

3. Рыжков, А.Ф. Распространение колебаний во взвешенном слое [Текст] / А.Ф. Рыжков, Б.А. Путрик // Инж.-физ. Журнал. – Минск.: 1988. – т.54. № 2 – С. 188 – 197.
4. Патент РФ № 22646698, 2005.
5. Кастерин, А.В. Об уравнении неравновесной фильтрации [Текст] // Инж.-физ. Журнал. Минск.: 1980. – т.39, № 1 – С. 77 – 85.
6. Мищенко, Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания [Текст] / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов // М.: Наука – 1975. – 247 С.
7. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах [Текст] / Г. Николис, И. Пригожин // М.: Мир – 1979. – 512 С.
8. Лыков, А.В. Теория сушки [Текст] // М.: Энергия – 1968. – 472 С.

Для математичного моделювання тривимірних температурних полів у тілах неканонічного поперечного перерізу пропонується сумісне використання інтегральних перетворень S -функцій, структурового та проєкційного методів

Ключові слова: математичне моделювання, температурні поля, S -функції

Для математического моделирования трехмерных температурных полей в телах неканонического поперечного сечения предлагается совместное применение конечных интегральных преобразований S -функций, структурного и проекционного методов

Ключевые слова: математическое моделирование, температурные поля, S -функции

The paper proposes the combined use of integral transformations of S -functions, structure and projection methods for mathematical modeling of three-dimensional temperature fields in solids with non-canonical cross-sections

Keywords: mathematical modeling, the temperature field, S -functions

УДК 536.24

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРОЕКЦИОННО- СТРУКТУРНЫМ МЕТОДОМ

А.П. Слесаренко

Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, лауреат Государственной премии Украины
Отдел моделирования и идентификации тепловых процессов*
Контактный тел.: (057) 34-95-1, 096-386-30-22

С.Ю. Загоруйко

Аспирант*

Ю.О. Кобринович

Аспирант*

Контактный тел.: 093-734-84-22

E-mail: Kobrinovich.jul@mail.ru

*Институт проблем машиностроения А.М. Подгорного НАН
Украины
ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046

1. Постановка проблемы

Исследования, представленные в статье, относятся к области математического моделирования трехмерных температурных полей в телах, ограниченных параллельными плоскостями и призматической или цилиндрической поверхностью сложной формы, образующие которой перпендикулярны к данной плоскости.

В постановке каждой краевой задачи для уравнений с частными производными наряду с информацией

аналитического характера о виде уравнений и краевых условий имеем также геометрическую информацию о форме тел, в которых определяется поле, форме площадок их контактного взаимодействия, расположении в форме возбудителей поля и т.д. Геометрическая информация влияет на картину поля, поэтому всякий метод решения краевой задачи должен предусматривать включение этой информации в разрешающий алгоритм.

В таких методах, как методы разделения переменных и интегральных преобразований учет информа-

ции о форме областей осуществляется за счет удачного выбора системы координат; в методе конформных отображений – при построении отображающих функций; в вариационных методах – при построении координатных («пробных») функций; в методах сеточного типа – при составлении уравнений для узлов, близких к границе и т.д. (Метод конечных элементов, получивший развитие в последние годы, возник из-за стремления как можно точнее учесть геометрию областей.)

Названные выше методы могут применяться в различных сочетаниях друг с другом (вариационно-разностный метод, метод Л.В. Канторовича и др.), однако каждый из них является по существу независимым методом, предназначенным для решения краевой задачи от начала и до конца.

В отличие от приведенных выше методов в структурном методе предполагается обязательное подключение одного из перечисленных методов (или их аналога), и он является для него своего рода «усиливающим блоком», позволяющим на аналитическом уровне точно учесть содержащуюся в постановке краевой задачи геометрическую информацию. Точнее, оказывается возможным строить такие формулы, которые при любом выборе неопределенных компонентов точно удовлетворяют всем краевым условиям. В то же время обеспечивается условие полноты, состоящее в принципиальной возможности такого выбора неопределенных компонентов, который приводил бы к точному решению краевой задачи или, по крайней мере, к достаточно хорошему его приближению. При этом возможен учет различного рода априорной информации в искомом решении, которую частично можно извлечь из известных точных решений сходных (модельных) задач. Это приводит к повышению «качества» структурных формул. (Главная тенденция в развитии структурного метода как раз и состоит в том, чтобы сводить задачи расчета полей к отысканию неопределенных функций с более регулярным поведением.)

2. Анализ исследований и публикаций

В работах [1-4] рассматриваются вопросы применения метода R-функций к решению краевых задач механики, электродинамики и др. Однако построенные с помощью R-функций функции $\omega(x,y)$ и $\omega(x,y,z)$, являющиеся решениями соответствующих обратных задач аналитической геометрии, имеют в угловых точках исследуемых областей производные, значения которых равны бесконечности. Следовательно, построенные структуры решения краевых задач в этих работах, точно удовлетворяющие граничным условиям второго, третьего и четвертого рода в угловых точках области и точках пересечения границ контакта разнородных сред и границы области равны бесконечности. Нефизичное поведение этих структур решений краевых задач в угловых точках области делает точное значение функционала соответствующих вариационных задач равным бесконечности.

Отступление от угловых точек при вычислении интегралов, определяющих элементы соответствующих алгебраических уравнений, к решению которых приводят метод Рунге и методы взвешенных невязок скорее похоже на «мифологический» подход, чем на

математический подход устранения сингулярных особенностей.

В статьях [5-7] подробно рассматриваются вопросы решения обратных задач дифференциальной геометрии с помощью S-функций. С помощью S-функций возможно построить уравнения $\omega(x,y,z)=0$ таким образом, чтобы они не только в асимптотическом приближении с любой наперед заданной степенью точности описывали поверхности тел любой заданной сложной формы, но и были непрерывными и имели управляемые непрерывные производные до $2k-1$ порядка. S-функции позволяют устранить нефизичности в аналитических структурах решений краевых задач в окрестностях угловых точек и ребер, и, таким образом, строить консервативные структуры решения краевых задач.

3. Цель работы

Разработка новых приближенных аналитических подходов к математическому моделированию трехмерных температурных полей в ограниченных телах сложного поперечного сечения.

Применение конечных интегральных преобразований к решению трехмерных задач теплопроводности для областей, ограниченных двумя параллельными плоскостями и поверхностью сложной формы, образующей которой перпендикулярны к данным плоскостям сводит решение исходной трехмерной задачи к решению соответствующей двумерной задачи в области изображений.

Совместное применение S-функций, структурного и одного из проекционных методов к решению последней задачи позволяет получить приближенное аналитическое решение данной задачи в виде функционального ряда по базисным функциям, удовлетворяющим граничным условиям на боковой поверхности исследуемой области.

Формула обратного конечного интегрального преобразования [8] позволяет получить решение исходной трехмерной задачи теплопроводности в виде функционального ряда, содержащего решение двумерной задачи в области изображений, ядро преобразования и коэффициенты нормировки.

4. Основные материалы исследования

Пусть рассматриваемая область Ω ограничена плоскостями $z=0$ и $z=d$ и цилиндрической (призматической) поверхностью сложной формы $S = \bigcup_{p=1}^m S_p$, образующие которой перпендикулярны к данным плоскостям.

Пусть $\omega(x,y,z)$ – функция, характеризующая удельную мощность источников энергии в области Ω . На плоскостях $z=0$ и $z=d$ и некоторых из поверхностей S_p происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой определенной температуры, а на остальных цилиндрических (призматических) поверхностях подерживается заданная температура.

Краевая задача теплопроводности для данного случая сводится к интегрированию уравнения

$$\Delta u(x, y, z) = -F(x, y, z) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + h_d u \right) \Big|_{z=d} = f_d, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} - h_0 u \right) \Big|_{z=0} = f_0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v_1} + h_1 u \right) \Big|_{S_1} = \bar{f}_1, \quad u \Big|_{S_i} = \bar{\psi}_i, \quad (3)$$

где

$$l=1, \dots, m_1; i=m_1+1, \dots, m; h_0=\alpha_0 \lambda^{-1}; h_d=\alpha_d \lambda^{-1}; h_1=\alpha_1 \lambda^{-1};$$

$\alpha_0, \alpha_d, \alpha_1$ – коэффициенты теплоотдачи;

λ – коэффициент теплопроводности среды (материала конструктивного элемента);

$F=\omega \lambda^{-1}$; v_1 – направление внешней нормали к поверхности S_1 .

Применим к уравнению (1) и граничным условиям (3) конечное интегральное преобразование

$$\bar{u}(x, y, \gamma) = \int_0^d K(z, \gamma) u(x, y, z) dz, \quad (4)$$

где ядро

$$K(z, \gamma) = \cos(\gamma z) + h_0 \gamma^{-1} \sin(\gamma z) \quad (5)$$

является ненулевым решением задачи Штурма-Лиувилля для уравнения

$$\frac{d^2 K}{dz^2} + \gamma^2 K = 0 \quad (6)$$

$$\left(\frac{dK}{dz} + h_d K \right) \Big|_{z=d} = 0, \quad \left(\frac{dK}{dz} - h_0 K \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

а $\gamma=\gamma_m$ ($m=1, 2, \dots$) – корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(\gamma_m d) = (h_d + h_0) \gamma_m (\gamma_m^2 - h_d h_0)^{-1} \quad (8)$$

В области изображений краевая задача (1) – (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \gamma^2 \bar{u} = -\bar{F} + f_0 K(0, \gamma) - f_d K(d, \gamma) \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v_1} + h_1 \bar{u} \right) \Big|_{S_1} = \bar{f}_1, \quad \bar{u} \Big|_{S_i} = \bar{\psi}_i \quad (10)$$

где

$$\bar{F} = \int_0^d K(z, \gamma) F dz; \quad \bar{f}_1 = \int_0^d f_1 K(z, \gamma) dz; \quad \bar{\psi}_i = \int_0^d \psi_i K(z, \gamma) dz.$$

Структуру решения задачи (9) – (10) в соответствии с рекомендацией работы [9] представим в виде

$$\bar{u}_n(x, y, \gamma) = \bar{\Phi}_0(x, y, \gamma) + \sum_{i+j=0}^n C_{ij}(\gamma) \chi_{ij}(x, y), \quad (11)$$

где

$$\bar{\Phi}_0(x, y, \gamma) = \eta - \omega \left\{ \left[\sum_{l=1}^{m_1} (-h_l \eta + \bar{f}_l) \tau_l \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^{m_1} \tau_l \right]^{-1} + D_1^{(01)} \eta \right\};$$

$$\eta = \left[\sum_{i=m_1+1}^m \bar{\psi}_i \tau_i \right] \cdot \left[\sum_{i=m_1+1}^m \tau_i \right]^{-1}$$

$$\omega_{01} = \omega_1 \wedge_S \left[\omega_2 \wedge_S \left(\dots \wedge_S \omega_{m_1} \right) \right];$$

$$\chi_{ij}(x, y) = P_i(x) P_j(y) \omega_{02} +$$

$$+ \omega \left\{ \left[\sum_{l=1}^{m_1} h_l P_l(x) P_j(y) \omega_{02} \tau_l \right] \cdot \left[\sum_{l=1}^{m_1} \tau_l \right]^{-1} + \right.$$

$$\left. + D_1^{(01)} \left[P_i(x) P_j(y) \omega_{02} \right] \right\}; \quad \omega_{02} = \prod_{i=m_1+1}^m \omega_i;$$

$$\omega = \omega_{01} \wedge_S \omega_{02}; \quad D_1^{(01)} = \frac{\partial \omega_{01}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{01}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$$

Здесь $P_i(x)P_j(y)$ – полиномы Чебышева, Лежандра и т.п.; $\tau_i = \omega_i^{-1}$.

Функции $\omega_i(x, y)$ и $\omega_1(x, y)$ строятся согласно рекомендациям работ [5-7] с помощью S-функций и удовлетворяют условиям

$$\omega_i \Big|_{S_i} = 0; \quad \omega_i > 0; \quad \omega_1 \Big|_{S_1} = 0; \quad \omega_1 > 0;$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial v_1} \Big|_{S_1} = -1; \quad (x, y) \in \Omega \quad (12)$$

Система Бубнова-Галеркина для отыскания неопределенных коэффициентов $C_{ij}(\gamma)$ структуры (11) имеет вид

$$\sum_{i+j=0}^n (A_{ijks} + B_{ijks} \gamma^2) C_{ij}(\gamma) = E_{ks}(\gamma); \quad (k+s=0, 1, \dots, n), \quad (13)$$

где

$$A_{ijks} = \int_{\Omega_1} \Delta \chi_{ij} \chi_{ks} d\Omega_1; \quad B_{ijks} = - \int_{\Omega_1} \chi_{ij} \chi_{ks} d\Omega_1;$$

$$E_{ks}(\gamma) = \int_{\Omega_1} \left[-\bar{F} + f_0 K(0, \gamma) - f_d K(d, \gamma) - \Delta \bar{\Phi}_0 + \gamma^2 \bar{\Phi}_0 \right] \chi_{ks} d\Omega_1,$$

а Ω_1 – поперечное сечение рассматриваемого тела.

Решение системы (13) находим по формуле

$$C_{ij}(\gamma) = \left[\sum_{k+s=0}^n E_{ks}(\gamma) \Delta_{ijks}(\gamma) \right] \cdot \left[\Delta(\gamma) \right]^{-1}; \quad (i+j=0, 1, \dots, n), \quad (14)$$

где

$\Delta_{ijks}(\gamma)$ – алгебраические дополнения элементов

$(A_{ijks} + B_{ijks} \gamma^2)$ определителя $\Delta(\gamma)$,

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} A_{0000} + B_{0000} \gamma^2 & \dots & A_{0n00} + B_{0n00} \gamma^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{000n} + B_{000n} \gamma^2 & \dots & A_{0n0n} + B_{0n0n} \gamma^2 \end{vmatrix};$$

Формула обратного конечного интегрального преобразования имеет вид

$$u_n(x, y, z) = \sum_{m=1}^p \bar{u}_n(x, y, \gamma_m) \left[\int_0^d K^2(z, \gamma_m) dz \right]^{-1} K(z, \gamma_m), \quad (15)$$

где функции $K(z, \gamma_m)$ и $\bar{u}_n(x, y, \gamma_m)$ определяются по формулам (5) и (11) или по другим формулам, в зависимости от характера взаимодействия поверхностей конструктивного элемента с окружающей его средой.

Пусть в сечении плоскостями $z = \text{const}$ тела имеют форму, представленную на рис. 1 а,б, и определение температурного поля в данных телах сводится к решению задачи теплопроводности

$$\Delta T = -F \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} - Bi_0 T \right) \Big|_{z=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} + Bi T \right) \Big|_{z=1} = 0; \quad (17)$$

$$LT \Big|_s = f, \quad (18)$$

где на рис. 1а (задача 1) $Bi_0 = 0$ и условие (18) имеет вид

$$T \Big|_{x=0} = T_0; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} + Bi T \right) \Big|_{x=a_1} = 0; \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} + Bi T \right) \Big|_{y=b_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0,$$

а для рис. 1б (задача 2) условие (19) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_1} = q(z); \quad T \Big|_s = T_0(y, z) \quad (20)$$

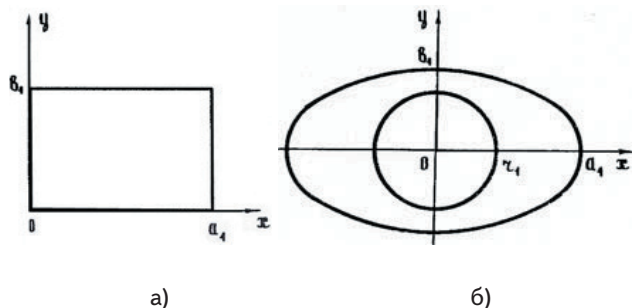


Рис. 1. Сечение элемента конструкции: а - задача 1; б - задача 2

Для задачи 1 $F = 0$; $a_1 = a d^{-1}$; $b_1 = b d^{-1}$.

Для задачи 2

$$F(x, y, z) = 4(1+z-z^2) - 2(\rho^2 + r_1); \quad q(z) = 2r_1(1+z-z^2);$$

$$T_0(y, z) = (1+z-z^2) [a_1^2 + y^2(1-a_1^2 b_1^{-2}) + r_1]; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Применим к уравнению (16) и граничным условиям (18) интегральное преобразование (4),

$$\text{где } u(x, y, \gamma) = \bar{T}(x, y, \gamma); \quad d = 1.$$

В области изображений получим

$$\Delta \bar{T} - \gamma^2 \bar{T} = -\bar{F} \quad (21)$$

$$L\bar{T} \Big|_s = -f, \quad (22)$$

где для задачи 1

$$\bar{T} \Big|_{x=0} = \bar{T}_0; \quad \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + Bi \bar{T} \right) \Big|_{x=a_1} = 0; \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + Bi \bar{T} \right) \Big|_{y=b_1} = 0; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0,$$

а для задачи 2

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_1} = \bar{q}; \quad \bar{T} \Big|_s = \bar{T}_0. \quad (24)$$

Структуру решения задачи 1, точно удовлетворяющую условиям (23), представим в виде [9]

$$\bar{T}(x, y, \gamma) = \bar{\Phi}_0(x, y, \gamma) + \sum_{ij} C_{ij}(\gamma) \chi_{ij}(x, y), \quad (25)$$

где

$$\Phi_0 = 2 \sin \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \omega_2^2 \left[-Bi T_0 x (1 + a_1 Bi)^{-1} + T_0 \right] (\omega_1 + \omega_2^2 + \epsilon)^{-1}$$

$$\chi_{ij} = \left\{ P_i(x) x - \omega_1 \left[\frac{dP_i(x)}{dx} \frac{d\omega_1^*}{dx} + Bi x P_i(x) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ P_j(y) - \omega_2^* \left[\frac{dP_j(y)}{dy} \frac{d\omega_2^*}{dy} + Bi P_j(y) \right] \right\};$$

$$\omega_1^* = a_1 - x; \quad \omega_1 = x \omega_1^* a_1^{-1};$$

$$\omega_2 = b_1^2 - y^2; \quad \omega_2^* = \omega_2 (2b_1)^{-1};$$

$$P_i(x), P_j(y)$$

- полиномы Чебышева, $\epsilon = 10^{-10}$

Структуру решения задачи 2, точно удовлетворяющую условиям (24) выберем в виде (25), где

$$\Phi_0(x, y, \gamma) = (\bar{T}_0 \omega_1^2 + \omega_1 \omega_2 \bar{q}) (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \epsilon)^{-1};$$

$$\chi_{ij} = \left[\omega_1^2 \omega^2 \Phi_{ij} + \omega_2^2 (\Phi_{ij} - \omega_1 D_1 \Phi_{ij}) \right] (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \epsilon)^{-1};$$

$$\omega_1 = \rho^2 - r_1^2; \quad \Phi_{ij} = (\rho^i + r_1^{2i+1} \rho^{-1}) \cos(2j\text{л}\theta);$$

$$\omega_2 = 1 - \rho^2 (a_1^{-2} \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta).$$

Коэффициенты $C_{ij}(\gamma)$ определялись из соответствующих систем Ритца.

Решения задач 1 и 2 получим в виде (15).

5. Вычислительный эксперимент

Численные результаты для задачи 1 при $Bi=1,0$; $\rho=36$; $T=1$; $a_1=b_1=1$; $n=6$; 15; 28; $z=0,6$ приведены в

табл. 1 с первой по третью строку ячеек таблицы сверху вниз соответственно. В нижних строках ячеек таблицы приведены численные результаты для решения, полученного методом Фурье [10].

Численные результаты для задачи 2 при $Bi=1,0$; $p=50$; $T_0^*=1$; $a_1=1$; $b_1=0,7$; $n=15$; 21 ; 28 ; $z=0,4$; $r_1=0,5$ приведены в табл. 2 с первой по третью строку ячеек таблицы сверху вниз соответственно. В нижних строках ячеек таблицы приведены численные результаты для варианта, когда функция $T(x,y,z)=(1+z-z^2)(\rho^2+r_1)$ является точным решением задачи.

Таблица 1

Распределение температуры в прямоугольном параллелепипеде при $z=0,6$

$x \setminus y$	Парам. вычисления	0,0	0,4	0,8
0,0	n=6	0,999628	0,999636	0,999634
	n=15	0,999891	0,999894	0,999893
	N=28	0,999982	0,999984	0,999983
	м-д Фурье	0,999999	0,999999	0,999999
0,4	n=6	0,709171	0,686042	0,606941
	n=15	0,720643	0,700452	0,617159
	N=28	0,732084	0,711514	0,627749
	м-д Фурье	0,732176	0,711623	0,628063
0,8	n=6	0,453804	0,430986	0,359034
	n=15	0,462923	0,441349	0,337386
	N=28	0,473324	0,452647	0,382693
	м-д Фурье	0,473407	0,452735	0,382783

Таблица 2

Распределение температуры в тепловыделяющем элементе (рис. 2) при $r_1=0,5$ и $z=0,4$

$x \setminus y$	Парам. вычисления	0,2	0,4	0,6
0,2	n=15	-	-	1,065389
	n=21	-	-	1,113792
	n=28	-	-	1,115629
	точное решение	-	-	1,116000
0,6	n=15	1,065389	1,203781	-
	n=21	1,113792	1,259989	-
	n=28	1,115629	1,263914	-
	точное решение	1,116000	1,264800	-
1	n=15	1,862523	1,975249	-
	n=21	1,906155	2,024349	-
	n=28	1,908734	2,057621	-
	точное решение	1,909580	2,058400	-

6. Расчет температурного поля в цилиндрическом блоке аксиально-поршневого насоса

Упрощенная схема симметричного элемента цилиндрического блока аксиально-поршневого насоса представлена на рис. 2. Такие насосы широко применяются в строительных и дорожных машинах, авиационных двигателях.

Цилиндрический блок нагревается от действия сил трения вдоль поверхностей контакта с сопряженными,

движущимися относительно этих поверхностей деталями, в основном с поршнем.

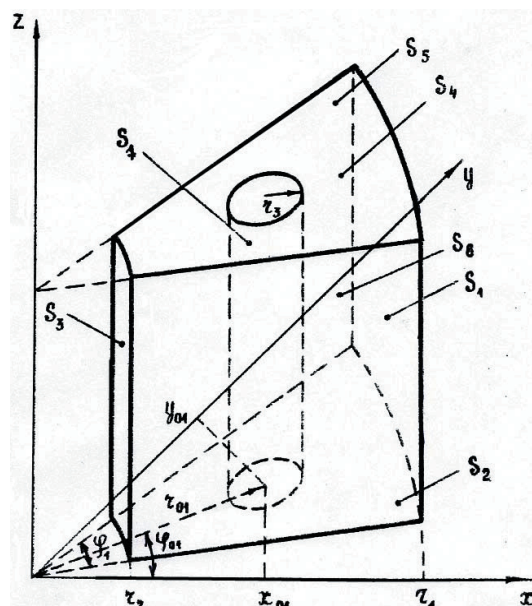


Рис. 2. Упрощенная схема симметричного элемента цилиндрического блока аксиально-поршневого насоса

С поверхностей S_1, S_2, S_3 происходит отдача тепла в окружающую цилиндрический блок среду (масло). На поверхности S_4 происходит выделение тепла в результате трения о сопряженную деталь. Поверхности S_5 и S_6 симметричного элемента теплоизолированы. Внутри блока через поверхность S_7 подается постоянный тепловой поток q_7 .

Определение температурного поля в симметричном элементе цилиндрического блока сводится к решению задачи теплопроводности

$$\Delta T = -F \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} + Bi_2 T \right) \Big|_{S_2} = f_2; \quad \left(-\frac{\partial T}{\partial z} + Bi_4 T \right) \Big|_{S_4} = f_4, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} + Bi_1 T \right) \Big|_{S_1} = f_1; \quad \left(-\frac{\partial T}{\partial \rho} + Bi_3 T \right) \Big|_{S_3} = f_3; \tag{28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_5} \Big|_{S_5} = \frac{\partial T}{\partial v_6} \Big|_{S_6} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial v_7} \Big|_{S_7} = q_7,$$

где $T=T(x,y,z)$; $v_k(k=5; 6; 7)$ направление внешней нормали к поверхности S_k ;

$$Bi_k=13,3 \quad (k=1; 2; 3; 4);$$

$$F=F_1 L^2=3,48 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$f_k=Bi_k T_{cp1}=658,1 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (k=1; 2; 3);$$

$$f_4=Bi_4 T_{cp2};$$

$$q_7=q_7^* L=-0,95 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad L=1 \text{ м};$$

$$z=z_1 L; \quad x=x_1 L; \quad y=y_1 L; \quad d=d_1 L; \quad \rho=(x^2+y^2)^{1/2}.$$

Применим к уравнению (26) и граничным условиям (28) интегральное преобразование

$$\bar{T}(x,y,\gamma) = \int_0^{d_1} T(x,y,z) K(z,\gamma) dz, \tag{29}$$

где

$$K(z, \gamma) = \cos(\gamma z) + Bi_4 \gamma^{-1} \sin(\gamma z),$$

а $\gamma = \gamma_m$ ($m = 1, 2, \dots$) - корни трансцендентного уравнения $tg(\gamma_m d_1) = (Bi_2 + Bi_4) \gamma_m (\gamma_m^2 - Bi_2 Bi_4)^{-1}$.

В области изображений для $\bar{T}(x, y, \gamma)$ получим

$$\Delta \bar{T} - \gamma^2 \bar{T} = -\bar{F} + f_4 K(0, \gamma) - f_2 K(d_1, \gamma) = \bar{F}_1 \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} + Bi_1 \bar{T} \right) \Big|_{S_1} = \bar{f}_1; \quad \left(-\frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} + Bi_3 \bar{T} \right) \Big|_{S_3} = \bar{f}_3; \quad (31)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial v_5} \Big|_{S_5} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial v_6} \Big|_{S_6} = 0; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial v_7} \Big|_{S_7} = \bar{q}_7$$

Структуру решения данной задачи представим в виде (25), где

$$\Phi_0 = -\omega (\omega_3 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \bar{f}_1 + \omega_1 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \bar{f}_3 + \omega_1 \omega_3 \omega_5 \omega_6 \bar{q}_7) \beta^{-1};$$

$$\chi_{ij} = \Phi_{ij} + \omega \Phi_{ij} W \beta^{-1} - \omega D_1 \Phi_{ij};$$

$$W = Bi_1 \omega_3 \omega_5 \omega_6 \omega_7 + Bi_3 \omega_1 \omega_5 \omega_6 \omega_7;$$

$$\beta = \omega_3 \omega_5 \omega_6 \omega_7 + \omega_1 \omega_3 \omega_5 \omega_6 +$$

$$+ \omega_1 \omega_3 \omega_6 \omega_7 + \omega_1 \omega_3 \omega_5 \omega_7 + \omega_1 \omega_3 \omega_5 \omega_6;$$

$$\omega_1 = (x^2 + y^2 - r_{11}^2) (2r_{11})^{-1}; \quad \omega_3 = (r_{22}^2 - x^2 - y^2) (2r_{22})^{-1};$$

$$\omega_5 = (\mu_1 x - y) (\mu_1^2 + 1)^{-1}; \quad \omega_6 = (y - \mu_2 x) (\mu_2^2 + 1)^{-1};$$

$$\omega_7 = \left[(x - x_{01})^2 + (y - y_{01})^2 - r_{33}^2 \right] (2r_{33})^{-1};$$

$$\omega = \left[\omega_1 \omega_3 (r_{22}^2 - r_{11}^2)^{-1} \wedge_S \omega_7 \right] \wedge_S (\omega_5 \wedge_S \omega_6);$$

$$\Phi_{ij} = \rho^{2\pi i(\theta_2)^{-1}} \cos(2\pi j\phi \cdot (\phi_2)^{-1}); \quad \phi = \arctg(y/x);$$

$$r_{ii} = r_i L^{-1} \quad (i=1;2;3); \quad x_{01} = x_{01}^* L^{-1}; \quad y_{01} = y_{01}^* L^{-1}.$$

При расчете рассматривался симметричный элемент цилиндрического блока из бронзы для $r_1=0,026$ м; $r_2=0,004$ м; $2r_3=0,008$ м; $d=0,048$ м; $\mu_1=4$; $\mu_2=0,25$; $\phi_2=1,0804$; $x_{01}^*=0,00812$ м; $y_{01}^*=0,00915$ м.

Система Бубнова-Галеркина для отыскания неопределенных коэффициентов $C_{ij}(\gamma)$ имеет вид (13), где $\bar{E}_{ks}(\gamma) = \iint_{\Omega} (\bar{F}_1 - \Delta \bar{\Phi}_0 + \gamma^2 \bar{\Phi}_0) \chi_{ks} d\Omega_1$, а Ω_1 - поперечное сечение рассматриваемого тела.

Решение задачи (26)- (28) получим в виде (15).

На рис. 3 ($z^* = z d_1^{-1}$) приведены результаты расчета температуры ($T_1 = T T_{cp2}^{-1}$) поверхности цилиндрического блока ($\phi = \phi_{01}$) для пятнадцати координатных функций и $p=50$. Кружками отмечены экспериментальные данные, полученные в НИИСтройдормаш (Россия, г. Москва) Р.М. Пасынковым с использованием хромелькопелевых термопар с головкой диаметром 1 – 1,5 мм., которая получается сваркой в вольтовой дуге. Под термопару в теле сверлилось отверстие диаметром соответственно 1,2 – 2 мм. Сверление не доходило до поверхности на 0,1 – 0,2 мм. Для плотного соединения термопары с телом использовалась специальная

фольга, с помощью которой термопара без повреждения приваривалась к телу. Погрешность измерения данными термопарами с использованием современной аппаратуры лежала в пределах 0,5 – 0,15° С.

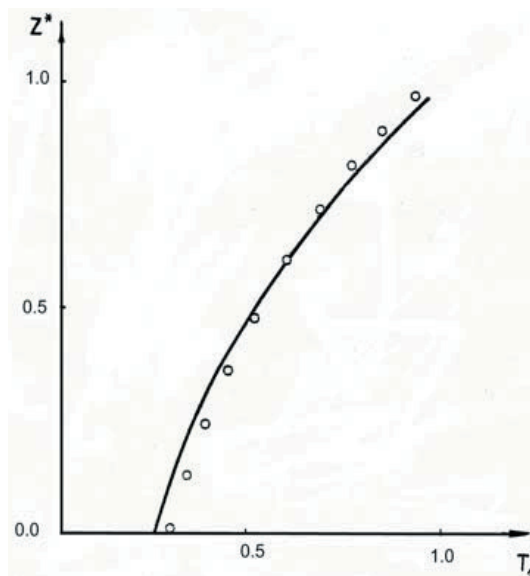


Рис. 3. Распределение температуры на поверхности цилиндрического блока при $\phi = \phi_{01}$

Тестовая задача для данного случая выбиралась в виде

$$\Delta T = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{S_1} = \frac{r_1}{3}; \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{S_3} = \frac{r_2}{3}; \quad \frac{\partial T}{\partial v_7} \Big|_{S_7} = f_7; \quad \frac{\partial T}{\partial v} \Big|_{S_5 \cup S_6} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=d_1} = \frac{d_1}{3}, \quad (34)$$

где

$$T = T(x, y, z);$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2};$$

$$f_7 = (3r_3)^{-1} (r_3^2 + \rho r_{01} \cos(\phi - \phi_{01}) - r_{01}^2).$$

После применения к уравнению (32) и граничным условиям (33) интегрального преобразования (29) с ядром преобразования

$K(\gamma, z) = \cos(\gamma z) = \cos(\text{Am}z \cdot (d_1)^{-1})$, для задачи в области изображений структуру решения представим в виде (25),

$$\text{где } \bar{f}_i = \frac{r_i}{3} \int_0^{d_1} K(r, z) dz, \quad (i=1,2,7).$$

Расчет проводился при $r_{11}=1,0$; $r_{22}=0,1$; $r_{01}=0,5$; $\phi_{01}=2\pi 7^{-1}$.

В табл. 3 приведены результаты расчета температуры при $z=0,5$ предложенным методом для пятнадцати координатных функций при $p=50$ для варианта, когда точным решением задачи является функция

$$T(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 6^{-1}$$

Таблица 3

Распределение температуры в симметричном элементе цилиндрического блока (тестовая задача)

x\y	решение	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	приближ.	0,055000	0,075000	0,108333	0,155000	0,215000
	точное	0,054628	0,074458	0,106092	0,153752	0,213999
0,4	приближ.	0,075000	0,095000	0,128333	0,175000	0,235000
	точное	0,074458	0,093144	0,127786	0,174052	0,234119
0,6	приближ.	0,108333	0,128333	0,161333	0,208333	-
	точное	0,106092	0,127786	0,159998	0,207428	-

Выводы

Предложенный в статье подход к решению трехмерных задач теплопроводности, ограниченных поверхностями сложной формы, образующие которых перпендикулярны плоскостям, выполняющим роль верхнего и нижнего основания тел, впервые позволяет получить приближенные аналитические решения

данных задач при точном удовлетворении граничных условий.

Это представляет новые большие научно-практические возможности в организации банка данных трехмерных температурных полей в пространственных элементах различных конструкций.

Требуемый объем памяти для хранения информации, представленной в виде функциональных рядов по базисным функциям с коэффициентам при них в виде интерполяционных полиномов по теплофизическим параметрам, минимум на пять-шесть порядков меньше, чем необходимо для хранения аналогичной дискретной информации, полученной методом конечных разностей и конечных элементов. Скорость экспресс-анализа тепловых режимов элементов в диалоговом режиме с компьютером по сравнению с используемыми численными методами возрастает не менее чем в тысячу раз.

Использование полной системы S-функций позволяет получить решения обратных задач дифференциальной геометрии с любой заданной степенью точности, а также впервые в мировой научной практике управлять образованием формы поверхности функций ω внутри области любой сложной формы, уравнение $\omega=0$ для которой описывает поверхность этой области. Данные качественные особенности весовых функций ω в консервативных аналитических структурах решения краевых задач согласуются с качественными особенностями подхода к решению краевых задач, содержащихся в методах граничных элементов [11].

Литература

1. Рвачев, В.Л. Методы алгебры-логики в математической физике [Текст] / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1974. – 259 с.
2. Рвачев, В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения физике [Текст] / В.Л. Рвачев. - К. : Наук. думка, 1982. – 552с.
3. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики [Текст] / Ю.Г. Стоян, В.С. Проценко, Г.П. Манько и др. - К. : Наук. думка, 1986. – 264 с.
4. Курпа, Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек [Текст] / Л.В. Курпа. – Х.: НТУ «ХПИ», 2009. – 406 с.
5. Слесаренко, А. П. S-функции в обратных задачах аналитической геометрии и моделировании тепловых процессов [Текст] / А. П. Слесаренко // Восточно-Европейский Журнал Передовых Технологий. - 2011. - № 3/4(51). - С. 41-46.
6. Слесаренко, А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм [Текст] / А. П. Слесаренко // Восточно-Европейский Журнал Передовых Технологий. - 2012. - № 1/4(55). - С. 4–10.
7. Слесаренко, А. П. S-функции в построении консервативных структур решения геометрических обратных краевых задач [Текст] / А. П. Слесаренко // Восточно-Европейский Журнал Передовых Технологий. – 2012. - № 2/4(51). - С. 60-66.
8. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М. : Наука, 1974. – 524 с.
9. Слесаренко, А.П. Развитие алгебро-логического метода и его приложения к многомерным нелинейным задачам теплопроводности для однородных и композитных сред. [Текст] : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. Наук / А.П. Слесаренко – М., 1984. – 36 с.
10. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
11. Бребия, К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бребия, Ж. Теллес, Л. Врубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.