и ее производная f' кусочно-непрерывны.* Примерами кусочно-гладких функций могут служить функция $f(x) = |x|$, а также функция 3 из рассмотренного выше примера.

16. Векторные функции в n-мерном евклидовом пространстве

Из школьного курса физики известно, что многие встречающиеся на практике функции представляют собой векторные величины, либо скаляры, которые зависят от векторных величин. Примерами могут служить перемещение, сила, напряженность поля, которые являются векторами, а также работа силы, представляющая собой скалярное произведение двух векторов. Введем ряд определений.

Произвольную упорядоченную систему $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *из n действительных (комплексных) чисел называют* ***точкой*** *или* ***вектором n-мерного действительного (комплексного) пространства*** R_n ***, которое представляет*** **собой множество всех указанных x.** В дальнейшем векторные величины мы будем выделять полужирным шрифтом.

Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ и α, β - действительные (комплексные) числа, то

$$\alpha\mathbf{x} \pm \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 \pm \beta y_1, \ldots, \alpha x_n \pm \beta y_n). \qquad (16.1)$$

Это равенство определяет операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Вектор (точку) $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$ *называют* ***нулевым вектором (точкой)*** *пространства* R_n. *Полагают также, что* $(-1)\cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

Легко проверить выполнение для векторов n-мерного действительного (комплексного) пространства следующих свойств:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
2) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$;
3) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
4) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
5) из $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$ следует, что $\mathbf{y} = \mathbf{z}$;
6) $\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y})$;
7) $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} = (\alpha + \beta)\mathbf{x}$;
8) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = \beta(\alpha\mathbf{x})$;
9) $1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Введенное понятие вектора является естественным обобщением изучавшихся в школьных курсах математики и физики векторов на плоскости и в трехмерном пространстве. В самом деле, рассмотрим вектор на плоскости. Если поместить его начало в точку $(0,0)$, то координаты конца вектора однозначно определят как его модуль, так и направление, т.е. они полностью задают рассматриваемый вектор. Для таких векторов выполняются все указанные выше свойства 1-9.

*Множество E элементов **x**, **y**, **z**, … любой природы называют **линейным действительным (комплексным) множеством**, если для любых двух элементов **x**, **y** ∈ E в силу некоторого закона определен элемент **x** + **y** ∈ E, называемый их суммой, и если для любого действительного (комплексного) числа α и любого элемента **x** ∈ E определен также элемент α**x** ∈ E (**произведение** числа α на элемент **x**), и при этом выполняются свойства 3 - 9.*

Рассмотренное выше множество R_n является примером линейного множества. Другими примерами линейных множеств являются множество всех целых чисел, множество многочленов $P_n(x)=\sum_0^n a_k x^k$ степени не выше n, множество всех непрерывных на некотором отрезке [a, b] функций (действительных или комплексных).

Пусть заданы два многочлена $P_n(x)=\sum_0^n a_k x^k$, $Q_n(x)=\sum_0^n b_k x^k$ и произвольное действительное число α. Опираясь на рассмотренные в разделе 1 свойства действительных чисел, докажем, что для них справедливы свойства 3 и 6:

$$3)\quad P_n+Q_n=\sum_0^n a_k x^k+\sum_0^n b_k x^k=\sum_0^n\left(a_k x^k b_k x^k\right)=\sum_0^n\left(a_k+b_k\right)x^k=$$

$$=\sum_0^n\left(b_k+a_k\right)x^k=\sum_0^n b_k x^k+\sum_0^n a_k x^k=Q_n+P_n;$$

$$6)\quad \alpha P_n+\alpha Q_n=\alpha\sum_0^n a_k x^k+\alpha\sum_0^n b_k x^k=\sum_0^n\left(\alpha a_k x^k+\alpha b_k x^k\right)=$$

$$=\sum_0^n\alpha(a_k+b_k)x^k=\alpha\sum_0^n(a_k+b_k)x^k=\alpha\left(\sum_0^n a_k x^k+\sum_0^n b_k x^k\right)=\alpha(P_n+Q_n).$$

Аналогично можно убедиться в выполнении остальных свойств, а также, используя свойства комплексных чисел, которые изучаются в курсе алгебры и геометрии, доказать выполнение свойств 3 - 9 для многочленов в случае комплексных α и β.

Рассмотрим теперь другой пример. Пусть действительные функции f(x), g(x) и q(x) непрерывны на отрезке [a, b] и α, β - произвольные действительные числа. Докажем, что тогда в любой точке ξ отрезка [a, b] выполняются свойства 4 и 7. В самом деле, поскольку f(ξ), g(ξ) и q(ξ) - действительные числа, то из свойств действительных чисел следует:

$$\left(f(\xi)+g(\xi)\right)+q(\xi)=f(\xi)+\left(g(\xi)+q(\xi)\right);$$
$$\alpha f(\xi)+\beta f(\xi)=(\alpha+\beta)f(\xi).$$

Поскольку указанные равенства выполняются в каждой точке отрезка [a, b], то мы можем сделать вывод, что на этом отрезке выполняются свойства 4 и 7, то есть:

$$(f(x) + g(x)) + q(x) = f(x) + (g(x) + q(x)),$$

и

$$\alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha + \beta)f(x).$$

Аналогично можно убедиться в выполнении остальных свойств, а также, используя свойства комплексных чисел, доказать выполнение свойств 3-9 для комплексных функций f(x), g(x) и q(x) и чисел α, β.

Примерами действительных множеств, которые не являются линейными, могут служить множество точек отрезка прямой, множество точек плоского квадрата и т.п. В указанных случаях сумма двух произвольных элементов и произведение элемента на действительное число могут не являться элементами рассматриваемого множества.

*Если R_n - есть действительное n-мерное пространство, то произвольным его точкам (векторам) **x** = $(x_1, \ldots, x_n)$ и **y** = $(y_1, \ldots, y_n)$ можно привести в соответствие число*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i , \qquad (16.2)$$

*называемое **скалярным произведением векторов x и y**.*

Например, скалярным произведением векторов **x** = (1, 3, -4, 2, -3) и **y** = =(-2, 3, -4, 2, 2) будет число a = **x**·**y** = $1\cdot(-2)+3\cdot 3-4\cdot(-4)+2\cdot 2-3\cdot 2 = 21$. Следует обратить внимание на то, что скалярное произведение определено для векторов одинаковой размерности.

Скалярное произведение двух векторов действительного пространства обладает следующими свойствами:

1) (**x**, **y**) = (**y**, **x**);
2) (**x**, **y**) есть линейная форма по x, то есть для любых векторов **x**, **y**, **z** и чисел α, β справедливо равенство:

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) ; \qquad (16.3)$$

3) (**x**, **x**) ≥ 0 для любого вектора **x**, причем из равенства (**x**, **x**) = 0 следует **x** = **0**.

В самом деле:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = (\mathbf{y}, \mathbf{x});$$

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} \beta y_i z_i = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(y, \mathbf{z});$$

$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, если хотя бы одна из величин x_i отлична от нуля, если же $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, то все $x_i = 0$ и $\mathbf{x} = 0$.

Понятие скалярного произведения можно ввести и для векторов комплексного пространства, но в этом случае формула 16.2 и свойства 1-3 будут записываться несколько иначе.

*Если E есть линейное действительное (комплексное) множество, и любым его двум элементам (обобщенным векторам) **x** и **y** приведено в соответствие число (**x**, **y**), обладающее свойствами 1 -3, то говорят, что E есть **линейное пространство со скалярным произведением**.*

Примером такого пространства может служить n-мерное действительное пространство R_n, в котором в соответствии с формулой 16.2 введено понятие скалярного произведения.

*Если E есть линейное множество элементов **x**, **y**, …, и каждому его элементу **x** приведено в соответствие число ||**x**||, удовлетворяющее сформулированным ниже свойствам 1 - 3, то говорят, что E есть **линейное нормированное пространство**, а число ||**x**|| называют **нормой** элемента **x**.*

1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ для любого $\mathbf{x} \in E$; из равенства $\|\mathbf{x}\| = 0$ следует, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}$ есть нулевой элемент линейного множества E.
2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ для любого $\mathbf{x} \in E$ и любого числа α (комплексного или действительного в зависимости от того, будет ли E комплексным или действительным).

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, каковы бы ни были $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Часто норму вектора вводят как арифметическое значение квадратного корня из скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$: $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$. Понятие нормы вектора во многих практически важных случаях совпадает с известным из школьного курса математики понятием модуля (абсолютной величины) вектора. В частности, эти понятия совпадают для рассматриваемых ниже евклидовых n-мерных пространств. Однако можно использовать и другие нормировки пространства, например: $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$, $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ $(1 \leq p < +\infty)$. На практике, неевклидовы нормировки применяют в случаях, когда компоненты исследуемых векторов в некотором смысле неоднородны. Такая неоднородность часто бывает связана с различной размерностью компонент. К примеру, термодинамическое состояние одного моля газа можно описать с помощью вектора, компонентами которого являются объем, давление и температура газа. В подобных случаях

использование евклидовой нормировки пространства состояний может оказаться неудобным. Более подробно соотношение между понятиями нормы и модуля вектора будет рассматриваться в курсе функционального анализа.

Если E есть действительное линейное пространство со скалярным произведением, **x** и **y** - два его произвольных элемента, то можно показать, что для них будут справедливы следующие неравенства:

$$||(\mathbf{x}, \mathbf{y})|| \le (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}, \qquad (16.4)$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})^{1/2} \le (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} + (\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}. \qquad (16.5)$$

Неравенство 16.4 называют **неравенством Буняковского**.

*n-мерное пространство R_n, в котором введено скалярное произведение, а вместе с ним и норма для любого вектора **x**, называют **евклидовым n-мерным пространством**.*

Пусть E есть множество действительных чисел t. Если каждому $t \in E$ *в силу определенного закона приведен в соответствие вектор*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \qquad (16.6)$$

*то будем говорить, что этим определена **вектор-функция** **x**(t) на множестве E.*

Функции α(t), приводящие в соответствие каждому числу $t \in E$ *число α(t), называют **скалярными функциями**.*

*Будем говорить, что вектор-функция **x**(t) имеет в точке t_0 **предел,** равный вектору **y** = $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, и писать*

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{y} \quad (t \to t_0), \qquad (16.7)$$

если

$$\lim_{t \to t_0} ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(t)|| = 0, \qquad (16.8)$$

или, что эквивалентно (16.8), если

$$\lim_{t \to t_0} x_j(t) = y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (16.9)$$

Из 16.9 следует, что в случае, когда предел (16.7) существует, все компоненты $x_j(t)$ вектора $\mathbf{x}(t)$ определены в некоторой окрестности точки $t = t_0$.

*По определению, вектор-функция **x**(t) имеет правый (левый) предел в точке t_0, равный **y** = $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если*

$$||\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}|| \to 0 \quad \text{при } t \to t_0,\ t > t_0\ (t < t_0).$$

Эти пределы обозначают, соответственно:

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0 + 0); \qquad \lim_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0 - 0).$$

Легко проверить, что $\mathbf{x}(t_0 \pm 0) = (x_1(t_0 \pm 0), \ldots, x_n(t_0 \pm 0))$. При этом из существования стоящих в левой части векторных пределов следует существование всех стоящих в правой части пределов компонент вектора, и наоборот, если существуют пределы всех компонент вектора, то существует и стоящий в левой части предел вектор-функции.

Вектор-функция ***x(t)*** ***непрерывна***, ***непрерывна слева*** *или* ***непрерывна справа***, *если существуют, соответственно, пределы* $\lim\limits_{t\to t_0}$ ***x(t)***, ***x***$(t_0 - 0)$ *или* ***x***$(t_0 + 0)$, *равные* ***x***(t_0).

Основываясь на определении вектор-функции и свойствах непрерывности функций одной переменной, легко доказать, что **вектор-функция** $\mathbf{x}(t)$ **непрерывна в точке** $t = t_0$ **тогда и только тогда, когда существуют** $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{x}(t_0 - 0)$ и $\mathbf{x}(t_0 + 0)$, и при этом $\mathbf{x}(t_0 - 0) = \mathbf{x}(t_0 + 0) = \mathbf{x}(t_0)$.

17. Производная вектор-функции

Производной вектор-функции ***x****(t) в точке t называют предел*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{x}(t+h)-\mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta\mathbf{x}}{h}, \qquad (17.1)$$

если таковой существует.

Производной порядка m вектор-функции ***x****(t) называют производную от производной порядка m - 1:*

$$\frac{d^m\mathbf{x}}{dt^m} = \frac{d}{dt}\frac{d^{m-1}\mathbf{x}}{dt} \quad (m = 1, 2, \ldots). \qquad (17.2)$$

Очевидно, что из существования производной вектор-функции порядка m следует существование производных порядка m для всех ее компонент. Можно также показать, что если все компоненты вектор-функции имеют производные порядка m, то и сама вектор-функция также имеет производную порядка m.

Если $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ - вектор-функции, а $\alpha(t)$ - скалярная функция, то справедливы следующие равенства:

$$\lim_{t\to t_0}[\mathbf{x}(t)\pm\mathbf{y}(t)] = \lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\mathbf{y}(t); \qquad (17.3)$$

$$\lim_{t\to t_0}[\alpha(t)\mathbf{x}(t)] = \lim_{t\to t_0}\alpha(t)\lim_{t\to t_0}\mathbf{x}(t); \qquad (17.4)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\pm\mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}\pm\frac{d\mathbf{y}}{dt}; \qquad (17.5)$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{x}\frac{d\alpha}{dt}. \qquad (17.6)$$

При непрерывном возрастании t на отрезке [a, b] (интервале (a, b)) точка, определяемая непрерывной вектор-функцией

$$\mathbf{x}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in R_n,$$

описывает некоторую траекторию (***годограф***) вектор-функции $\mathbf{x}(t)$. При этом возможна ситуация, когда точка возвращается в точку пространства R_n, которую она уже проходила при другом значении параметра t.

Вектор-функцию ***x****(t) называют* ***гладкой*** *на отрезке [a, b], если она непрерывна на этом отрезке и имеет на нем непрерывную и неравную нулю производную.*

Кривую Г называют ***гладкой*** *на отрезке [a, b], если ее можно задать при помощи гладкой вектор-функции.*

Пусть в пространстве, где определена прямоугольная система координат (x, y, z), задана гладкая вектор-функция

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad t \in (a, b).$$

На рис. 17.1 изображен годограф вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и отмечены две точки годографа A и B, которые являются концами векторов $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t + \Delta t)$.

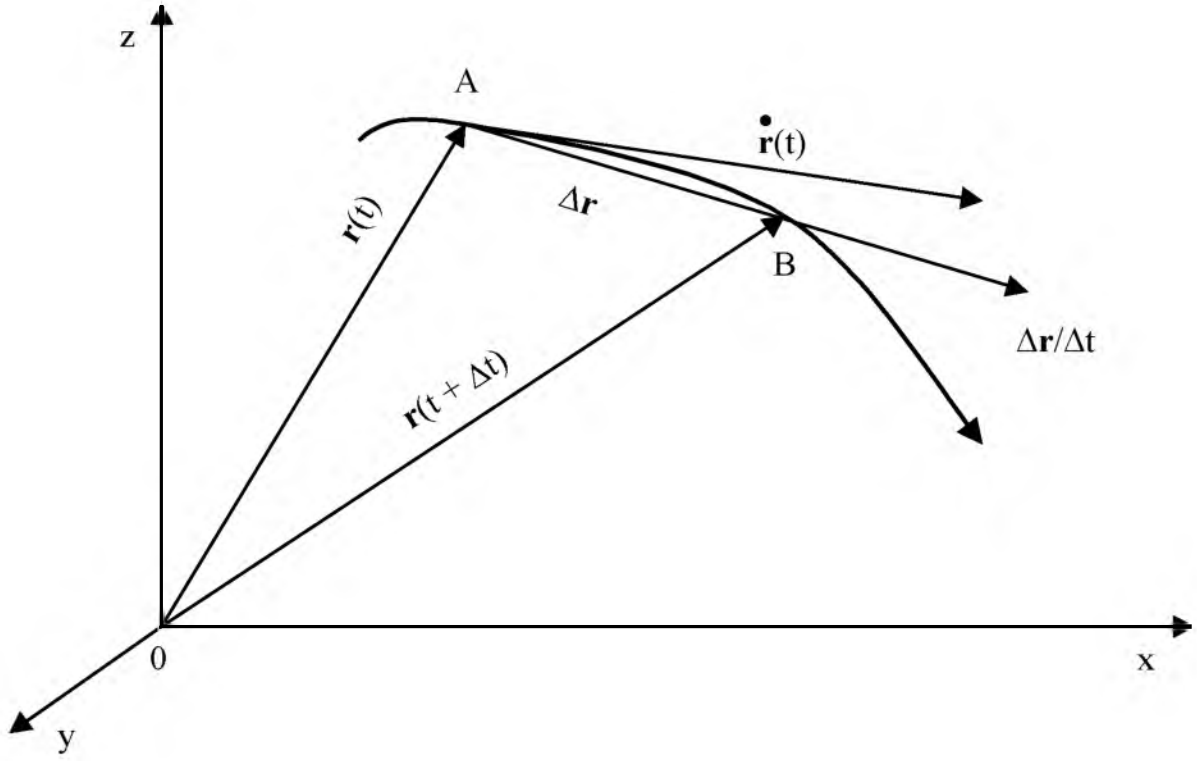


Рис. 17.1.

Вектор $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{AB} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. При $\Delta t \to 0$ точка B, двигаясь по годографу, стремится к точке A, а секущая (AB) стремится занять положение касательной к годографу в точке A. Поэтому вектор $\dot{\mathbf{r}} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ лежит на касательной к годографу в точке A.

Если t есть время, и конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает движение некоторой точки, то вектор $\dot{\mathbf{r}}(t)$ представляет собой скорость точки в момент времени t. Он указывает также направление движения точки в этот момент времени. Вектор $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ в этом случае является ускорением точки в момент времени t.

Пусть Γ есть непрерывная кривая

$$\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \quad (t \in [a, b]). \tag{17.7}$$

Разобьем отрезок [a, b] на части точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b. \qquad (17.8)$$

Им соответствуют точки $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ кривой Г. Соединив эти точки последовательно отрезками, как показано на рис. 17.2, получим ломанную $A_0A_1A_2\ldots A_n$, вписанную в кривую Г.

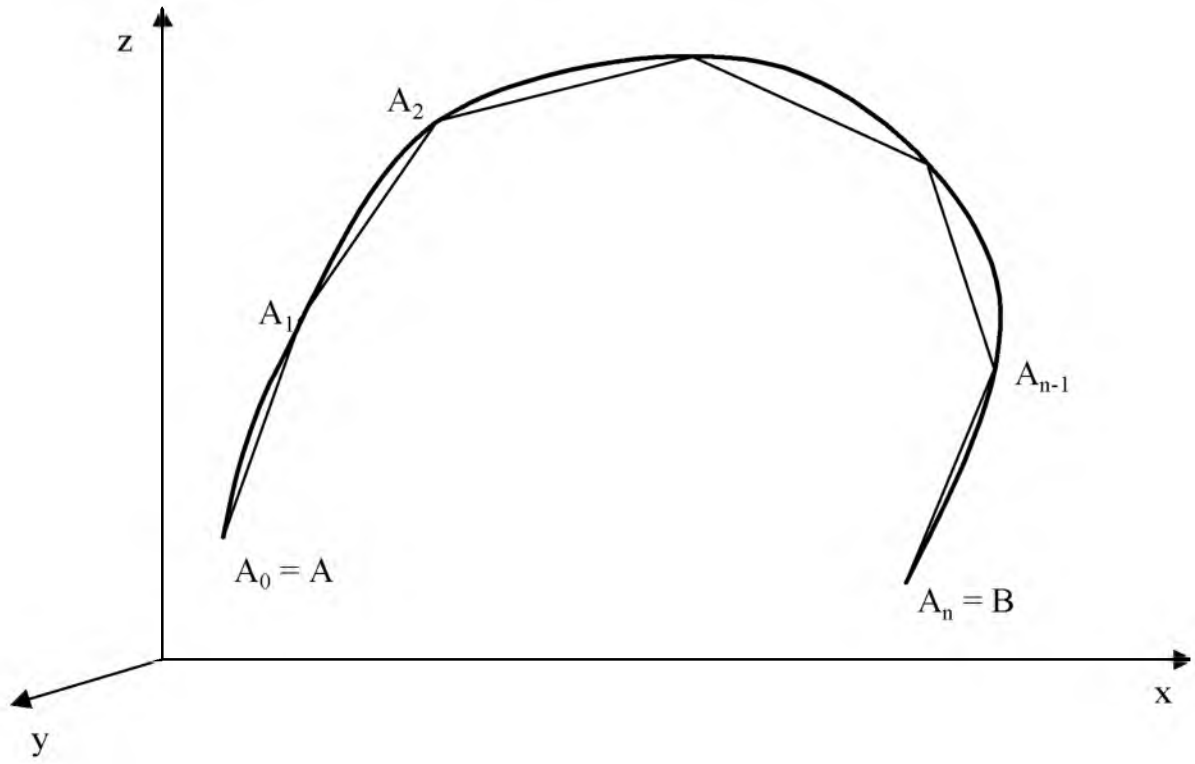


Рис. 17.2.

Длиной кривой *Г называют предел, к которому стремится сумма длин звеньев полученной ломаной, когда максимальный частичный отрезок разбиения* $[t_{n-1}, t_n]$ *стремится к нулю:*

$$|\overset{\cup}{AB}| = \lim \sum_{1}^{n} |A_{n-1}A_n|, \quad \max(t_n - t_{n-1}) \to 0. \qquad (17.9)$$

При изучении интегрального исчисления будет показано, что длина дуги является инвариантом и не зависит от выбора параметра t, используемого для задания кривой.

Если предел 17.9 существует, то говорят, что кривая Г ***спрямляема*** *на отрезке [a, b] изменения параметра t.*

Пусть Г - гладкая кривая. Можно показать (это будет сделано в последующих разделах курса), что в этом случае кривая Г спрямляема на любом отрезке изменения параметра t, и длина ее дуги обладает свойством аддитивно-

сти, то есть для любых трех точек P_1, P_2, P_3 кривой Γ, соответствующих значениям параметра $t_1 < t_2 < t_3$, справедливо равенство:

$$\left|\overset{\smile}{P_1P_3}\right| = \left|\overset{\smile}{P_1P_2}\right| + \left|\overset{\smile}{P_2P_3}\right| .$$

Введем новую функцию s = F(t), равную длине дуги $\overset{\smile}{AC}$, соответствующей изменению параметра t на отрезке [a, t]. При изучении интегрального исчисления будет доказано, что эта функция на отрезке [a, b] непрерывна и имеет непрерывную производную

$$F'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} > 0 . \qquad (17.10)$$

Кроме того, F(a) = 0. Поэтому s есть строго возрастающая функция, отображающая отрезок [a, b] изменения параметра t на некоторый отрезок [0, l] изменения функции s. Существует также обратная к s функция

$$t = \Lambda(s) \quad (0 \le s \le l),$$

непрерывная и имеющая непрерывную производную $\Lambda'(s) > 0$. Поэтому s можно рассматривать в качестве одного из допустимых параметров гладкой кривой Γ. В таком случае:

$$x = \varphi(\Lambda(s));\ y = \psi(\Lambda(s));\ z = \chi(\Lambda(s)) \quad (0 \le s \le 1).$$

Пример. Пусть кривая Γ представляет собой траекторию движения тела в трехмерном пространстве и зависимость координат тела от времени описывается функциями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t) .$$

Тогда, используя 17.10, получаем известную из курса механики формулу для скорости тела:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} . \qquad (17.11)$$

Пусть τ есть произвольный допустимый параметр кривой Γ, связанный с t функциональной зависимостью $t = \lambda(\tau)$ и имеющий не равную нулю непрерыв-

ную производную. Тогда знак производной $\frac{ds}{d\tau} = \lambda'(\tau)\frac{ds}{dt}$ определяется знаком $\lambda'(\tau)$:

$$\frac{ds}{d\tau} = \lambda'(\tau)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} = \pm\sqrt{[\varphi_1'(\tau)]^2 + [\psi_1'(\tau)]^2 + [\chi_1'(\tau)]^2}\,, \tag{17.12}$$

где

$$x = \varphi_1(\tau) = \varphi(\lambda(\tau));\ \ y = \psi_1(\tau) = \psi(\lambda(\tau));$$
$$z = \chi_1(\tau) = \chi(\lambda(\tau));\ \ \tau \in (c,d)\ -$$

уравнения кривой Г, выраженные через параметр τ, а знак перед корнем определяется возрастанием или убыванием функции $s(\tau)$. Отсюда получаем, что для гладкой кривой величина

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,. \tag{17.13}$$

Знак перед корнем в этом выражении определяется знаком приращения $d\tau$ и характером зависимости $s(\tau)$, т.е. ее возрастанием или убыванием.

Положим, $\tau = s$. Это можно сделать, поскольку в качестве τ мы можем выбрать любой допустимый параметр кривой Г, а длина дуги s является одним из ее допустимых параметров. Будем также полагать для определенности, что $s = 0$ при $t = a$ и что s возрастает с ростом t. Тогда:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \frac{ds}{ds} = 1\,. \tag{17.14}$$

Рассмотрим гладкую кривую (рис. 17.4), заданную вектором $\mathbf{r}(t)$ в пространстве, где определена прямоугольная декартова система координат (x, y, z). Будем полагать, что длина дуги s растет вместе с возрастанием параметра t.

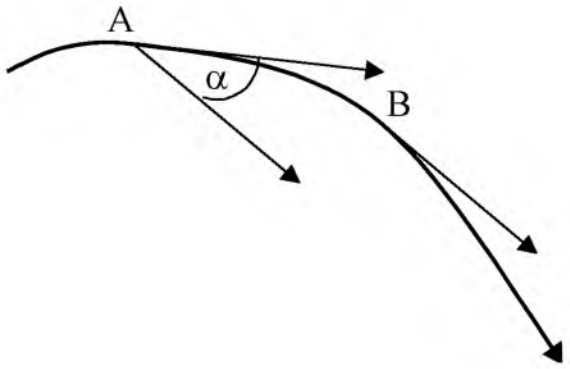


Рис. 17.3

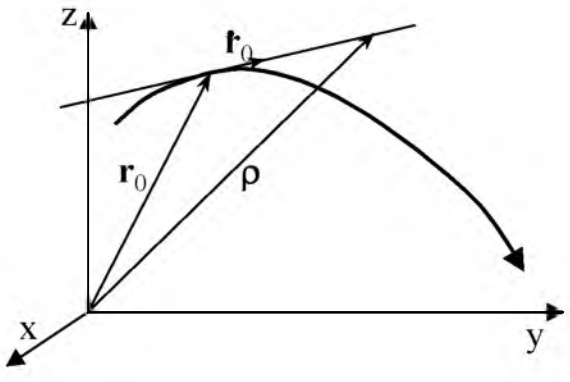


Рис. 17.4

Пусть $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ и $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$. Поскольку вектор $\dot{\mathbf{r}}_0$ имеет направление касательной к рассматриваемой кривой в точке $\mathbf{r}_0$ (т.е. при $t = t_0$), то уравнение касательной будет иметь вид

$$\varrho = \mathbf{r}_0 + u\dot{\mathbf{r}}_0, \qquad (17.15)$$

где u – произвольное число (текущий параметр касательной). В декартовых координатах уравнение (17.15) принимает вид:

$$x - x_0 = ux'_0;\ y - y_0 = uy'_0;\ z - z_0 = uz'_0,$$

или

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0} = u. \qquad (17.16)$$

Углы α, β, γ, которые положительное направление касательной (направление вектора $\dot{\mathbf{r}}_0$) образует с положительными направлениями осей координат x, y, z, определяются выражениями:

$$\cos\alpha = \frac{x'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_0,$$
$$\cos\beta = \frac{y'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_0, \qquad (17.17)$$
$$\cos\gamma = \frac{z'_0}{\sqrt{x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0}} = \left(\frac{dz}{ds}\right)_0,$$

где обозначение $\left(\frac{dx}{ds}\right)_0$ означает, что берется значение производной для $s = s_0$, соответствующее $t = t_0$.

Для плоской кривой, помимо касательной, можно также ввести понятие нормали к кривой. ***Нормалью к плоской кривой Г в точке t_0*** *называют прямую, которая лежит в плоскости кривой и проходит через точку t_0 перпендикулярно касательной к кривой Г в этой точке.*

В некоторых случаях бывает важно различать направления вдоль нормали. Положительное направление нормали **N** принято выбирать так, чтобы угол, образованный направлением касательной **T**, идущим в сторону возрастания t, и **N,** можно было непрерывным перемещением в плоскости кривой совместить с координатным углом так, что **T** будет совпадать с положительным направлением оси Ox, а **N** – с положительным направлением оси Oy.

Кривизной окружности *радиуса R называют величину, равную 1/R.* Понятие кривизны можно обобщить на случай произвольной кривой.

Рассмотрим гладкую кривую Γ (рис. 17.3). Она спрямляема, поэтому можно говорить о длине любой ее дуги $\overset{\smile}{AB}$.

Угол α $(0 \le \alpha \le \pi)$ *между положительными направлениями касательных к дуге в ее крайних точках A и B называют* ***углом смежности дуги*** $\overset{\smile}{AB}$. Можно показать, что угол смежности α дуги, конечные точки которой заданы векторами $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(t+\Delta t)$, равен углу между векторами $\dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\dot{\mathbf{r}}(t+\Delta t)$.

Отношение угла смежности дуги $\overset{\smile}{AB}$ *к ее длине называют* ***средней кривизной дуги****.*

Для окружности это отношение равно:

$$\frac{\alpha}{s} = \frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{1}{R}.$$

Предел отношения угла смежности дуги $\overset{\smile}{AB}$ *к ее длине, когда последняя стремится к нулю* $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{|\Delta s|}$*, называют* ***кривизной*** *кривой Γ в точке A.* Из данного определения следует: $0 \le K \le +\infty$. *Обратную кривизне величину R = 1/K называют* ***радиусом кривизны*** *кривой Γ в точке A.* В отличие от окружности, для произвольной кривой значения ее кривизны и радиуса кривизны зависят от выбора точки кривой.

Можно показать, что в случае, когда радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ кривой Γ имеет в точке A вторую производную по t, то в этой точке кривизна Γ конечна. Если в качестве параметра t выбрать длину дуги s, то

$$K = \left|\ddot{\mathbf{r}}(s)\right|, \quad R = \frac{1}{\left|\ddot{\mathbf{r}}(s)\right|}. \qquad (17.18)$$

Пусть A = (x, f(x)) является точкой кривой Γ. *Точку O, лежащую на нормали к Γ в точке A на расстоянии R = 1/K от нее в сторону вогнутости Γ, называют* ***центром кривизны*** *Γ в точке A. Кривую γ, являющуюся геометрическим местом центров кривизны кривой Γ, называют* ***эволютой*** *кривой Γ. Саму кривую Γ называют* ***эвольвентой*** *кривой γ.*

Для эволюты и эвольвенты выполняются такие свойства:

1. Нормаль к эвольвенте в любой ее точке одновременно является касательной к эволюте.

2. Если A и O – есть соответственные точки эвольвенты Γ и эволюты γ, R-радиус кривизны Γ в точке A и σ – длина дуги γ, соединяющей O с некоторой неподвижной точкой этой кривой, то $\sigma' = \pm R'$.

Уравнение эволюты имеет вид:

$$\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} = R\boldsymbol{\nu}, \qquad (17.19)$$

где **r** и **ρ** – радиус-векторы точек A и O, соответственно, **ν** – единичный вектор нормали к кривой Γ в точке A, направленный в сторону выпуклости Γ.

Зададим кривую Γ, определяемую уравнением $y = f(x)$ $(x > N)$, где f – непрерывная для любого $x > N$ функция. Тогда произвольную точку этой кривой можно определить, задавая ее декартовы координаты $A = (x, f(x))$. Зададим также прямую $L: y = ax + b$, где a, b – константы. *Если расстояние от точки A до прямой L стремится к нулю при* $x \to +\infty$, *то прямую L называют* ***асимптотой*** *кривой Γ, соответствующей* $x \to +\infty$.

Если прямая $y = ax + b$ есть асимптота кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, то:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad (17.20)$$

и

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - ax \right] = b \ . \qquad (17.21)$$

Если хотя бы один из пределов (17.20) и (17.21) не существует, значит, кривая Γ не имеет асимптоты при $x \to +\infty$. Примерами функций, которые не имеют асимптот, могут служить парабола и синусоида.

Асимптота при $x \to -\infty$ определяется аналогично и имеет аналогичные свойства.

Если уравнение асимптоты функции при $x \to +\infty$ *или* $x \to -\infty$ *имеет вид* $y = b$, *где* b *– некоторая константа, то ее называют* ***горизонтальной асимптотой****. Если же уравнение асимптоты имеет вид* $y = ax + b \ (a \neq 0, b \neq 0)$, *то такую асимптоту называют* ***наклонной****.*

Горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$ имеет экспонента e^x.

Если на интервале (a, b) кривая Γ определяется уравнением $y = f(x)$, *где* $f(x)$ *– непрерывная на (a, b) функция, обладающая свойством*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty,$$

или свойством

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \pm\infty,$$

то прямую x = a (или, соответственно, прямую x = b) называют ***вертикальной асимптотой*** *функции f(x).*

Например, для гиперболы $y = \frac{1}{ax + b}$ вертикальной асимптотой будет прямая x = -b/a; для логарифмической функции $y = \log_a x$ - прямая x = 0; для функции $y = \operatorname{tg} ax$ вертикальными асимптотами будут прямые $x = \frac{\pi(2k + 1)}{2a} \left(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

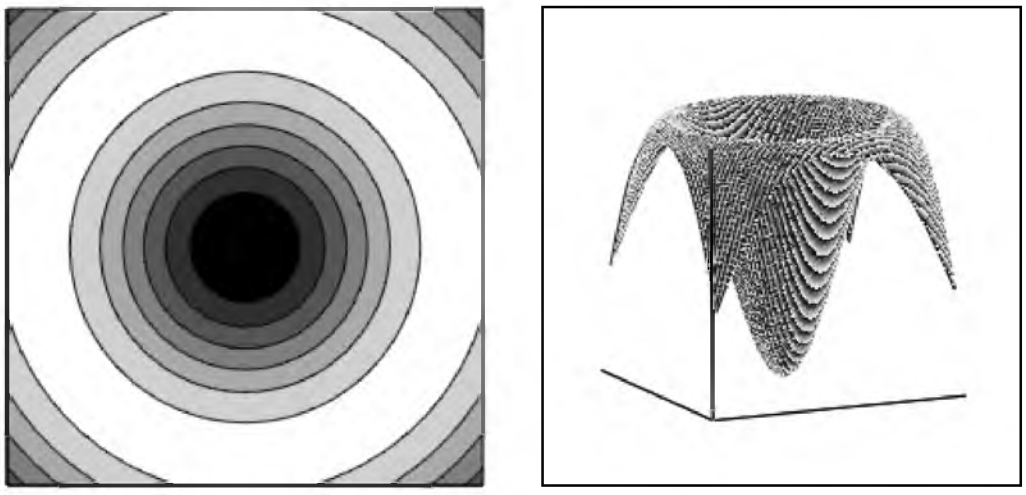
18. Функции многих переменных и их пределы

В этом и ряде последующих разделов мы рассмотрим основные свойства скалярных функций, зависящих не от одной, а от нескольких скалярных переменных. Учитывая данное в разделе 16 определение вектора, их часто называют также скалярными функциями векторного аргумента. Некоторые примеры таких функций были приведены в разделе 6. В литературе используют различные обозначения для функций многих переменных, например: $f(x,y,z)$ - функция от трех переменных x, y и z; $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - функция от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x^n$; $f(\mathbf{z})$ - функция векторного аргумента $\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_m)$, заданного в m-мерном пространстве. При большом числе переменных функцию задают формулой (в явном или неявном виде). Примерами такого задания функции могут быть:

$$f(x,y,z) = \frac{\exp(x^2 + y^2 + z^2)}{2xyz};$$

$$2 + 3xy - 5x + y^3 = \sin(f(x,y)).$$

Функцию многих переменных можно также задать таблицей, если число переменных не очень велико. Графический способ задания для функций многих переменных практически не используется, однако при исследовании функций двух (реже трех или четырех) переменных графики применяют для облегчения исследования функций. Наиболее часто график строят в виде изображения поверхности или линий уровня. Линия уровня – это линия, которая соединяет точки, в которых функция принимает равные значения.



f f

Рис. 18.1

На рис. 18.1 показаны изображения поверхности и линии уровня для функции $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2) \cdot \sin(x^2 + y^2)$.

Прежде чем перейти к описанию свойств функций многих переменных, введем ряд понятий. Пусть в n-мерном пространстве $R_n = R$ задана произвольная точка $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

Шаром (замкнутым шаром) *радиуса r с центром в точке* $\mathbf{x}^0$ *называют множество точек* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R$, *для которых выполняется неравенство* $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| = \left[\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - x_j^0\right)^2\right]^{1/2} \le r$. ***Открытым шаром*** *радиуса r с центром в точке* $\overrightarrow{x^0}$ *называют множество точек* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R$, *для которых выполняется неравенство* $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| < r$.

Легко заметить, что для изучаемых в школьном курсе элементарной математики евклидовых пространств R_2 и R_3 определения закрытого шара переходят в известные определения круга и (трехмерного) шара. Открытым шаром в пространстве R_2 будет являться круг, из которого удалены все точки окружности, которая имеет те же центр и радиус. В пространстве R_3 это будет шар, из которого удалили все точки сферы, имеющей те же центр и радиус.

Прямоугольником (замкнутым прямоугольником) *в пространстве R называют множество точек* $\mathbf{x} \in R$, *координаты которых удовлетворяют неравенствам* $a_j \le x_j \le b_j$ *(*$a_j < b_j$, *j = 1, 2, ..., n).* ***Открытым прямоугольником*** *в пространстве R называют множество точек* $\mathbf{x} \in R$, *координаты которых удовлетворяют неравенствам* $a_j < x_j < b_j$ *(*$a_j < b_j$, *j = 1, 2, ..., n).* В элементарной геометрии замкнутому прямоугольнику соответствуют плоский прямоугольник и прямоугольный параллелепипед.

Множество точек $\mathbf{x} \in R$, *координаты которых удовлетворяют неравенствам* $\left|x_j - x_j^0\right| \le a$ *или* $\left|x_j - x_j^0\right| < a$ *(j = 1, 2, ..., n), называют, соответственно,* ***кубом (замкнутым кубом)*** *или* ***открытым кубом*** *в R с центром в точке* $\mathbf{x}^0$ *и стороной длины 2a.* В элементарной геометрии замкнутому кубу соответствуют квадрат и (трехмерный) куб.

Сопоставляя определения куба и шара, легко увидеть, что все точки шара радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}^0$ одновременно принадлежат кубу с тем же центром и стороной 2r. С другой стороны, указанный шар содержит в себе все точки куба с тем же центром и стороной $2r/\sqrt{n}$.

Пусть E есть некоторое множество точек $\mathbf{x} \in R$. *По определению,* $\mathbf{x}^0$ *называется* ***внутренней точкой множества*** *E, если существует открытый шар с центром в* $\mathbf{x}^0$, *все точки которого принадлежат E.*

Произвольное множество E называется ***открытым****, если все его точки являются внутренними.* Примерами открытых множеств являются открытые шар, прямоугольник и куб.

Рассмотрим открытый шар радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{x}^0$. Пусть **y** - произвольная точка этого шара. Тогда, согласно определению, $\left|\mathbf{y}-\mathbf{x}^0\right|=\rho<r$. Построим открытый шар с центром в точке **y** с радиусом ε, удовлетворяющим условию $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\varepsilon<r-\rho$. Для любой точки **x** этого шара будет справедливо:

$$\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right|=\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\mathbf{x}^0\right|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+\left|\mathbf{y}-\mathbf{x}^0\right|<\varepsilon+\rho<r.$$

Таким образом, для любой точки **y** можно построить открытый шар с центром в ней, все точки которого принадлежат исходному шару. Отсюда следует, что произвольный открытый шар является открытым множеством.

Теорема 18.1. Пересечение двух открытых множеств есть открытое множество.

Доказательство. Пусть G_1 и G_2 – открытые множества и $\mathbf{x}^0\in G_1\cap G_2$. Поскольку $\mathbf{x}^0\in G_1$, существует открытый шар с центром в точке $\mathbf{x}^0$, который полностью принадлежит множеству G_1. Из того, что $\mathbf{x}^0\in G_2$, следует, что существует также открытый шар с центром в $\mathbf{x}^0$, который полностью принадлежит G_2. Их пересечением будет меньший из этих шаров, который, следовательно, полностью принадлежит и множеству G_1, и множеству G_2. Таким образом, существует открытый шар с центром в произвольной точке $\mathbf{x}^0\in G_1\cap G_2$, который полностью принадлежит $G_1\cap G_2$. Следовательно, $G_1\cap G_2$ является открытым множеством. ☺

Для пространства R_2 доказательство теоремы иллюстрирует рис. 18.2.

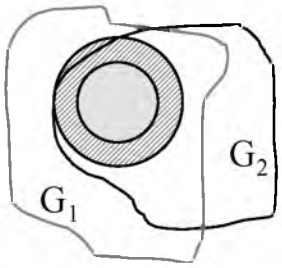


Рис. 18.2

Теорема 18.2. Объединение конечного или счетного числа открытых множеств является открытым множеством.

Доказательство этого утверждения следует из того, что любая точка полученного множества является одновременно точкой по крайней мере одного из объединяемых множеств, которое включает также и открытый шар с центром в этой точке. ☺

Пересечение счетного числа открытых множеств может не являться открытым множеством. Пусть, например, множества R_k есть шары $\left|\mathbf{x}\le 1/R_k\right|$ $\left(R_k=1,2,...\right)$. Пересечением этих шаров является множество $\{0\}$, ко-

торое состоит из единственного элемента – числа "0" (аналог леммы о вложенных отрезках). Это множество, очевидно, не является открытым, поскольку из определения следует, что открытое множество не может состоять только из одного элемента.

Окрестностью *точки* $\mathbf{x}^0 \in \mathrm{R}$ *называют произвольное открытое множество, которое содержит в себе эту точку.* Пересечение двух окрестностей точки $\mathbf{x}^0$ также является окрестностью $\mathbf{x}^0$.

Теорема 18.3. Если $\mathbf{x}^0$ есть внутренняя точка множества E, то существует окрестность $\mathbf{x}^0$, принадлежащая E.

Доказательство. Действительно, если $\overrightarrow{\mathrm{x}^0}$ является внутренней точкой множества E, то существует принадлежащий E открытый шар с центром в точке E, который и является искомой окрестностью. ☺

Множество E называют ***связным****, если любые две его точки* $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ *можно соединить принадлежащей E непрерывной кривой, т.е. если существует непрерывная вектор-функция* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathrm{t}),\ 0 \le \mathrm{t} \le 1$ *такая, что* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}';\ \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}'';\ \mathbf{x}(\mathrm{t}) \in \mathrm{E}$.

Отрезком $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{x}''}$ *называется кривая* $\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\mathbf{x}' + (1-\mathrm{t})\mathbf{x}'',\ \mathrm{t} \in [0,1]$, *очевидно, непрерывная и соединяющая точки* ***x'*** *и* ***x''***.

Множество E называется ***выпуклым****, если для любых двух точек* $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathrm{E}$ *множеству E принадлежит также и соединяющий их отрезок.*

Число A называют ***пределом функции*** $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ *в точке* $\mathbf{x}^0 = (\mathrm{x}_1^0, \mathrm{x}_2^0, \ldots, \mathrm{x}_n^0)$, *если функция f(**x**) определена на некоторой окрестности* $\mathbf{x}^0$, *за исключением, быть может, самой точки* $\mathbf{x}^0$, *и если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что* $|\mathrm{f}(\mathbf{x}) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ *для всех* ***x****, удовлетворяющих неравенствам* $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$. *Такие пределы называют также* ***n-кратными (двойными, тройными, ...) пределами****.*

Теорема 18.4 (Критерий Коши существования предела функции). Для того чтобы функция $\mathrm{f}(\mathbf{x})$ имела в точке $\mathbf{x}^0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлась такая окрестность $\cup(\mathbf{x}^0)$, чтобы для всех $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \cup(\mathbf{x}^0)$ и отличных от $\mathbf{x}^0$ было справедливо неравенство $|\mathrm{f}(\mathbf{x}') - \mathrm{f}(\mathbf{x}'')| < \varepsilon$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость сформулированного условия. Пусть $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{A}$. Тогда из определения предела следует существование такой окрестности $\cup(\mathbf{x}^0)$ точки $\mathbf{x}^0$, что для всех $\mathbf{x} \in \cup(\mathbf{x}^0)$ справедливо неравенство $|\mathrm{f}|(\mathbf{x}) - \mathrm{f}(\mathbf{x}^0) < \varepsilon/2$. Если точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \cup(\mathbf{x}^0)$, то:

$$\left|f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x}'')\right|=\left|f(\mathbf{x}')-f\left(\mathbf{x}^0\right)+f\left(\mathbf{x}^0\right)-f(\mathbf{x}'')\right|\le$$

$$\le\left|f(\mathbf{x}')-f\left(\mathbf{x}^0\right)\right|+\left|f\left(\mathbf{x}^0\right)-f(\mathbf{x}'')\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Теперь докажем достаточность условия.

Пусть для любых $\mathbf{x}',\mathbf{x}''\in\cup\left(\mathbf{x}^0\right)$ справедливо $\left|f(\mathbf{x}')-f(\mathbf{x}'')\right|<\varepsilon$. Составим последовательность $\left\{\mathbf{x}^k\right\}\to\left\{\mathbf{x}^0\right\}$, $\mathbf{x}^k\in\cup\left(\mathbf{x}^0\right)$. Согласно условию теоремы, для любой пары элементов этой последовательности справедливо: $\left|f\left(\mathbf{x}^{k'}\right)-f\left(\mathbf{x}^{k''}\right)\right|<\varepsilon$. Из критерия Коши существования предела последовательности следует, что любая полученная таким образом последовательность $\left\{f\left(\mathbf{x}^k\right)\right\}$ сходится к некоторому пределу. Если бы какие-либо две таких последовательности сходились к разным пределам, то из их элементов можно было бы составить последовательность, которая удовлетворяла бы условию Коши и при этом не имела предела. Это противоречит критерию Коши. Следовательно, все получаемые указанным способом последовательности $\left\{f\left(\mathbf{x}^k\right)\right\}$ сходятся к одному и тому же числу A. ☺

Пусть функция f(**x**) задана в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$, за исключением, быть может, самой точки $\mathbf{x}^0$, а также заданы произвольный единичный вектор $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$, $|\boldsymbol{\omega}|=1$ и неотрицательный скаляр $t\ge0$.

*Множество точек **x**, удовлетворяющих условию $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+\boldsymbol{\omega}t$, образуют **луч**, выходящий из точки $\mathbf{x}^0$ в направлении вектора ω.*

Для каждого вектора ω можно рассматривать функцию $f\left(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}\right)$, зависящую от одной переменной t. *Предел этой функции* $\lim\limits_{t\to0,t>0}f\left(\mathbf{x}^0+t\boldsymbol{\omega}\right)$, *если он существует, называют **пределом функции f(x) в точке x^0 по направлению вектора ω**.*

Если функция f(**x**) имеет в некоторой точке предел A, то она имеет в этой точке пределы по любому направлению, равные A. Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения предела функции. Обратное утверждение в общем случае неверно. Функция может иметь в некоторой точке пределы по всем направлениям, равные одному и тому же числу A, но не иметь в этой точке (обычного) предела.

Говорят, что $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}f(\mathbf{x})=\infty$, *если функция f определена в некоторой окрестности x^0 за исключением, быть может, самой точки x^0, и*

если для всякого N > 0 найдется $\delta > 0$ *такое, что* $|f(\mathbf{x})| > N$ *для всех* ***x****, удовлетворяющих условию* $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$ [1].

*Число A называют пределом функции f(**x**) при* $\mathbf{x} \to \infty$, *если для всякого положительного числа ε можно указать такое положительное число N, что для всех* ***x****, которые удовлетворяют условию* $|\mathbf{x}| > N$, *функция f определена, и справедливо неравенство* $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

Для пределов функций многих переменных справедливы многие свойства, которые ранее были доказаны для функции одной переменной. В частности:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\left[f(\mathbf{x}) \pm \varphi(\mathbf{x})\right] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x});$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\left[f(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x})\right] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x});$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}\left[f(\mathbf{x}) / \varphi(\mathbf{x})\right] = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) / \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}) \text{ при } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \varphi(\mathbf{x}) \neq 0.$$

<u>Теорема 18.5.</u> Если функция f имеет предел $A \neq 0$ **в точке** $\mathbf{x}^0$**, то существует такое** $\delta > 0$**, что для всех x, удовлетворяющих условию** $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$**, справедливо неравенство** $|f(\mathbf{x})| < |A|/2$**. При этом в указанной окрестности функция f сохраняет знак числа A.**

<u>Доказательство</u> этой теоремы студентам предлагается выполнить самостоятельно.

Наряду с рассмотренными выше n-кратными пределами при исследовании функций многих переменных используют также понятие ***повторных пределов***. Повторные пределы получают в результате ряда последовательных предельных переходов по каждому аргументу в отдельности, выполненных в заданном порядке. Их обозначают $\lim\limits_{x_1\to a_1}\lim\limits_{x_2\to a_2}\ldots\lim\limits_{x_n\to a_n} f(\mathbf{x})$. Записанный предел вычисляется в следующем порядке. Вначале находится функция

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \lim_{x_n\to a_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

затем – функция

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) = \lim_{x_{n-1}\to a_{n-1}} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

[1] Если сформулировать последнее условие как $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta$, то это будет предполагать, что $|f(\mathbf{x})| > N$, в частности, и при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$. Это противоречило бы тому, что в точке x^0 функция может быть не определена.

и.т.д. Последним вычисляют значение искомого предела:

$$A = \lim_{x_1 \to a_1} \varphi_{n-1}(x_1).$$

Значение повторного предела, вообще говоря, зависит от порядка выполнения предельных переходов. Пусть, например, $f(x,y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$. Тогда:

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0}(y - 1) = -1, \quad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0}(x + 1) = 1.$$

Возможна также ситуация, когда какие-то из повторных пределов существуют, а какие-то – нет. В частности, для функции $f(x,y) = x \cdot \sin\dfrac{1}{y}$ существует предел $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x,y) = 0$, но предел $\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$, а вместе с ним и $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$, не существует. Можно показать, что для функции двух переменных существует повторный предел $\lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x,y)$, равный двойному (конечному или бесконечному) пределу $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y)$, если последний существует, и если при любом допустимом значении y существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x,y)$. Если аналогичное условие выполняется и для предела $\lim\limits_{y \to b} f(x,y)$, то $\lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x,y) = \lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} f(x,y)$.

19. Непрерывность функций многих переменных

Функцию $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *называют* ***непрерывной в точке*** x^0, *если она определена в некоторой окрестности* $\cup(\mathbf{x}^0)$, *в том числе в самой точке* x^0, *и если* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$.

На рис. 19.1. показаны графики функций $f(x,y) = \dfrac{1}{e^{x+y} + e^{-x-y}}$ и $g(x,y) = \dfrac{1}{x - y}$.

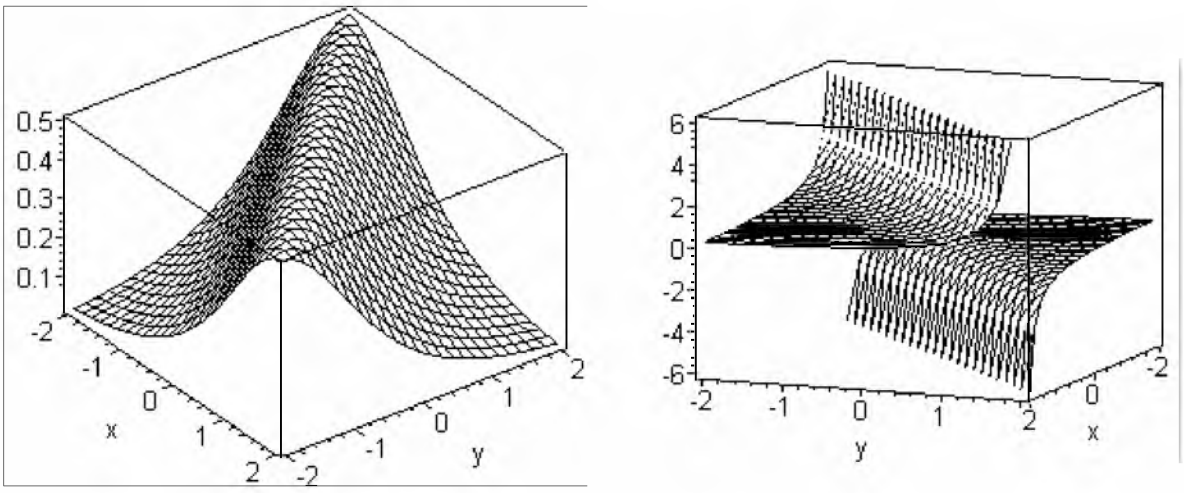


Рис. 19.1

Первая из этих функций является непрерывной на R_2. Для произвольной точки $A = (x^0, y^0)$:

$$\lim_{(x,y)\to A} f(x,y) - f(x^0,y^0) = \lim_{(x,y)\to A} \left| f(x,y) - f(x^0,y^0) \right| = 0.$$

Действительно:

$$\Delta f = f(x,y) - f(x^0,y^0) = \frac{1}{e^{x+y} + e^{-x-y}} - \frac{1}{e^{x^0+y^0} + e^{-x^0-y^0}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha e^{x^0+y^0} + \beta e^{-x^0-y^0}} - \frac{1}{e^{x^0+y^0} + e^{-x^0-y^0}},$$

где $\alpha = e^{\Delta x+\Delta y}$, $\beta = e^{-\Delta x-\Delta y}$, $\alpha,\beta \to 1$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta y^2} \to 0$.

$$\Delta f = \frac{e^{x^0+y^0}(1-\alpha)+e^{-x^0-y^0}(1-\beta)}{\left(\alpha e^{x^0+y^0}+\beta e^{-x^0-y^0}\right)\left(e^{x^0+y^0}+e^{-x^0-y^0}\right)}.$$

При $\rho \to 0$ знаменатель полученного выражения стремится к конечному числу $\left(\alpha e^{x^0+y^0}+\beta e^{-x^0-y^0}\right)^2$, а его числитель – к нулю. Соответственно, величина $\Delta f \to 0$ при $\rho \to 0$, что и доказывает непрерывность функции $f(x,y)=\dfrac{1}{e^{x+y}+e^{-x-y}}$ в произвольной точке $(x^0,y^0)\in R_2$.

Функция $g(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ не определена в точках вида x = y. Поэтому она не является в этих точках непрерывной. В остальных точках, т.е. при $x^0 \neq y^0$, $B=(x^0,y^0)\in R_2$:

$$\lim_{(x,y)\to B}\left[g(x,y)-g(x^0,y^0)\right]=\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x^0-y^0}=\frac{x^0-x-y^0+y}{(x-y)(x^0-y^0)}\to 0,$$

т.е. $\lim\limits_{(x,y)\to B} g(x,y)=g(x^0,y^0)$, следовательно, функция g(x, y) в этих точках непрерывна.

Приращением функции *f в точке* $\mathbf{x}^0$*, соответствующим приращению* $\mathbf{h}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n)$ *ее аргументов, называют величину* $\Delta_h f(\mathbf{x}^0)=f(\mathbf{x}^0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}^0)$.

На практике, при изучении характеристик реальных систем и процессов, на которые могут влиять несколько различных параметров, часто строят зависимости исследуемой характеристики от одного параметра, фиксируя при этом некоторые постоянные значения остальных параметров.

Приращением функции f в точке $x \in G$ ***по переменной*** x_j ***с шагом h*** *называют величину*

$$\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x}) = f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x_j+h,x_{j+1},\ldots,x_n)- \\ -f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\ldots,x_n), \qquad (19.1)$$

где h – действительное число, достаточно малое, для того чтобы величина (19.1) имела смысл.

Позднее будет показано, что это понятие является важным и находит широкое применение не только в практических приложениях, но и в теории функций многих переменных.

Теорема 19.1. Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке x^0 функций f(x) и φ(x) есть функция, непрерывная в точке x^0 (для частного – при дополнительном условии $\varphi(x^0)\neq 0$).

Доказательство непосредственно следует из определения непрерывности и свойств пределов. В самом деле:

$$\lim_{x\to x^0}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x^0}\left(f(x)\right)+\lim_{x\to x^0}\varphi(x)=f(x)+\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x^0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x^0}\left(f(x)\right)\cdot\lim_{x\to x^0}\varphi(x)=f(x)\cdot\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x^0}\left(f(x)/\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x^0}\left(f(x)\right)/\lim_{x\to x^0}\varphi(x)=f(x)/\varphi(x)\ \ (\varphi(x)\neq 0).\ \ ☺$$

Примерами непрерывных функций могут служить:

1) $f(x) = C = \text{const}$;
2) $P(x) = x_1^3 + 2x_2^3 - 3x_3^3 + 4x_1^2x_3 - 2x_2x_3^2 + 5x_1x_2x_3 - x_1x_3 + 4x_2 - 7$;
3) $\sin(2x_1 - x_2)+\cos(x_1x_2)$.

Рассмотрим в качестве примера произвольный многочлен второй степени от двух переменных x_1 и x_2:

$$Q(x)=a_{00}+a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{12}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{01}x_1x_2.$$

Его приращение:

$$\Delta_h Q(x)=a_{00}+a_{11}(x_1+\Delta x_1)+a_{21}(x_2+\Delta x_2)+a_{12}(x_1+\Delta x_1)^2+$$
$$+a_{22}(x_2+\Delta x_2)^2+a_{01}(x_1+\Delta x_1)(x_2+\Delta x_2)-a_{00}+a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{12}x_1^2+$$
$$+a_{22}x_2^2+a_{01}x_1x_2=a_{11}\Delta x_1+a_{21}\Delta x_2+a_{12}\Delta x_1^2+2a_{12}x_1\Delta x_1+a_{22}\Delta x_2^2+$$
$$+2a_{22}x_2\Delta x_2+a_{01}(x_1\Delta x_2+x_2\Delta x_1+\Delta x_1\Delta x_2).$$

Видно, что $\Delta_h Q(x)\to 0$ при $h\to 0$. Это означает, что многочлен Q(x) является непрерывной на R_2 функцией.

Теорема 19.2. Пусть функция f(x) непрерывна в точке x^0 пространства R_m. Тогда ее можно рассматривать также как функцию

$$F(x_1, x_2, ..., x_n)=f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

заданную в пространстве R_n (n > m). При этом функция F(x) будет непрерывной относительно x в любой точке вида

$$\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, ..., x_n^0\right),$$

где $x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, ..., x_n^0$ **- любые числа, для которых выполняется условие** $x_n^0 \in R_n$**.**

Доказательство. Запишем приращение функции $F(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$:

$$\Delta_h F\left(\mathbf{x}^0\right) = F\left(x_1^0 + h_1, ..., x_n^0 + h_n\right) - F\left(x_1^0, ..., x_n^0\right) =$$
$$= f\left(x_1^0 + h_1, ..., x_n^0 + h_n\right) - f\left(x_1^0, ..., x_n^0\right).$$

В силу непрерывности $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$ $\Delta_h f\left(\mathbf{x}^0\right) \to 0$ при $\mathbf{h} \to 0$. Но тогда и $\Delta_h F\left(\mathbf{x}^0\right) = \Delta_h f\left(\mathbf{x}^0\right) \to 0$ при $\mathbf{h} \to 0$. Следовательно, функция $F(\mathbf{x})$ также является непрерывной в точке $\mathbf{x}^0$. ☺

Теорема 19.3. Пусть функция f(x) непрерывна в точке $\mathbf{x^0}$ пространства $\mathbf{R_m}$ (точек x), а функции $\varphi_j(u)$ непрерывны в точке $\mathbf{u^0}$ пространства $\mathbf{R_n}$ (точек u). Пусть, кроме того, $\varphi_j(\mathbf{u}) = x_j^0$ $(j = 1, 2, ..., m)$**. Тогда функция** $F(\mathbf{u}) = f\left[\varphi_1(\mathbf{u}), \varphi_2(\mathbf{u}), ..., \varphi_m(\mathbf{u})\right]$ **непрерывна (по u) в точке $\mathbf{u^0}$.**

Доказательство. Поскольку функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$, для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| < \delta$, справедливо неравенство $\left|f(\mathbf{x}) - f\left(\mathbf{x}^0\right)\right| < \varepsilon$. Условие $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| < \delta$ может быть записано в виде $\left|x_j - x_j^0\right| < \delta'$ $(j = 1, 2, ..., m)$. В этом случае $\delta = \sup\left(\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right|\right) = \delta'\sqrt{m}$. В силу непрерывности функций φ_j в точке $\mathbf{u}^0$ пространства R_n существует такое $\eta > 0$, что для всех точек $\mathbf{u} \in R_n$ открытого шара $\left|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\right| < \eta$ справедливы неравенства:

$$\left|\varphi_j(\mathbf{u}) - \varphi_j\left(\mathbf{u}^0\right)\right| < \delta' \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Но тогда справедливо также и неравенство:

$$\left|F(\mathbf{u}) - F\left(\mathbf{u}^0\right)\right| = \left|f(\varphi_1(\mathbf{u}), \varphi_2(\mathbf{u}), ..., \varphi_n(\mathbf{u})) - f\left(\varphi_1\left(\mathbf{u}^0\right), \varphi_2\left(\mathbf{u}^0\right), ..., \varphi_n\left(\mathbf{u}^0\right)\right)\right| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{\mathbf{u} \to \mathbf{u}^0} F(\mathbf{u}) = F\left(\mathbf{u}^0\right),$$

что и требовалось доказать. ☺

Теорема 19.6 (первая теорема Вейерштрасса). **Если функция f(x) определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве G, то она ограничена на этом множестве, т.е. можно указать такие числа m и M, что**

$$m \le f(\mathbf{x}) \le M \quad (\mathbf{x} \in G).$$

Теорема 19.7 (вторая теорема Вейерштрасса). **Если функция f(x) определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве G, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней грани.**

Если для любого $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{x_0} \in G$ *и удовлетворяющих условию* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$, *выполняется неравенство* $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$, *то говорят, что функция f* ***равномерно непрерывна*** *на множестве G.*

Теорема 19.8 (Кантора). **Если функция f(x) непрерывна на некотором замкнутом множестве G, то она равномерно непрерывна на нем.**

Следствие. **Если функция f(x) непрерывна на некотором замкнутом множестве G, то для любого** $\varepsilon > 0$ **найдется** $\delta > 0$ **такое, что при произвольном разбиении G на замкнутые области** $G_1, G_2, \ldots, G_n$ **с диаметром меньшим δ, разность между наибольшим и наименьшим значениями функции в пределах каждой области будет меньше ε.**

Рассмотрим функцию $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \left(x^2+y^2>0\right), \\ 0 & \left(x^2+y^2=0\right). \end{cases}$

Она не является непрерывной в точке (0, 0), но непрерывна в этой точке, как по переменной x, так и по y, поскольку $f(x,0) \equiv f(0,y) \equiv 0$.

Точки разрыва могут быть не только изолированными, как в рассмотренном примере, но могут также образовывать некоторые линии, поверхности и т.п. Например, функция $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ имеет разрывы вдоль прямых $y = \pm x$; функция $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-4}$ - вдоль окружности $x^2+y^2=4$; точки разрыва функции $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{xy-z}$ образуют гиперболический параболоид $z = xy$, а точки разрыва функции $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$ - конус $z^2 = x^2+y^2$.

20. Дифференцирование функций многих переменных

Рассмотрим функцию f(**x**), которая определена и непрерывна на некотором открытом множестве $G \subset R_n$. Как было сказано в лекции 19, мы можем говорить о приращениях этой функции по любой из переменных $x_j \ (j = 1, 2, ..., n)$. В этом случае мы фактически сводим рассмотрение функции многих переменных к рассмотрению функции одной независимой переменной x_j. Это позволяет использовать введенное ранее понятие производной функции одной переменной для изучения функций многих переменных.

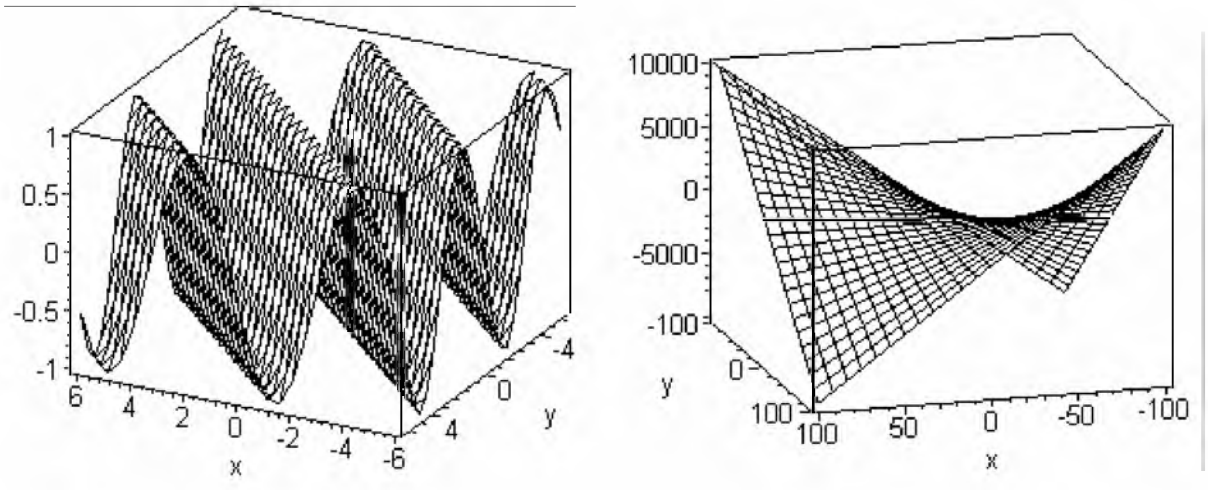
Частной производной функции f(x) в точке x по переменной x_j *называется предел*

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta_{x_j h} f(\mathbf{x})}{h} \quad (j = 1, 2, ..., n), \qquad (20.1)$$

если он существует.

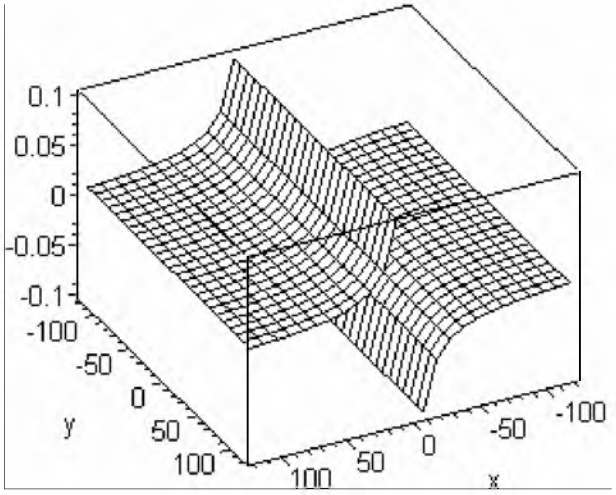
По своему смыслу частная производная есть обычная производная от функции f(**x**), рассматриваемой как функция одной переменной x_j при фиксированных значениях остальных независимых переменных $x_k \ (k \neq j)$.

Функция двух переменных f(x, y) в трехмерном пространстве изображается поверхностью, которая представляет собой геометрическое место точек (x, y, f(x, y)). На рис. 20.1 в качестве примера показан вид такой поверхности для функций: а - $f(x,y) = \sin(x+y)$, б - $f(x,y) = \cos(x-y) - xy$, в - $f(x,y) = 1/x$, г - $f(x,y) = x/y$.

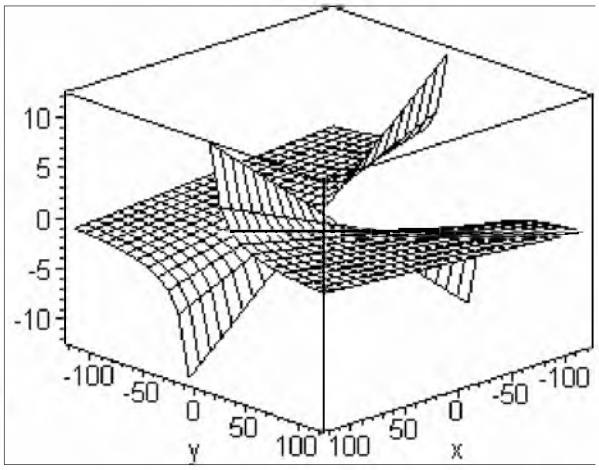


а б

Рис. 20.1.



в



г

Рис. 20.1

Геометрический смысл частной производной функции f(x, y) по переменной x в точке (x_0, y_0) заключается в том, что она представляет собой тангенс угла наклона к оси Ox касательной к сечению этой поверхности плоскостью $y = y_0$ в точке с абсциссой x_0.

Выражения вида

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, ..., n) \tag{20.2}$$

называют ***частными производными второго порядка*** *функции f(**x**).*

При $i = j$ их обозначают $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^{\,2}}$. Запись вида (20.2) означает, что сначала надо вычислить частную производную функции $f(\mathbf{x})$ по переменной x_j, а затем - производную результата по переменной x_i. Как будет показано позднее, во многих практически важных случаях порядок дифференцирования не влияет на результат. ***Частными производными третьего порядка*** *функции f(**x**) называют выражения вида* $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$.

Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x, y) = 2x^2y^3 + \exp(xy)$. Ее частные производные по переменным x и y равны, соответственно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 + y\exp(xy); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + x\exp(xy).$$

Вторые частные производные рассматриваемой функции равны:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4xy^3 + y\exp(xy)\right) = 4y^3 + y^2\exp(xy);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^2y^2 + x\exp(xy)\right) = 12x^2y + x^2\exp(xy);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2y^2 + x\exp(xy)\right) = 12xy^2 + \exp(xy) + xy\exp(xy);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4xy^3 + y\exp(xy)\right) = 12xy^2 + \exp(xy) + xy\exp(xy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ есть произвольный единичный вектор. В лекции 19 было введено понятие предела функции в точке по направлению произвольного вектора $\boldsymbol{\omega}$. Опираясь на него, можно ввести понятие производной функции по направлению вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Производной функции f(x) в точке x по направлению вектора $\boldsymbol{\omega}$ называют предел

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\omega}) - f(\mathbf{x})}{t}. \qquad (20.3)$$

В знаменателе левой части формулы (20.3) стоит вектор $\boldsymbol{\omega}$. Однако из курса алгебры и геометрии известно, что операция деления на вектор не определена. Здесь нет противоречия, поскольку левая часть выражения (20.3) является только обозначением производной функции по направлению вектора. Смысл этого обозначения раскрывается в правой части (20.3), откуда видно, что нахождение производной по направлению не предполагает деления на вектор.

Производная по направлению вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеет смысл правой производной функции $f(\mathbf{x} + t\boldsymbol{\omega})$, зависящей от одной переменной t, в точке t = 0.

Теорема 20.1. Если функция $u = f(\mathbf{x})$, заданная на открытом множестве $G \subset R_n$, имеет в точке x непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ по всем независимым переменным x_i, то ее приращение в этой точке, соответствующее достаточно малому приращению $(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$ независимых переменных, можно записать по формуле

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + o(\rho) \left(\rho \to 0, \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2} \right). \qquad (20.4)$$

Доказательство. Из определения непрерывности следует, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ определены в некоторой окрестности точки **x**. Рассмотрим приращение Δu в точке **x**, соответствующее приращению $(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$ независимых переменных, где $|\Delta x_i| < \delta$ и δ достаточно мало, для того чтобы точка $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)$ не выходила за пределы указанной окрестности. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) = \\
&= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) + \\
&+ f(x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, ..., x_n + \Delta x_n) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Согласно теореме Лагранжа о среднем, это приращение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \Delta x_1 + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) \Delta x_2 + ... + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n + \theta_n \Delta x_n) \Delta x_n \quad (0 < \theta_i < 1)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
&\Delta u = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, ..., x_n) + \varepsilon_1 \right] \Delta x_1 + \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, ..., x_n) + \varepsilon_2 \right] \Delta x_2 + ... + \left[\frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n) + \varepsilon_n \right] \Delta x_n .
\end{aligned}$$

Из непрерывности частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке **x** следует, что при $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2} \to 0$ все величины $\varepsilon_i \to 0$. Поэтому

$$\varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + ... + \varepsilon_n \Delta x_n = o(\rho) \quad (\rho \to 0).$$

Таким образом, мы получаем:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, ..., x_n)\Delta x_i + o(\rho) \ (\rho \to 0),$$

что и требовалось доказать. ☺

Выражение (20.4) можно записать в виде

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(\rho) \ (\rho \to 0), \qquad (20.5)$$

где A_i – числа, не зависящие от приращений Δx_i.

*Если приращение функции f(**x**) в точке **x** может быть записано в виде (20.5), то функцию называют **дифференцируемой** в точке **x**, а величину* $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ *- **главным линейным членом приращения** или **дифференциалом функции**, соответствующим приращениям* Δx_i *независимых переменных.* Дифференциал функции обычно обозначают следующим образом:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_n}. \qquad (20.6)$$

Теорема 20.2. Для того чтобы функция f(x) была дифференцируема в точке x, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные по всем переменным, и достаточно, чтобы она имела в ней непрерывные частные производные.

Доказательство. Достаточность существования непрерывных частных производных по всем переменным для дифференцируемости функции в точке непосредственно следует из теоремы 20.1, если учесть, что значения частных производных в точке являются некоторыми числами. Мы фактически уже использовали это условие при получении выражения (20.5).

Необходимость существования частных производных по всем переменным следует из сопоставления выражений (20.4) и (20.5). Сравнивая их, получаем:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + o(\rho) \ (\rho \to 0)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i . \qquad (20.7)$$

Равенство (20.7) должно выполняться при любых (достаточно малых) значениях приращений независимых переменных Δx_i. Из курса алгебры и геометрии известно, что это возможно лишь в том случае, когда $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. То есть, из дифференцируемости функции f(**x**) в некоторой точке следует существование в этой точке ее частных производных по всем независимым переменным. ☺

Таким образом, мы доказали необходимость существования частных производных для дифференцируемости функции. Однако существования частных производных по всем переменным недостаточно для того, чтобы можно было утверждать, что исследуемая функция дифференцируема в соответствующей точке.

Рассмотрим функцию:

$$f(x,y)=\begin{vmatrix} 0 \text{ при } (x,y)\in x=0;\ (x,y)\in y=0, \\ 1 \text{ при } (x,y)\in R_2;\ (x,y)\notin x=0;\ (x,y)\notin y=0. \end{vmatrix}$$

В точке (0, 0) эта функция имеет частные производные по переменным x и y, равные нулю. Однако для любого положительного числа δ, невозможно указать такое положительное число ε, чтобы для всех точек (x, y), удовлетворяющих условию $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, было справедливо неравенство $|f(x,y)|<\varepsilon$. Это означает, что предел функции f(x, y) в точке (0, 0) если и существует[1], то он не равен значению функции в этой точке. Поэтому рассматриваемая функция не является в точке (0, 0) непрерывной. Следовательно, она не может быть дифференцируемой в этой точке. В самом деле, согласно выражению (20.5), для дифференцируемой в точке (0, 0) функции мы могли бы записать:

$$f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y+o(\rho)=o(\rho)\ \left(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right).$$

Однако для одних и тех же значений ρ, двигаясь вдоль прямых x = 0 и x = y, мы получим разные значения функции: в первом случае f(x, y) = 0, а во втором – f(x, y) = 1. Следовательно, приращение рассматриваемой функции в точке (0, 0) не может быть записано по формуле (20.5), и функция не является в этой точке дифференцируемой.

Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & \text{в рациональных точках;} \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{vmatrix}$$

[1] Можно показать, что этот предел не существует.

В точке (0, 0) существует предел этой функции, равный нулю. Действительно, зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Неравенство

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| < \varepsilon \qquad (20.8)$$

выполняется для всех точек, удовлетворяющих условию $\rho^2 = x^2 + y^2 < \varepsilon$. То есть, можно указать такое $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, что для всех точек, для которых справедливо неравенство $0 < \rho < \sqrt{\varepsilon}$, будет выполняться и неравенство (20.8). Таким образом, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Следовательно, функция f(x, y) непрерывна в точке (0, 0). Во всех остальных точках рассматриваемая функция разрывна.

В точке (0, 0) она имеет частные производные по переменным x и y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\Delta y = 0.$$

Эти производные, очевидно, не являются непрерывными в точке (0, 0), поскольку в силу разрывности f(x, y) они не существуют в других точках. Кроме того, приращение функции в точке (0, 0)

$$\Delta f = \rho^2 = o(\rho) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\rho).$$

Следовательно, f(x, y) дифференцируема в точке (0, 0).

Из приведенных примеров видно, что наиболее сильным свойством функций нескольких переменных является наличие непрерывных частных производных, менее сильным - ее дифференцируемость в точке, и еще более слабое свойство – наличие в точке частных производных функции по всем переменным.

Из (20.4) следует, что приращение дифференцируемой функции двух переменных может быть записано в следующем виде:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\rho) = df + o(\rho) \quad \left(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0\right).$$

Ранее (раздел 12) было показано, что для функции одной переменной

$$\Delta f(x) = \frac{df}{dx}\Delta x + o(\Delta x) = df + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

т.е. при $\frac{df}{dx} \neq 0$ приращение функции $\Delta f(x) \approx df \ (\Delta x \to 0)$.

Для функций двух и большего числа переменных это в общем случае не так. Например, если выбрать $\Delta y = -\Delta x \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$, то $df \equiv 0$ и $\Delta f \equiv o(\rho)$. Для функции n (n > 1) переменных всегда можно выбрать приращения независимых переменных такими, что $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = 0$. В этом случае также $df \equiv 0$ и $\Delta f \equiv o(\rho)$. С другой стороны, соотношение приращений независимых переменных можно выбрать таким, чтобы свойство $\Delta f(x) \approx df \ (\Delta x \to 0)$ заведомо выполнялось. К примеру, если $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \ldots : \Delta x_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \ldots : \frac{\partial f}{\partial x_n}$, то дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_1 \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial f / \partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_1 \frac{\partial f / \partial x_n}{\partial f / \partial x_1} =$$

$$= \Delta x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{\partial f / \partial x_1} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \right) \right).$$

Приращение независимых переменных

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2} = \Delta x_1 \sqrt{1 + \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}}.$$

Таким образом, дифференциал df пропорционален приращению независимых переменных ρ. Следовательно, $o(\rho) \approx o(df)$ и $\Delta f \approx df$.

Рассмотрим поверхность S, описываемую функцией z = f(x, y), заданной в окрестности точки (x_0, y_0).

*Плоскость L_0 называют **касательной плоскостью** к поверхности S в точке $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, если расстояние $r(P, L_0)$ подвижной точки $P = (x, y, z) \in S$ до L_0 стремится к нулю быстрее расстояния ξ между точками P и P_0, т.е. если $r(P, L_0) = o(\xi) \ (\xi \to 0)$.*

Теорема 20.3. Если функция дифференцируема в точке $P_0 = (x_0, y_0)$, то описываемая ею поверхность имеет в этой точке касательную плоскость, определяемую уравнением

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0), \qquad (20.9)$$

и не имеет в ней других касательных плоскостей.

Символ $(\ )_0$ обозначает, что производная берется в точке P_0.

Доказательство. Будем считать, что функция f(x, y) дифференцируема в точке (x_0, y_0), S – изображающая ее поверхность, L_0 – плоскость, задаваемая уравнением (20.9). Произвольная точка $P \in S$ имеет координаты (x, y, f(x, y)). Используя получаемую в курсе алгебры и геометрии формулу расстояния от точки до плоскости, можно записать:

$$r(P, L_0) = \frac{\left| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 + 1}} =$$

$$= \frac{|\Delta f - df|}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 + 1}}.$$

Из дифференцируемости рассматриваемой функции в точке (x_0, y_0) следует, что числитель полученного выражения, а следовательно, и расстояние от точки P до плоскости L_0 $r(P, L_0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Расстояние между точками P и P_0

$$\xi = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + [f(x,y) - f(x_0,y_0)]^2} = \qquad (20.10)$$

$$= \sqrt{\rho^2 + [f(x,y) - f(x_0,y_0)]^2} \geq \rho.$$

Отсюда и получаем: $r(P, L_0) = o(\xi)$, что и доказывает первое утверждение теоремы.

Предположим, что существует другая касательная плоскость к поверхности S в точке P_0, описываемая системой

$$\begin{cases} A(x-x_0)+B(y-y_0)-C(z-z_0)=0, \\ A^2+B^2+C^2=1. \end{cases} \qquad (20.11)$$

Из определения касательной плоскости следует, что расстояние от произвольной подвижной точки $P=(x,y,z)\in S$ до L_0

$$r(P,L_0)=\frac{\left|C[f(x,y)-f(x_0,y_0)]-A(x-x_0)-B(y-y_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=o(\xi)\ \ (\xi\to 0),$$

следовательно:

$$C[f(x,y)-f(x_0,y_0)]-A(x-x_0)-B(y-y_0)=o(\xi)\ \ (\xi\to 0).$$

Учитывая дифференцируемость исследуемой функции в точке P_0 получаем:

$$\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\varepsilon\rho=df+o(\rho),$$
$$(\rho\to 0).$$

где $\varepsilon\to 0$ при $\rho\to 0$.

Из (20.10) имеем:

$$\xi=\sqrt{\rho^2+[f(x,y)-f(x_0,y_0)]^2}=\sqrt{\rho^2+\left(df+o(\rho)^2\right)},$$

откуда следует, что $\xi\to 0$ при $\rho\to 0$ (и, наоборот, $\rho\to 0$ при $\xi\to 0$, поскольку, согласно (20.10), $\xi\ge\rho$).

Таким образом:

$$C\left[f(x,y)-f(x_0,y_0)\right]-A(x-x_0)-B(y-y_0)=$$
$$=C\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+o(\xi)\right]-A(x-x_0)-B(y-y_0)=$$
$$=o(\rho)=o(\xi)\quad(\xi\to 0).$$

Положим $x=x_0$. Учитывая, что $C\cdot o(\xi)=o(\xi)$, получим:

$$C\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+o(\xi)=B(y-y_0)+o(\xi).$$

Переходя к пределу при $y \to y_0$, получаем $B = C\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$. Аналогично, полагая $y = y_0$, получим $A = C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$. При этом не может быть $C = 0$, поскольку в этом случае мы бы получили $A = B = C = 0$, что противоречит второму условию системы (20.11). Подставляя полученные значения в первое уравнение системы (20.11), получим уравнение касательной плоскости

$$C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + C\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) - C(z - z_0) = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) = (z - z_0),$$

что совпадает с (20.9). Это и доказывает единственность касательной плоскости, задаваемой уравнением (20.9). ☺

21. Производная сложной функции. Градиент функции

Теорема 21.1. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ **дифференцируема в точке** $(x_0, y_0, z_0) \in G \subset R_3$, **а функции** $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, **зависящие от скалярного аргумента t, имеют производную в точке** t_0. **Тогда производная сложной функции** $F(t) = u = f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]$ **может быть найдена по формуле**

$$F'(t) = \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (21.1)$$

Доказательство. Вследствие дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0, z_0) для любого достаточно малого приращения $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ справедливо:

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho) \quad \left(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0\right).$$

Тогда:

$$F'(t) = \frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}.$$

Последнее слагаемое в этом выражении равно нулю, поскольку из $\Delta t \to 0$ следует, что и $\rho \to 0$. Поэтому

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

что и требовалось доказать. ☺

Производная $F'(t) = f'[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]$ имеет смысл производной функции f вдоль кривой, задаваемой уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Теорема 21.2. Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0), то для нее имеет смысл производная (в этой точке) по направлению любого единичного вектора $\mathbf{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, определяемая формулой

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\ . \qquad (21.2)$$

Доказательство. Вектор **n** задает луч

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}t = (x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma).$$

Введем функции:

$$\begin{cases} \varphi(t) = x = x_0 + t\cos\alpha; \\ \psi(t) = y = y_0 + t\cos\beta; \\ \chi(t) = z = z_0 + t\cos\gamma. \end{cases}$$

Теперь условие доказываемой теоремы сводится к условию теоремы 21.1, и $\frac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dt} = \cos\gamma$. Отсюда получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

что и требовалось доказать. ☺

Вектор функцию

$$\nabla f \equiv \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \mathbf{i}_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \mathbf{i}_n\frac{\partial f}{\partial x_n}, \qquad (21.3)$$

*где $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ – единичные векторы, задающие направления координатных осей, называют **градиентом** функции f в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярной градиенту функции f в этой точке, если он не равен нулю, имеет вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_0 (z - z_0) = 0. \qquad (21.4)$$

Эта плоскость представляет собой геометрическое место (объединение) всех лучей, выходящих из точки (x_0, y_0, z_0), вдоль которых производная функ-

ции f равна нулю. Можно показать также, что эта плоскость является касательной плоскостью к поверхности

$$f(x,y,z)=A \quad (A=f(x_0,\ y_0,\ z_0))$$

в точке (x_0, y_0, z_0).

Из формулы 21.3, выбирая в качестве направления оси Ox направление некоторого единичного вектора **n**, легко получить, что производная функции f по направлению этого вектора равна проекции градиента f в соответствующей точке на направление вектора **n**:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } f = \text{grad}_{\mathbf{n}} f\ . \qquad (21.5)$$

Отсюда следует, что для любого вектора **n**

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \le |\text{grad } f|\ . \qquad (21.6)$$

Градиент функции обладает следующими свойствами.

1. Градиент всегда определен для функции, дифференцируемой в соответствующей точке.

2. Модуль градиента функции f равен максимальной величине ее производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ в соответствующей точке.

3. Если модуль градиента отличен от нуля, то он направлен в ту же сторону, что и вектор **n**, для которого производная $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ максимальна.

Теорема 21.3. Пусть на открытом множестве $G \subset R_2$ задана функция f(x, y). Если она имеет в некоторой точке $(x_0, y_0) \in G$ непрерывные смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, то они равны между собой в этой точке.

Доказательство. Для приращения функции при любых приращениях аргументов h можно записать:

$$\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{xh}\left[f(x,y+h)-f(x,y)\right] = \Delta_{xh} f(x,y+h) - \Delta_{xh} f(x,y) =$$
$$= f(x+h,y+h) - f(x,y+h) - f(x+h,y) + f(x,y) = \Delta_{yh} f(x+h,y) -$$
$$-\Delta_{yh} f(x,y) = \Delta_{yh}\left[f(x+h,y)-f(x,y)\right] = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f\ .$$

Поскольку производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ непрерывна в точке (x_0, y_0), то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки определены как она сама, так и производная $\frac{\partial f}{\partial y}$. Аналогично, в силу непрерывности в точке (x_0, y_0) производной $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, последняя, а также и производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ определены в некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

Приращение

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh} f = \Delta_{yh}\left[f(x+h, y) - f(x, y)\right]$$

или, с учетом теоремы Лагранжа о среднем,

$$\Delta_{yh}\Delta_{xh} f = \Delta_{yh} h f'_x(x + \theta_x h, y) = h^2 f''_{xy}(x + \theta_x h, y + \theta_y h),$$

где $0 < \theta_x < 1$ и $0 < \theta_y < 1$. Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{yh}\Delta_{xh} f}{h^2} = f''_{xy}(x, y).$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{xh}\Delta_{yh} f}{h^2} = f''_{xy}(x, y).$$

Но поскольку, как было показано выше, при любых h выполняется равенство $\Delta_{xh}\Delta_{yh} f = \Delta_{yh}\Delta_{xh} f$, то справедливо будет и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. ☺

Пусть дан целочисленный вектор $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ $(k_j \geq 0)$. *Говорят, что частная производная функции f* ***подчинена вектору k****, если для любых j = 1, 2, …, n при ее вычислении операция* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *применяется не более, чем* k_j *раз.*

Например, производная $\frac{\partial^7 f(x, y, z)}{\partial^3 x\, \partial^2 y\, \partial^2 z}$ подчинена вектору (3, 2, 2), так как при ее вычислении дифференцирование по переменной x выполняется не более трех раз, по переменным y и z – не более двух раз. Она подчинена также беско-

нечно большому числу других векторов вида $\mathbf{k} = (x_1, x_2, x_3)$, где x_1, x_2 и x_3 – целые числа, удовлетворяющие неравенствам $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 2$.

Теорема 21.4. Если все подчиненные вектору k частные производные функции $f(\mathbf{x})$ непрерывны в точке $\mathbf{x} \in R_n$, то в любой из них можно произвольно изменять порядок дифференцирования без изменения его результата.

Доказательство этой теоремы легко провести методом математической индукции, используя теорему 21.3.

Например, производная $\dfrac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y}$ подчинена вектору $\mathbf{k} = (1,1,2)$. Если она, а также все остальные частные производные функции f, подчиненные вектору **k**, непрерывны в некоторой точке (x_0, y_0, z_0), то в этой точке

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z} = \ldots = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial^2 z}.$$

22. Формула Тейлора. Экстремумы функции

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ задана на открытом множестве $\Omega \subset R_n$ и имеет на нем непрерывные частные производные любого требуемого порядка. Зафиксируем некоторую точку $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ и выберем $\delta > 0$ такое, чтобы все точки $\mathbf{x}$, удовлетворяющие условию $\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2} < \delta$, принадлежали Ω. Введем вспомогательную функцию $F(t) = f\left(\mathbf{x}^0 + t\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)\right)$, $t \in [0,1]$. Тогда: $F(0) = f\left(\mathbf{x}^0\right)$, $F(1) = f(\mathbf{x})$.

Согласно теореме о производной сложной функции, получаем:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\left[\mathbf{x}^0 + t\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)\right];$$

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\mathbf{x}^0\right).$$

Аналогично:

$$F''(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)\left(x_k - x_k^0\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\left(\mathbf{x}^0\right);$$

$$F^{(m)}(0) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n}\left(x_{i_1} - x_{i_1}^0\right)\left(x_{i_2} - x_{i_2}^0\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_{i_m} - x_{i_m}^0\right)\frac{\partial^m f\left(\mathbf{x}^0\right)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}.$$

Функцию $F(t)$ можно разложить по формуле Тейлора:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}F^{(k)}(0) + r_m(t), \quad r_m(t) = \frac{t^m}{m!}F^{(m)}(\theta t), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда получаем:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_k=1}^{n}\left(x_{i_1} - x_{i_1}^0\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_{i_k} - x_{i_k}^0\right)\frac{\partial^k f\left(\mathbf{x}^0\right)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}} + R_m(\mathbf{x}) \text{ - } \qquad (22.1)$$

формула Тейлора для функции n переменных;

$$R_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_m=1}^{n}\left(x_{i_1} - x_{i_1}^0\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_{i_m} - x_{i_m}^0\right)\frac{\partial^m f\left(\mathbf{x}^0 + \theta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right)\right)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}} \text{ - } \qquad (22.2)$$

остаточный член в форме Лагранжа.

В случае двух переменных:

$$f(x_1,x_2)=f\left(x_1^0,x_2^0\right)+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0\left(x_1-x_1^0\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0\left(x_2-x_2^0\right)\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}\right)_0\left(x_1-x_1^0\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)_0\left(x_1-x_1^0\right)\left(x_2-x_2^0\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}}\right)_0\left(x_1-x_2^0\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\,3}}\right)_0\left(x_1-x_1^0\right)^3+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\,2}\partial x_2}\right)_0\left(x_1-x_1^0\right)^2\left(x_2-x_2^0\right)+\right.$$

$$\left.+3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2^{\,2}}\right)_0\left(x_1-x_1^0\right)\left(x_2-x_2^0\right)^2+\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^{\,3}}\right)_0\left(x_2-x_2^0\right)^3\right]+\ldots\ .$$

Формула Тейлора разложения функции f(**x**) в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$f(\mathbf{x})=P_N(\mathbf{x})+o\left(\rho^N\right)\quad\left(\rho=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-x_j^0\right)^2\right]^{1/2}\to 0\right),\qquad(22.3)$$

где

$$P_N(x)=\sum_{|\mathbf{k}|\le N}a_k\left(x-x^0\right)^k;$$

$$a_k=a_{k_1\ldots k_n},\quad|\mathbf{k}|=\sum_{j=1}^{n}k_j,\quad\left(x-x^0\right)^k=\prod_{j=1}^{n}\left(x_j-x_j^0\right)^{k_j}.$$

При этом предполагается, что функция определена в некоторой окрестности $\Omega\subset R_n$ точки $\mathbf{x}^0$, и представление 22.3 имеет место для всех **x** из некоторого шара $\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right|<\delta$, принадлежащего Ω. Как и для случая функции одной переменной, можно доказать, что разложение функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности заданной точки является единственным.

Пусть на открытом множестве $\Omega\subset R_n$ задана функция f(**x**).

Говорят, что она достигает в некоторой точке $x^0\in\Omega$ *своего* ***(абсолютного) локального максимума****, если существует такое* $\delta>0$*, что для всех x, удовлетворяющих условию*

$$\left|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^0\right)^2}<\delta,$$

функция f(x) определена и справедливо неравенство

$$f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}^0) . \qquad (22.4)$$

Говорят, что функция f(x) достигает в некоторой точке $x^0 \in \Omega$ *своего* ***(абсолютного) локального минимума****, если существует такое* $\delta > 0$*, что для всех x, удовлетворяющих условию*

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2} < \delta,$$

функция f(x) определена и справедливо неравенство

$$f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x}^0) . \qquad (22.5)$$

Локальные максимумы и минимумы функции называют ***собственными****, если неравенства 22.4 и 22.5 выполняются строго. В противном случае их называют* ***несобственными****.*

Теорема 22.1. Если в некоторой точке x^0 функция f(x) имеет локальный экстремум, и в этой точке существуют ее частные производные первого порядка, то эти производные, а вместе с ними и градиент функции в точке x^0 равны нулю.

Доказательство. Рассмотрим частную производную

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(x_1,...,x_{i-1},x_i + \Delta x_i, x_{i+1},...,x_n\right) - f\left(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n\right)}{\Delta x_i}.$$

При фиксированных значениях всех переменных, кроме x_i, мы можем рассматривать $f(\mathbf{x})$ как функцию одной переменной $\varphi(x_i) = f(\mathbf{x})$. Если

$$x_1 = x_1^0;\ ...;\ x_{i-1} = x_{i-1}^0;\ x_{i+1} = x_{i+1}^0;\ ...;\ x_n = x_{n+1}^0,$$

то, в соответствии с данным выше определением, функция $\varphi(x_i)$ должна иметь локальный экстремум в точке x_i^0. Следовательно, согласно теореме Ферма, в точке $x_i = x_i^0$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{dx_i} = \frac{d\varphi(x_i)}{dx_i} = 0 .$$

Поскольку сказанное справедливо для любой из частных производных первого порядка, то

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{i}_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 + \mathbf{i}_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 + \ldots + \mathbf{i}_n\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 = 0\,. \ \text{☺}$$

Теорема 22.1 дает необходимое, но не достаточное условие существования локального экстремума. Возможна ситуация, когда градиент функции в некоторой точке равен нулю, но экстремум в этой точке отсутствует.

Точки, в которых градиент функции равен нулю, называют ***стационарными****.*

Для отыскания экстремумов функции многих переменных часто поступают следующим образом. Вначале находят все стационарные точки функции, решая векторное уравнение

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = 0$$

или эквивалентную ему систему скалярных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0\,, \\ \ldots\ldots\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0\,. \end{cases}$$

Затем проверяют, являются ли полученные решения точками экстремума. Проверяют также такие точки, в которых некоторые частные производные равны нулю, а некоторые не существуют, либо имеют бесконечные значения.

Как и для функций одной переменной, в стационарных точках функция может не иметь экстремумов. Однако для них возможны новые особенности поведения функции в стационарных точках. Например, для функции $f(x,y) = xy$ в точке $(0, 0)$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x = 0$. Однако эта точка не является экстремумом. В то же время в этой точке функция имеет так называемую седлообразную форму, т.е. по некоторым направлениям имеет в ней максимум, а по некоторым – минимум.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ имеет в окрестности $\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| < \delta$ непрерывные частные производные второго порядка, а ее первые частные производные в точке $\mathbf{x}^0$ равны нулю. Тогда в окрестности $\mathbf{x}^0$ можно записать следующее разложение $f(\mathbf{x})$ по формуле Тейлора:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{km}\xi_k\xi_m + \varepsilon\rho^2 = f(\mathbf{x}^0) + A(\xi) + \varepsilon\rho^2,$$

где $a_{km} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_m}\right)_0$, $\xi_k = x_k - x_k^0$, $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$.

Квадратичная форма $A(\xi)$ может обладать одним из следующих свойств.

1. $A(\xi) > 0$ для любых ξ. В этом случае $\mathbf{x}^0$ – точка локального минимума.

2. $A(\xi) < 0$ для любых ξ. В этом случае $\mathbf{x}^0$ – точка локального максимума.

3. $A(\xi) \geq 0$ или $A(\xi) \leq 0$, т.е. существует такая точка ξ', для которой $A(\xi) = 0$ при $\rho' > 0$. В этом случае локальный экстремум в точке $\mathbf{x}^0$ может существовать, а может отсутствовать. Можно утверждать лишь следующее: если $A(\xi) \geq 0$, то $\mathbf{x}^0$ не может быть точкой максимума, а при $A(\xi) \leq 0$ - точкой минимума.

4. Существуют такие ξ', что $A(\xi') > 0$, и такие ξ'', что $A(\xi') < 0$. В этом случае в точке $\mathbf{x}^0$ экстремума нет.

Приложение 1

Таблица значений C_n^k

Коэффициенты разложения бинома Ньютона широко используются в различных областях математики. Величина $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}(k \le n)$ называется числом сочетаний из n (различных) элементов по k (без повторений). Ниже приводится таблица значений коэффициентов C_n^k.

		k									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	1	1	1								
	2	1	2	1							
	3	1	3	3	1						
	4	1	4	6	4	1					
	5	1	5	10	10	5	1				
	6	1	6	15	20	15	6	1			
	7	1	7	21	35	35	21	7	1		
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
	9	1	9	37	84	126	126	84	37	9	1

Эта же таблица может быть представлена в следующем виде:

```
                    1
                  1   1
                1   2   1
              1   3   3   1
            1   4   6   4   1
          1   5   10  10  5   1
        1   6   15  20  15  6   1
      1   7   21  35  35  21  7   1
    1   8   28  56  70  56  28  8   1
```

Такое представление называют треугольником Паскаля. Он обладает рядом важных свойств. Все крайние (верхние и боковые) элементы треугольника являются единицами. Каждый из остальных элементов треугольника может быть получен как сумма двух его ближайших верхних соседей. Это позволяет легко находить значения элементов. Треугольник Паскаля обладает также симметрией относительно его вертикальной оси.

Приложение 2

Краткий русско-украинско-английский словарь математических терминов

абсолютный	абсолютний	absolute
абсцисса	абсциса	abscissa
аксиома	аксіома	axiom
алгебра	алгебра	algebra
анализ	аналіз	analysis
аналитический	аналітичний	analytic
аргумент	аргумент	argument
арифметика	арифметика	arithmetic
асимптота	асимптота	asymptote
ассоциативность	асоціативність	associative property, associativity
бесконечный	нескінченний	infinite
биномиальный	біноміальний	binomial
вектор	вектор	vector
величина	величина	quantity, magnitude; value
верхний	верхній	superior, upper
взаимно-однозначный	взаємно-однозначний	one-to-one
вложенный	вкладений	embedded
внутренний	внутрішній	internal, intrinsic, inner
внутренняя точка	внутрішня точка	inner point, interior point, tangent point
вогнутость	в(у)гнутість, увігнутість	concavity
возведение	піднесення	involution
возрастание	зростання	increase
выпуклость	опуклість, випуклість	convex
вычисление	обчислення	calculation
вычитание	віднімання	subtraction
геометрический	геометричний	geometrical
гладкость	гладкість	smoothness
годограф	годограф	locus
градиент	градієнт	gradient
граница	межа	bound, boundary, limit
грань	грань	bound
график	графік	plot
действительный	дійсний	real
деление	ділення	division
десятичный	десятковий	decimal

диаграмма	діаграма	diagram
диаметр	діаметр	diameter
дизъюнктивный	диз'юнктивний	disjunctive
дистрибутивность	дистрибутивність	distributivity
дифференцирование	диференціювання	differentiation
длина	довжина	length
доказательство	доведення	proving
дополнение	доповнення	complement
дробь	дріб	fraction
единичный	одиничний	unit
единственный	єдиний	single
зависимость	залежність	dependence
задавать	задавати	specify
знак	знак	sign
знаменатель	знаменник	denominator
значение	значення	value
извлечение	добування	extraction
изменение	зміна (змінювання)	change
инвариантный	інваріантний	invariant
интервал	інтервал	interval
иррациональный	ірраціональний	irrational
касательный	дотичний	tangent
квадратичный	квадратичний	quadratic
комбинация	комбінація	combination
коммутативность	комутативність	commutativity
комплексный	комплексний	complex
конечный	скінченний	finite
координата	координата	coordinate
корень	корінь	root
коэффициент	коефіцієнт	coefficient, factor
кривая	крива	curve
кривизна	кривизна	curvature
критерий	критерій	criterion
круг (*окружность*)	круг (*коло*)	circle
кусочно-гладкий	кусково-гладкий	piecewise-smooth, sectionally smooth
кусочно-непрерывный	кусково-неперервний	piecewise continuous, sectionally continuous
куб	куб	cube
левосторонний	лівобічний	left-side
лемма	лема	lemma
линейный	лінійний	linear
логарифм	логарифм	logarithm

локальный	локальний	local
ломанная	ламана	open polygon
максимум	максимум	maximum
математика	математика	mathematics
минимум	мінімум	minimum
многозначный	багатозначний	multivalued
множество	множина	set
монотонность	монотонність	monotony
мощность	потужність	potency, power
натуральный	натуральний	natural
неограниченный	безмежний	unlimited, unbounded
неопределенность	невизначеність	indeterminancy, indeterminacy, indeterminateness, indetermination
неотрицательный	невід'ємний	nonnegative
неположительный	недодатний	nonpositive
направление	напрям, напрямок	direction
непрерывность	неперервність	continuity
неравенство	нерівність	inequality, inequation
нечетный	непарний	odd
нижний	нижній	lower
норма	норма	norm
нормаль	нормаль	normal, perpendicular
область	область	domain
обобщение	узагальнення	extension
обозначать	позначати	denote, designate
образ	образ	image
обратный	зворотний, обернений	inverse, backward
объединение	об'єднання	sum, union
ограниченность	обмеженість	boundedness, finiteness
одновременно	одночасно	concurrently, simultaneously
однозначный	однозначний	single-valued
односторонний	односторонній	one-sided, unilateral
окрестность	окіл	neighborhood
окружность	коло	circumference, circle
операция	операція	operation
определение	означення, визначення	definition, determination
ордината	ордината	ordinate
остаток (ряда)	залишок (ряду)	residual (series)
открытый	відкритий	open
отношение	відношення, частка	relation, ratio

отображение	відображення	mapping
отрезок	відрізок	segment
отрицательный	від'ємний	negative
параллельно	паралельно	parallel
параметр	параметр	parameter
перегиб	перегин	inflection
переменная	змінна	variable
переместительный	переставний	commutative
пересечение	перетин, переріз	intersection, crossing
перечисление	перелічення, перелік, перерахування	enumeration
перпендикулярный	перпендикулярний	normal, perpendicular
периодический	періодичний	periodic
плоский	плоский	plain
площадь	площа	area
поверхность	поверхня	surface
подмножество	підмножина	subset
подпоследовательность	підпослідовність	partial sequence, subsequence
показательный	показниковий	exponential
положительный	додатний	positive
полуинтервал	півінтервал	half-interval
полуоткрытый	напіввідкритий	half-open
порядок	порядок	order, degree
последовательность	послідовність	sequence
постоянный	сталий, постійний	constant
постулат	постулат	postulate
правило	правило	rule
правосторонний	правобічний	right-side
предел	границя	limit
пример	приклад	example
принадлежать	належати	belong
приращение	приріст	increment
прогрессия	прогресія	progression
произведение	добуток	product
производная	похідна	derivative
произвольный	довільний	arbitrary
проколотый	проколений	deleted, pierced
пространство	простір	space
противоположный	протилежний	opposite
прямая	пряма	straight line, direct, forward
прямоугольный	прямокутний	rectangular

пустой	порожній	empty, null
равенство	рівність	identity, equality, equation
радикал	радикал	radical
радиус	радіус	radius
разбиение	розбиття	decomposition, partition
различный	відмінний, різний	different
разложение	розкладання, розвинення	decomposition
разность	різниця	difference
разрыв	розрив	break (in), discontinuity
раскрытие	розкриття	expansion, removal
распределительный	розподільний	distributive
рациональный	раціональний	rational
рекуррентный	рекурентний	recurrent
ряд	ряд	series
свойство	властивість	property
связность	зв'язність	connectedness, coherency, coherence
сегмент	сегмент	segment
симметрический, симметричный	симетричний	symmetric
система	система	system
скаляр	скаляр	scalar
следствие	висновок	corollary
сложение	додавання	addition, composition
сложный	складний	complex, complicated
смежность	суміжність	adjacency
совпадать	збігатися	coincide
содержать	містити	contain, include
соответствие	відповідність	correspondence, fitness
сочетательный	сполучний	associative
спрямляемый	спрямлюваний	rectifiable
степень	степінь	power
стремиться	прямувати	approach, go to, tend to
строгий	строгий	proper, steadily, strictly
сумма	сума	sum
суперпозиция	суперпозиція	superposition
сходимость	збіжність	convergence
счетный	злічений	denumerable
таблица	таблиця	table
теорема	теорема	theorem
теория	теорія	theory

тождество	тотожність	identical relation, identity, identity law
точка	точка	point
точный	точний	exact
транзитивность	транзитивність	transitivity
треугольник	трикутник	triangle
тригонометрия	тригонометрія	trigonometry
убывание	спадання	decrease
угол	кут	angle
удовлетворять	задовольняти	satisfy
умножение	множення	multiplication
упорядоченность	упорядкованість	ordering, orderliness, rank, ranking
уравнение	рівняння	equation
условие	умова	condition
формула	формула	formula
функция	функція	function
целый	цілий	integer, integral, whole
центр	центр	center
цифра	цифра	numerals
частная (производная)	частинна (похідна)	partial (derivative)
частное	частка	quotient, partial
четный	парний	even
число	число	number
шар	куля	full sphere, knob, orb, solid sphere, spherical solid
эвольвента	евольвента	evolvent
эволюта	еволюта	evolute
эквивалентность	еквівалентність	equivalence
экстремум	екстремум	extremum
элемент	елемент	component, element member
явный	явний	explicit

Приложение 3

Буквы латинского и греческого алфавитов

Буквы латинского алфавита

Буква		Название
Прописная	Строчная	
A	a	а
B	b	бэ
C	c	цэ
D	d	дэ
E	e	е
F	f	эф
G	g	гэ
H	h	ха
I	i	и
J	j	йот
K	k	ка
L	l	эль
M	m	эм
N	n	эн
O	o	о
P	p	пэ
Q	q	ку
R	r	эр
S	s	эс
T	t	тэ
U	u	у
V	v	вэ
W	w	дубль-вэ
X	x	икс
Y	y	игрек
Z	z	зэт

Буквы греческого алфавита

Буква		Название буквы
Прописная	Строчная	
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эпсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ	тхэта
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега

Приложение 4

Биографический справочник

В этом разделе приведены краткие сведения о тех ученых, чьи результаты упоминаются в лекциях, а также о выдающихся математиках, чья жизнь или творческая деятельность были связаны с Украиной.

Владимир Игоревич **Арнольд** (род. в 1937 г. в Одессе) - академик РАН, иностранный член Национальной АН США, Парижской АН, АН ГДР. Сын известного математика - педагога чл.-корр. АПН СССР И.В. Арнольда. Окончил Московский университет. Решил тринадцатую проблему Гильберта. Показал, что любая непрерывная функция трех переменных может быть сведена к суперпозиции непрерывных функций двух переменных. Внес большой вклад в развитие теории устойчивости динамических систем и теории особенностей дифференцируемых отображений.

Архимед (ок. 287 - 212 до н.э.) - древнегреческий математик, физик и механик. Родился и жил в Сиракузах. Разработал методы нахождения площадей поверхностей и объемов тел вращения, которые предвосхитили многие идеи дифференциального и интегрального исчисления. Одним из первых ученых использовал математические методы при решении задач физики и механики. Нашел сумму геометрической прогрессии. Показал, что не существует самого большого числа и создал систему наименований целых чисел. Построил планетарий, в котором можно было наблюдать движение Солнца, Луны и пяти планет, фазы Луны, солнечные и лунные затмения. Автор многих открытий и изобретений. Руководил обороной Сиракуз во время второй Пунической войны.

Якоб **Бернулли** (1654 - 1705) - швейцарский математик, представитель известной династии математиков и физиков. Является родоначальником теории рядов и, совместно с братом Иоганном Бернулли, - вариационного исчисления. Первым применил идеи анализа бесконечно малых к изучению свойств ряда кривых, в т.ч. логарифмической спирали, лемнискаты и цепной линии; определил площади сферического треугольника, коноидальных, сфероидальных и ряда других поверхностей. Внес большой вклад в развитие теории вероятностей и комбинаторики. Построил математическую модель серии независимых испытаний, открыл числа Бернулли, доказал теорему Бернулли - частный случай закона больших чисел.

Сергей Натанович **Бернштейн** (1880 - 1968) - академик АН СССР, иностранный член Парижской АН и ряда других академий. Родился в Одессе. Окончил Парижский университет. В 1907 - 1933 г.г. работал в Харьковском университете, в 1928 г. основал в Харькове Научно-исследовательский математический институт. Внес большой вклад в теорию приближения функций многочленами и теорию дифференциальных уравнений. Разработал метод отыскания решений уравнений с частными производными второго порядка. Заложил

основы конструктивной теории функций. Разработал первое аксиоматическое построение теории вероятностей.

Николай Николаевич **Боголюбов** (1909 - 1992) - академик АН СССР и АН УССР, иностранный член Национальной АН США, ряда других академий и научных обществ. Внес большой вклад в развитие нелинейной механики, статистической физики, квантовой теории поля, теории дифференциальных уравнений и ряда других разделов математики и физики. Создал (совместно с Н.М. Крыловым) теорию инвариантной меры в динамических системах. Развил последовательную микроскопическую теорию сверхпроводимости. Установил дисперсионные соотношения для элементарных частиц. Создал научные школы в области нелинейной механики, статистической физики и квантовой теории поля.

Бернард **Больцано** (1781 - 1848) – чешский математик, философ и логик. В 1805 – 1820 г.г. работал в Пражском университете. В 1820 г. за антиправительственные выступления был отстранен от работы. Установил современное понятие сходимости рядов, сформулировал критерий сходимости, теорему про существование предельной точки бесконечного ограниченного множества чисел, уточнил понятия предела и непрерывности функции. Сформулировал понятие бесконечного множества как множества, равномощного своей правильной части. Обосновал арифметику натуральных чисел методом математической индукции и заложил основы современной теории действительных чисел. Основные результаты Б.Больцано были изданы анонимно или опубликованы после 1923 г.

Виктор Яковлевич **Буняковский** (1804 - 1889) - академик и вице-президент Петербургской АН. Родился в Баре (ныне Винницкая обл.). Учился во Франции. С 1825 г. работал в Петербурге. Внес большой вклад в развитие теории чисел, теории вероятностей, математический анализ и другие разделы математики. Разработал ряд прикладных методов математической статистики, в том числе методы демографических исследований, методы оценки погрешностей наблюдений. Сформулировал важное для теории интегрального исчисления и прикладной математики неравенство Буняковского (неравенство Шварца). Составил "Лексикон чистой и прикладной математики", сыгравший большую роль в становлении русской математической терминологии.

Карл Теодор Вильгельм **Вейерштрасс** (1815 - 1897) - немецкий математик. С 1856 г. работал в Берлинском университете. Построил теорию действительных чисел, на основе которой дал логическое обоснование математического анализа. Первым систематически использовал понятия верхней и нижней граней числовых множеств, разработал учение о предельных точках, строго обосновал свойства непрерывных функций, доказал возможность разложения любой непрерывной на отрезке функции в равномерно сходящийся ряд многочленов. Внес большой вклад в развитие теории аналитических функций, вариационного исчисления, дифференциальных уравнений. Создал большую математическую школу. В числе его учеников была С.В. Ковалевская.

Григорий Феодосьевич **Вороной** (1868 - 1908) - чл.-корр. Петербургской АН. Родился в Журавке (ныне Черниговская обл.). Работал в Варшавском университете. Внес большой вклад в развитие теории чисел и математический ана-

лиз. Является основоположником общей теории неопределенных уравнений 3-й степени, одним из создателей геометрии чисел. Разработал метод суммирования рядов.

Карл Фридрих **Гаусс** (1777 - 1855) - немецкий математик, физик, астроном и геодезист. Учился и работал в Геттингенском университете. Его работы оказали большое влияние на развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории рядов, классических теорий электричества и магнетизма. Дал первое доказательство основной теоремы алгебры. Создал теорию квадратичных вычетов и дал первое доказательство квадратичного закона взаимности - одной из центральных теорем теории чисел. Развил теорию квадратичных форм. Доказал ряд теорем о кубических и биквадратичных вычетах. Создал теорию уравнений деления круга. Дал общее решение задачи о возможности построения правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки. Создал теорию поверхностей, которая послужила образцом для разработки n-мерной римановой геометрии, и общий геометрический метод исследования поверхностей, широко используемый в геодезии и картографии. Ввел криволинейные координаты произвольного вида. Был одним из создателей неевклидовой геометрии. Разработал метод наименьших квадратов. Совместно с В. Вебером разработал абсолютную систему электромагнитных единиц. Создал общую теорию магнетизма и основы теории потенциала. Разработал теоретические основы вычисления орбит планет.

Израиль Моисеевич **Гельфанд** (род. в 1913 г.) - академик АН СССР, иностранный член Национальной АН США, Шведской королевской академии, Лондонского королевского общества и ряда других академий. Родился в г. Красные Окны (ныне Одесская обл.). С 1930 г. работал в Москве. Один из создателей теории нормированных колец (банаховых алгебр). Разработал теорию бесконечных унитарных представлений непрерывных групп. Создал научную школу по применению математических методов в биологии.

Виктор Михайлович **Глушков** (1923 - 1982) - академик АН СССР и АН УССР, иностранный и почетный член Болгарской АН, Польской АН, АН ГДР, Академии Леопольдина и др. Родился в Ростове-на-Дону. С 1956 г. работал в Киеве. Внес большой вклад в развитие теории алгебраических систем, теорию автоматов, кибернетику и другие разделы математики. Разработал методы изучения самоорганизующихся и самообучающихся систем автоматов, принципы построения структур ЭВМ. Под его руководством впервые в мире была реализована идея аппаратной интерпретации языков высокого уровня. Сыграл большую роль в организации разработок, производства и практического применения ЭВМ и автоматических систем в Советском Союзе.

Борис Владимирович **Гнеденко** (1912 - 1995) - академик АН УССР. Родился в г. Симбирске (Ульяновск). В 1945 - 1960 г.г. работал в институте математики АН УССР (в т.ч. в 1955 - 1960 г.г. директором института), с 1960 г. работал в МГУ. Создал украинскую научную школу в области теории вероятностей и математической статистики. Определил условия сходимости распределения сумм независимых слагаемых ко всем возможным для них предельным распределениям. Внес большой вклад в развитие теории массового обслужива-

ния, теорию надежности, историю математики и развитие математического образования в Украине и СССР.

Дмитрий Александрович **Граве** (1863 - 1939) - академик АН УССР, почетный член АН СССР. Окончил Петербургский университет. С 1897 г. работал в Харьковском, а с 1899 г. - в Киевском университетах. Решил ряд важных проблем проективной геометрии и картографии. Изложил теорию идеалов при помощи функционалов. Нашел некоторые классы алгебраических уравнений 5-й степени, разрешимые в радикалах. Создал научную школу в области алгебры (в числе его учеников были Б.Н. Делоне, Н.Г. Чеботарев, О.Ю. Шмидт и другие известные математики). Именем Д.А. Граве назван один из кратеров на Луне.

Рихард Юлиус Вильгельм **Дедекинд** (1831 - 1916) - немецкий математик, член Берлинской, Парижской и Римской академий наук. Учился у К. Гаусса и П. Дирихле. В 1862 – 1894 г.г. - профессор Высшей технической школы в Брауншвейге. Заложил основы современной алгебры, ввел понятия кольца и идеала, разработал теорию структур. Обобщил понятие упорядоченного множества, одним из первых дал теоретико-множественное обоснование теории действительных чисел. Первым сформулировал полную систему аксиом арифметики, дав точную формулировку принципа полной математической индукции. Ввел в наиболее общем виде теоретико-множественное понятие отображения.

Борис Николаевич **Делоне** (1890 - 1980) - чл.-корр. АН СССР, чл. академии Леопольдина. Родился в Петербурге. Окончил Киевский университет. Работал в Киевском и Ленинградском университетах, а с 1932 г. - в Математическом институте АН СССР. Получил ряд фундаментальных результатов в алгебре, геометрии, теории чисел, кристаллографии. Создал завершенную теорию бинарных кубических уравнений с отрицательным дискриминантом. Решил задачу об определении двумерной решетки по расстоянию между ее точками. Разработал метод пустого шара в геометрии чисел. Являлся одним из организаторов первых в СССР математических олимпиад для школьников. Известный альпинист, одна из вершин Алтая называется "Пик Делоне".

Камиль Мари Эдмон **Жордан** (1838 - 1922) - французский математик, чл.-корр. Петербургской АН. Работал в Политехнической школе и Колледж де Франс. Внес большой вклад в развитие теории групп, теории функций, алгебры, дифференциальной геометрии и других разделов математики. Ввел понятия функций с ограниченным изменением, фактор-группы, нормальной формы матриц и др. Доказал теорему о композиционных рядах групп (теорема Жордана - Гельдера). Первым исследовал бесконечные группы.

Александр Юльевич **Ишлинский** (род. в 1913 г.) - академик АН СССР и АН УССР. В 1947 - 1965 работал в АН УССР. Внес большой вклад в развитие механики, математической физики, прикладной математики, теории систем автоматического управления. Разработал теорию систем дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами.

Владимир Семенович **Королюк** (род. в 1925 г.) - академик АН УССР. Окончил Киевский университет. Уточнил ряд предельных теорем для задач случайных блужданий с границами. Применил метод случайных блужданий для изучения точных статистик. Является одним из авторов идеи построения

адресного алгоритмического языка, в основу которого положены понятия косвенной адресации и ранга адреса.

Огюстен Луи **Коши** (1789 - 1857) - французский математик, член Парижской, Петербургской и большинства других академий наук. Внес большой вклад в развитие многих разделов математики. Разработал курс математического анализа, основанный на систематическом использовании понятия предела. Впервые установил четкие условия сходимости ряда Тейлора к данной функции, ввел понятие радиуса сходимости, дал определение интеграла как предела сумм, доказал существование интегралов от непрерывных функций и теорему о произведении двух абсолютно сходящихся рядов. Разработал теорию вычетов и ее приложения к различным вопросам анализа. Сформулировал одну из основных общих задач теории дифференциальных уравнений, сформулировал основные теоремы существования решений таких уравнений для случаев действительных и комплексных переменных, предложил метод интегрирования уравнений с частными производными первого порядка.

Михаил Филиппович **Кравчук** (1892 - 1942) - академик АН УССР. Окончил Киевский университет. Ввел в теории вероятностей понятие многочленов биномиального распределения (многочлены Кравчука). Разработал ряд методов решения дифференциальных и интегральных уравнений. Внес большой вклад в развитие теории аналитических функций, математической статистики, алгебру, геометрию, теорию чисел и другие разделы математики. Был организатором первой в Украине Киевской математической олимпиады школьников и школьным учителем математики выдающихся конструкторов А. Люльки и С. Королева. Внес большой вклад в разработку украинской математической терминологии.

Николай Митрофанович **Крылов** (1879 - 1955) - академик АН СССР и АН УССР. Окончил Петербургский горный институт. В 1917 - 1922 г.г. работал в Крымском университете (г. Симферополь), а затем в АН УССР. Внес большой вклад в развитие методов приближенных вычислений и нелинейную механику. Дал эффективные формулы оценок погрешности при приближенном интегрировании. Один из создателей общей теории динамических систем. Совместно с Н.Н. Боголюбовым разработал методы получения асимптотических разложений уравнений механики, а также метод усреднения в теории дифференциальных уравнений. Создал научную школу (в числе его учеников Н.Н. Боголюбов и другие известные математики). АН УССР учредила премию им. Н.М. Крылова за научные достижения в области математики.

Казимеж **Куратовский** (1896 - 1980) - польский математик, академик Польской АН и АН СССР. В 1927 – 1934 г.г. - профессор Львовского политехнического института. Предложил аксиоматику операции замыкания в топологии, разработал теорию неприводимых континуумов. Получил ряд важных результатов в теории множеств, теории функций, математической логике, теории графов.

Михаил Алексеевич **Лаврентьев** (1900 - 1980) - академик АН СССР и АН УССР, иностранный член многих других академий, в 1966 – 1970 г.г. - вице-президент Международной ассоциации математиков. В 1939 - 1950 г.г. работал в АН УССР. Внес большой вклад в развитие многих разделов математики и ме-

ханики. Создал теорию квазиконформных отображений и теорию кумулятивных зарядов. Нашел новые свойства классов римановых поверхностей. Совместно с М.В. Келдышем исследовал аппроксимацию произвольных непрерывных функций комплексной переменной рядами полиномов. Разработал теоретические основы движения кораблей на подводных крыльях и основы процессов применения взрывчатых веществ в народнохозяйственных целях. Создал большую научную школу, его учениками были академики А.И. Ишлинский, М.В. Келдыш, Л.И. Седов и другие известные ученые. Был организатором Сибирского отделения АН СССР и одного из крупнейших в СССР Новосибирского научного центра.

Жозеф Луи **Лагранж** (1736 - 1813) - французский математик и механик, академик Берлинской, Парижской и Петербургской АН, организатор Туринской АН. В 1766 - 1787 г.г. - Президент Берлинской АН. Первым решил задачу о распространении звука. Предложил метод нахождения наибольших и наименьших значений интегралов. Является основоположником вариационного исчисления и классической аналитической механики. Совместно с П. Лапласом, Г. Монжем и др. разработал метрическую систему мер. Предложил формулу остаточного члена ряда Тейлора, формулу конечных приращений, интерполяционную формулу. Предложил метод множителей для отыскания условных экстремумов. Создал теорию особых решений дифференциальных уравнений и предложил метод вариации произвольных постоянных. Решил также ряд важных задач алгебры, теории чисел и механики.

Сергей Алексеевич **Лебедев** (1902 - 1974) - академик АН СССР и АН УССР. Окончил Московское высшее техническое училище им. Баумана. В 1945-1951 г.г. работал директором Института электротехники АН УССР, где под его руководством была создана первая в СССР электронная вычислительная машина.

Готфрид Вильгельм **Лейбниц** (1646 - 1716) - немецкий математик, физик, философ и государственный деятель, организатор и первый Президент Берлинской АН, чл. Лондонского королевского общества и Парижской АН. Одновременно с И. Ньютоном завершил создание дифференциального и интегрального исчисления. Первым выполнил интегрирование дифференциальных уравнений с помощью бесконечных рядов. Ввел понятие определителя. Сконструировал счетную машину, выполнявшую арифметические действия, возведение в степень, извлечение квадратных и кубических корней. Является автором многих математических терминов: функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, координата и др. Является одним из основоположников политической экономии и сравнительного языкознания. Одним из первых высказал мысль о том, что Земля имеет свою геологическую историю, отстаивал идеи биологической эволюции. По просьбе Петра I разработал проекты развития государственного управления и образования в России. Создал большую научную школу. В числе его учеников - братья Бернулли, Г.Ф. Лопиталь и многие другие известные математики.

Юрий Владимирович **Линник** (1915 - 1972) - академик АН СССР. Родился в г. Белая Церковь (Киевская обл.). Окончил Ленинградский университет.

Работал в Ленинграде. Внес большой вклад в развитие теории чисел, теории вероятностей и математической статистики. Разработал эргодический метод в теории квадратичных форм и целочисленных матриц, уплотняющий метод в теории L-рядов, дисперсионный метод в аналитической теории чисел и др. Доказал предельные теоремы для независимых случайных величин и неоднородных цепей Маркова. Разработал теорию проверки сложных статистических гипотез.

Ярослав Борисович **Лопатинский** (1906 - 1981) - академик АН УССР. Родился в Тифлисе (Тбилиси). Окончил Азербайджанский университет. Работал в вузах Баку, Львова и Москвы, с 1965 г. - в Донецком институте прикладной математики и механики АН УССР и ДонГУ. Построил основное фундаментальное решение для систем дифференциальных уравнений общего вида в малой области, вывел условие дополнительности (условие Лопатинского, или Шапиро - Лопатинского). Разработал топологические методы решения краевых задач.

Де Гийом Франсуа **Лопиталь** (1661 - 1704) - французский математик, чл. Парижской АН. Является автором первого печатного учебника по дифференциальному исчислению. Сформулировал правило нахождения предела дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю. С помощью методов математического анализа решил ряд трудных задач геометрии и механики.

Александр Михайлович **Ляпунов** (1857 - 1918) - академик Петербургской АН, иностранный член Академии деи Линчеи, чл.-корр. Парижской АН. Окончил Петербургский университет. В 1885 – 1902 г.г. работал в Харьковском университете. Создал теорию устойчивости движения и сформулировал критерии устойчивости решений дифференциальных уравнений. Исследовал фигуры равновесия вращающейся жидкости. Разработал метод характеристических функций в теории вероятностей и дал общее строгое доказательство центральной предельной теоремы.

Иван Иванович **Ляшко** (род. в 1922 г.) - академик АН УССР. Родился в с. Масковцы Полтавской обл. Окончил Киевский педагогический институт. С 1955 г. работает в Киевском университете. Совместно с В.М. Глушковым был инициатором создания факультета кибернетики и его первым руководителем. Развил математическую теорию фильтрации, разработал ряд численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики. Эти методы были успешно применены при проектировании ряда гидроэлектростанций, ликвидации последствий аварии на Чернобыльской АЭС и для решения многих других важных прикладных задач. Совместно с учениками И.И. Ляшко создал комплекс университетских учебников по фундаментальным и специальным математическим дисциплинам.

Владимир Александрович **Марченко** (род. в 1922 г.) - академик АН СССР и АН УССР. Родился в Харькове. Окончил Харьковский университет. Работал в Харьковском университете, с 1960 г. - в Харьковском физико-техническом институте низких температур АН УССР. Внес большой вклад в решение обратных задач спектрального анализа дифференциальных операторов.

Гурий Иванович **Марчук** (род. в 1925 г.) - академик АН СССР. Родился в с. Петро Херсонец Оренбургской обл. Окончил Ленинградский университет. Внес большой вклад в развитие вычислительной и прикладной математики. Разработал алгоритмы и методы моделирования ядерных реакторов, динамики атмосферы и океана, автоматических систем управления, протекания вирусных заболеваний и др. Избирался президентом АН СССР.

Герман **Минковский** (1864 - 1909) - немецкий математик. Работал в Боннском, Кенигсбергском, Цюрихском и Геттингенском университетах. Один из основоположников современной геометрической теории чисел. Дал геометрическую интерпретацию кинематики и специальной теории относительности, ввел четырехмерное пространство с гиперболической метрикой. Постулировал инвариантность всех физических законов относительно преобразований Лоренца. Установил уравнения электромагнитного поля для движущейся материи.

Юрий Алексеевич **Митропольский** (род. в 1917 г.) - академик АН СССР, НАН Украины и Российской АН, иностранный член Болонской АН. Родился в с. Шишаки Полтавской области. Окончил Казахский университет. Работал в Институте строительной механики АН УССР, а с 1950 г. - в Институте математики АН УССР, в т.ч. с 1958 г. - директором, а с 1988 – почетным директором. Развил асимптотические методы Крылова - Боголюбова, решил с их помощью ряд важных задач теории нелинейных колебаний.

Владимир Сергеевич **Михалевич** (1930 - 1994) – академик АН СССР и АН УССР. Окончил Киевский университет. Работал в Киевском университете и АН УССР. Разработал ряд общих схем и методов решения задач линейного и нелинейного программирования большого объема, градиентные методы решения задач оптимизации стохастических процессов и др. Создал метод последовательного анализа вариантов в теории вычислительных методов динамического программирования.

Сергей Михайлович **Никольский** (род. в 1905 г.) - академик АН СССР, почетный член Венгерской АН, иностранный член Польской АН. Окончил Екатеринославский институт народного образования (ныне Днепропетровский университет). В 1930 – 1940 г.г. работал в Днепропетровском университете, с 1940 г. - в Математическом институте АН СССР, а с 1947 г. – одновременно в Московском физико-техническом институте. Нашел асимптотически точные оценки приближений функций тригонометрическими полиномами и алгебраическими многочленами, создал теорию наилучших квадратурных формул, теорию приближения целыми функциями экспоненциального типа. Внес большой вклад в обоснование прямых методов вариационного исчисления.

Исаак **Ньютон** (1643 - 1727) - английский физик, математик, теолог, член Лондонского королевского общества и Парижской АН, в 1703 – 1727 г.г. - Президент Лондонского королевского общества. Одновременно с Г. Лейбницем создал дифференциальное и интегральное исчисление. Открыл взаимно обратный характер операций дифференцирования и интегрирования, обобщил т.н. теорему о биноме Ньютона на случай произвольного действительного показателя. Предложил метод приближения функций бесконечными рядами. Нашел разложение в ряд показательной, тригонометрических и др. функций. Предло-

жил метод численного решения алгебраических уравнений, доказал теоремы о симметричных функциях корней алгебраических уравнений, об отделении корней, о приводимости уравнений и др. Решил задачу о проведении параболической кривой n-го порядка через n + 1 точку. Развил теорию кривых 2 и 3-го порядков, дал классификацию кривых 3-го порядка.

Является основоположником классической механики. Открыл закон всемирного тяготения. Объяснил рассеивание и открыл дисперсию света. Изобрел первый зеркальный телескоп.

Ольга Арсеньевна **Олейник** (род. в 1925 г.) - советский математик, академик Российской и Итальянской АН. Родилась в Матусове (Киевская обл.). С 1950 г. работает в Московском университете. Внесла важный вклад в решение 16-й проблемы Гильберта о взаимном расположении и числе связных компонент действительных алгебраических кривых и поверхностей. Решила ряд важных проблем теории дифференциальных уравнений, в т.ч. построила теорию разрывных решений задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, исследовала класс уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой, изучила качественные свойства решений нелинейных уравнений. Решила ряд актуальных задач математической физики, связанных с теорией усреднения, изучила нелинейные уравнения теории фильтрации, построила математическую теорию уравнений пограничного слоя Прандля.

Тимофей Федорович **Осиповский** (1765 - 1832) - российский математик и физик. В 1803 - 1820 г.г. работал в Харьковском университете (в 1813 - 1820 г.г. - ректор). Автор одного из первых систематических курсов математики для студентов университетов. Один из учителей М.В. Остроградского.

Михаил Васильевич **Остроградский** (1801 - 1862) - академик Петербургской, Нью-Йоркской, Туринской АН, Национальной академии деи Линчеи (Рим), чл.-корр. Парижской АН. Учился в Харьковском университете и во Франции. Внес большой вклад в развитие математической физики. Обобщил формулу Гаусса для потоков векторов (формула Гаусса - Остроградского) и применил ее в теории теплопроводности. Предложил методы отыскания интегралов уравнений теплопроводности, колебаний и др. Дал полные решения задач о нахождении экстремумов кратных интегралов и об отделении алгебраической части интеграла от рациональной дроби. Первым высказал принцип локализации, используемый в теории тригонометрических рядов. На 7 лет раньше Ж. Лиувилля сформулировал т.н. теорему Лиувилля. Разработал методы баллистических расчетов, статистические методы браковки изделий. Обобщил принцип Гамильтона на случай неконсервативных динамических систем. Основал научную школу в области прикладной математики (среди его учеников И.А. Вышнеградский, Д.И. Журавский, Н.П. Петров и другие).

Андрей Федорович **Павловский** (1789 - 1857) - российский математик, профессор (с 1837 г. - ректор) Харьковского университета. Ученик Т.Ф. Осиповского. Автор первой в России работы по теории вероятностей.

Остап Степанович **Парасюк** (род. в 1921 г.) - академик АН УССР. Окончил Львовский университет. Работал в Институтах математики и теоретической

физики АН УССР, одновременно с 1957 г. - профессор Киевского университета. Разработал методы умножения причинных функций, регуляризации расходящихся интегралов и аналитического продолжения обобщенных функций в квантовой теории поля.

Джузеппе **Пеано** (1858 – 1932) – итальянский математик, профессор Туринского университета. Основные работы связаны с изучением основных понятий и методов математического анализа и теории дифференциальных уравнений, формально-логическим обоснованием математики. Ввел аксиоматику натурального ряда чисел. Привел пример непрерывной (жордановой) кривой, целиком заполняющей квадрат.

Алексей Васильевич **Погорелов** (1919 - 2002) - академик АН СССР и АН Украины. Родился в г. Короча Белгородской области. Окончил 4 курса Харьковского университета и Военно-воздушную инженерную академию им. Н.Е. Жуковского. В 1947 - 1959 работал в Харьковском университете, а с 1960 г. - также в Физико-техническом институте низких температур АН Украины (г. Харьков). Ему принадлежит решение ряда ключевых проблем геометрии, теории уравнений Монжа-Ампера, механики сплошных сред. А.В. Погорелов дал полное решение проблемы однозначной определенности общей выпуклой поверхности ее внутренней метрикой, а также четвертой проблемы Гильберта. Решил многомерную проблему Минковского о существовании замкнутой выпуклой гиперповерхности, гауссова кривизна которой является заданной функцией внешней нормали, а также проблемы о погружении двумерного риманова многообразия в произвольное риманово пространство и бесконечно малом изгибе общих выпуклых поверхностей. Доказал существование обобщенных решений уравнения Монжа-Ампера общего вида и теорему об их единственности. Разработал нелинейную теорию упругих оболочек, в частности, решил задачу об их устойчивости. А.В. Погорелов предложил новую идею конструкции синхронного криотурбогенератора со сверхпроводящей обмоткой возбуждения, что послужило толчком в развитии криогенного машиностроения в СССР. Подготовил учебники по основным разделам геометрии для высшей школы, а также учебник геометрии для средней школы.

Георгий (Юрий) Васильевич **Пфейффер** (1872 - 1942) - академик АН УССР. Родился в с. Сокирницы (ныне Черниговская обл.). Окончил Киевский университет. Работал в Киевском университете. Был основателем и первым директором Института математики и физики АН УССР. Внес большой вклад в теорию дифференциальных уравнений в частных производных.

Владимир Логвинович **Рвачёв** (род. в 1926 г.) – академик НАН Украины. С 1970 г. работает в Институте проблем машиностроения НАН Украины (г. Харьков). В.Л. Рвачёв создал теорию R-функций, позволившую решить обратную задачу аналитической геометрии, т.е. задачу о нахождении уравнения для заданного геометрического объекта. Предложил неархимедово алгебраическое исчисление, изоморфное классическому, применение которого позволило получить важные результаты в космологии и теории гравитации.

Мишель **Ролль** (1652 – 1719) – французский математик, член Парижской АН. Развил метод отделения действительных корней алгебраических

уравнений, основанный на т.н. теореме Ролля. Исследовал решения в целых числах неопределенных линейных уравнений с двумя неизвестными.

Александр Андреевич **Самарский** (род. в 1919 г.) - академик АН СССР, почетный доктор Киевского и ряда других университетов. Родился в Амвросиевке (ныне Донецкая обл.). Окончил Московский университет. С 1948 г. работает в Московском университете и Институте прикладной математики АН СССР, в 1991 г. основал Институт математического моделирования РАН. А.А. Самарский большой вклад в разработку численных методов решения уравнений математической физики, заложил основы математического моделирования и сформулировал основные принципы конструирования и обоснования разностных схем и параллельных вычислений, создал операторную теорию разностных схем и развил конструктивную теорию их устойчивости. Разработал методологию проведения вычислительных экспериментов и применил ее на практике для решения многих задач, связанных с изучением сложных физико-технических систем, в т.ч. проблем управляемого термоядерного синтеза, атомной энергетики, физики плазмы, автокаталитических химических реакций, лазерной термохимии, конвекции и др. Совместно с А.Н. Тихоновым выполнил первые в СССР прямые расчеты мощности взрыва атомной и водородной бомбы и построил строгую математическую теорию радиоволноводов. Является соавтором открытия эффекта Т-слоя в физике, а также эффекта локализации в нелинейных средах. Создал крупную научную школу в области математического моделирования и вычислительного эксперимента. Среди его учеников известные ученые многих стран мира, в т.ч. Украины.

Иван Васильевич **Сергиенко** (род в 1936 г.) – академик НАН Украины, генеральный директор Кибернетического научного центра НАН Украины. Внес большой вклад в развитие теоретической кибернетики, прикладной математики, теории оптимизации, разработку математического обеспечения ЭВМ и систем искусственного интеллекта.

Дмитрий Матвеевич **Синцов** (1867 - 1946) - академик АН УССР. Родился в Вятке. Окончил Казанский университет. Работал в Казанском университете, Екатеринославском высшем горном училище, а с 1903 г. - в Харьковском университете. Выполнил фундаментальные исследования в области геометрической теории дифференциальных уравнений (теория коннексов).

Владимир Андреевич **Стеклов** (1964 - 1926) - академик Петербургской АН и АН УССР. Родился в Нижнем Новгороде. Окончил Харьковский университет. Работал в Харьковском, а с 1906 г. - в Петербургском (Ленинградском) университетах. Сформулировал понятие замкнутости системы ортогональных функций, на основе которых разработал новые методы решения краевых задач и решил ряд важных задач математической физики. Разработал метод сглаживания функций (функции Стеклова).

Брук **Тейлор** (1685 – 1731) – английский математик, член Лондонского королевского общества. Нашел общую формулу для разложения функций в степенные ряды (ряд Тейлора) и обратный метод приращений. Положил начало изучению задачи о колебаниях струны. Разработал теорию конечных разностей. Выполнил также ряд важных исследований в области физики и философии.

Павел Самуилович **Урысон** (1898 - 1924) – советский математик. Родился в Одессе. Окончил Московский университет. Получил ряд фундаментальных результатов в общей теории топологических и метрических пространств, теории интегральных уравнений, геометрии, теории функций комплексной переменной. Является создателем теории размерности. Доказал ряд классических теорем о топологических пространствах.

Пьер **Ферма** (1601 – 1665) – французский математик. Является одним из создателей теории чисел. В геометрии развил метод координат, дал уравнения прямой и кривых 2-го порядка. Сформулировал общее правило дифференцирования степенных функций с рациональными показателями и правило нахождения экстремумов функций. Сформулировал и доказал для общего случая правило интегрирования степенных функций. Сформулировал принцип Ферма в геометрической оптике.

Фредерик Жан **Френе** (1816 – 1900) – французский математик. Получил формулы Френе (Серре – Френе), связывающие направляющие косинусы касательной, нормали и бинормали.

Николай Григорьевич **Чеботарев** (1894 - 1947) - чл.-корр. АН СССР. Родился в г. Каменец-Подольский (ныне Хмельницкая обл.). Учился в Киевском университете. Работал в Киевском, Одесском, а с 1927 г. - в Казанском университетах. Получил наиболее глубокое обобщение теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Получил ряд важных результатов в теориях Галуа (проблема резольвент), групп Ли, диофантовых приближений, целых аналитических функций.

Игорь Ростиславович **Шафаревич** (род. в 1923 г.) – академик АН СССР, иностранный член Национальной АН США, Лондонского королевского общества и др. Родился в Житомире. Окончил Московский университет. Внес большой вклад в развитие алгебраической теории чисел. Открыл общий закон взаимности степенных вычетов в полях алгебраических чисел. Решил обратную задачу Галуа для разрешимых групп. Совместно с Е.С. Голодом доказал существование бесконечных периодических групп с конечным числом образующих.

Анатолий Илларионович **Ширшов** (1921 - 1981) - чл.-корр АН СССР. Родился в с. Колывань (Новосибирская обл.). Окончил Луганский педагогический институт. Создал новое направление в теории колец. Разработал алгоритмы решающие проблемы тождества в алгебре Ли и в свободных коммутативных алгебрах.

Отто Юльевич **Шмидт** (1891 - 1956) - академик АН СССР и АН УССР, вице-президент Академии наук СССР. Окончил физико-математический факультет Киевского университета. В 1913 - 1920 г.г. работал в Киевском университете. Внес большой вклад в развитие абстрактной теории групп, доказал классическую теорему о бесконечных группах с конечной цепью, стал основоположником советской научной школы по теории групп. В 30-е годы руководил исследованиями по изучению Арктики. Организовал и возглавил исследование Арктики в Советском Союзе, в том числе экспедиции на ледоколах "Седов" и "Сибиряков", дрейфующей станции "Северный полюс-1", пароходе "Челюскин". Теоретически обосновал и на практике показал возможность навигации

по Северному морскому пути. В середине 40-х годов выдвинул новую гипотезу об образовании Земли и планет Солнечной системы. Именем О.Ю. Шмидта названы остров в Карском море, мыс в Чукотском море, гора на Луне.

Иосиф Захарович **Штокало** (1897 - 1987) - академик АН УССР. Родился в с. Скоморохи (ныне Львовская обл.). Окончил Днепропетровский университет. Выполнил ряд важных исследований по теории дифференциальных уравнений, операционному исчислению, теории функций комплексного переменного, аэродинамике, истории математики. Внес большой вклад в разработку украинской математической терминологии.

Леонард **Эйлер** (1707 – 1783) – швейцарский математик и физик, член Петербургской АН, Берлинской АН, Парижской АН, Лондонского королевского общества. Внес большой вклад в развитие методов математического описания движения. Заложил основы теории функций комплексного переменного, вариационного исчисления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, теории специальных функций, разработал ряд методов математического анализа. Внес большой вклад в развитие теории чисел, алгебры и других разделов математики. Составил географические карты Российской империи. Подготовил фундаментальный труд по теории кораблестроения.

Рекомендуемая литература

1. Алексєєв В.М., Ушаков Р.П. Математика. Довідковий повторювальний курс / За ред. М.Й. Ядренка - Київ: Вища школа, 1992.

2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 1999.

3. Беран Л. Упорядоченные множества (Популярные лекции по математике). - М.: Наука, 1981.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1988.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. - М.: Наука, 1987.

6. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. - М.: Наука, 1969.

7. Виноградов И.М. Дифференциальное исчисление. - М.: Наука, 1985.

8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Джангар, 1998.

9. Гусак А.А. Высшая математика: В 2 т. - Минск: Тетра-Системз, 1998.

10. Гусак А.А. Справочник по высшей математике. - Минск: Тетра-Системз, 1999.

11. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1990.

12. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Наука, 1990.

13. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. - М.: 1967.

14. Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1. - М.: МГУ, 1998.

15. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Т. 1. - М.: Наука, 1982.

16. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Т. 1. - М.: МГУ, 1985.

17. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Т. 1. - М.: МГУ, 1993.

18. Корн Г, Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1973.

19. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ: В 2 т. - М.: Высшая школа, 1998.

20. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу / Под. ред. Л.Д. Кудрявцева. - М.: Высшая школа, 1995.

21. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа. – К.: Вища школа, 1988.

22. Математика. Большой энциклопедический словарь. - М., 1998

23.Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2 т. - М.: Наука, 1990.

24. Оре О. Приглашение в теорию чисел (Библиотечка "Квант"). - М.: Наука, 1980.

25. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел (Библиотечка "Квант"). - М.: Наука, 1987.

26. Сикорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1977.- 768 с.

27.Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – К., 1973.

28.Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1994.

29. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин. - М.: Педагогика, 1989.- 352 с.