$$T(y,t)=\left[\frac{R}{\varepsilon(t)}\right]^{\frac{3}{2}}\exp\left[\frac{Ay^2}{4a}\varepsilon(t)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n y}{y}\exp\left[-\frac{\mu_n^2 at}{R\varepsilon(t)}\right]\times$$
$$\times\int_0^1 yf(Ry)\exp\left[-\frac{AR}{4a}y^2\right]\sin(\mu_n y)dy. \qquad (22)$$

Для нахождения коэффициента А в законе движения поверхности фазового перехода используется условие (12). Если граница $\varepsilon(t)$ неподвижна, то, полагая в уравнении (22) А=0, получим классическое решение задачи об охлаждении сферы радиуса R, на поверхности которой поддерживается нулевая температура, а начальное распределение произвольно.

## 5. Выводы

Полученное выражение изменения параметров капли с учетом её испарения и охлаждения за время полета от картриджа до бумаги позволяет теоретически достаточно точно определить возможное разрешение формируемого изображения, поскольку у нас имеется возможность рассчитывать ожидаемые геометрические размеры капель краски. Справедливости ради следует отметить, что вопросы растекания краски на бумаге в данной работе не рассматриваются, хотя, как видно из рис. 5, размер точки на бумаге в процессе высыхания краски изменяется. Но это уже другая интересная задача для исследования.

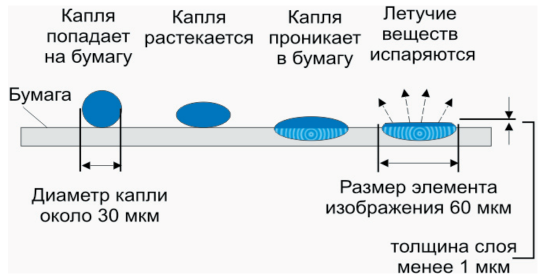


Рис. 5. Образование элемента изображения в струйной печати в результате взаимодействия капли с запечатываемым материалом

Литература

1. Эккерт, Э.Р. Теория тепло-и массообмена [Текст] / Э.Р. Эккерт, Р.М. Дрейк. - М.: Госэнергоиздат, 1961. – 278 с.
2. Дульнев, Г.Н. Теплообмен в радиоэлектронной аппаратуре [Текст] / Г.Н. Дульнев, Э.М. Семяшкин. - Л.: Энергия, 1968. – 360 с.
3. Азаренков, В.И. К вопросу разработки общего подхода к расчету нестационарных температурных полей электронных аппаратов различной геометрической формы [Текст] / В.И. Азаренков // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2005. – №5/2 (17). - С. 64 - 68.

УДК 517.955; 636.5

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО МИКРОБИОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

**Д.А. Левкин**
Аспирант
Кафедра кибернетики
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П.Василенко
ул. Артема, 44, г. Харьков, Украина, 61002
Контактный тел.: (057) 716-42-63
E-mail: artur.lav@3g.ua

***У статті наведено аналітичний розв'язок за допомогою метода відокремлених змінних математичної моделі рівняння теплопровідності для багатошарового мікробіологічного об'єкта***

***Ключові слова: метод відокремлених змінних, рівняння теплопровідності***

***В статье приведено аналитическое решение с помощью метода разделенных переменных математической модели уравнения теплопроводности для многослойного микробиологического объекта***

***Ключевые слова: метод разделенных переменных, уравнение теплопроводности***

***We obtain the analytical solution of the mathematical model of the heat equation for multilayer microbiological object using the method of separating variables***

***Keywords: the method of separating variables, the heat equation***

## Введение

Эмбрион с теплофизической точки зрения представляет собой многослойный, нестационарный, нелинейный микробиологический объект с различной толщиной каждого слоя и различными коэффициентами теплопроводности на каждом слое. Поэтому при действии лазерного излучения на эмбрион происходит неоднородный нагрев биообъекта [2]. Техническая реализация математической модели лазерного теплового влияния на эмбрион основана на использовании методики лазерного хетчинг. Она применяется для рассечения блестящей оболочки эмбриона (зоны пеллюцида) и является аналогом природного вылупления эмбриона, которое происходит на стадии бластоцисты. Однако, при принятии решения об использовании конкретной методики хетчинг следует учитывать гормональный статус животного, качество эмбрионов, подвергались ли эмбрионы предварительной криоконсервации [1].

## Постановка задачи

При взаимодействии лазерного излучения с эмбрионом для избежания коагуляции, деструкции оболочки эмбриона и обеспечения его жизнеспособности необходим контроль уровня нагрева в ближайшей точке приложения сфокусированного лазерного луча на оболочке эмбриона.

Кроме этого, необходим тщательный контроль уровня нагрева слоев эмбриона в зависимости от коэффициентов теплопроводности на этих слоях и толщины каждого слоя эмбриона [1]. Учет всех этих особенностей при построении математической модели лазерного воздействия на эмбрион позволит повысить уровень его жизнеспособности.

Современная теория систем дифференциальных уравнений связанная с описанием процессов развивающихся во времени и стационарных процессов. Процессы, развивающиеся во времени, записываются с помощью систем дифференциальных уравнений. При этом, важным этапом является отыскание решения дифференциальных уравнений. Еще в середине XVIII века Ейлер и Даламбер изучали уравнения теплопроводности, волновое уравнение в двумерном и трехмерном случаях [6,7]. Научные труды Ейлера, Даламбера и Бернулли заложили основу современной теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В настоящее время революционное развитие вычислительной техники привело к появлению многочисленных методов вычисления. Численные методы широко применяются для решения задач современной физики и нелинейной динамики: волновой механики, акустики, диффузии, теории теплопроводности. Одними из самых универсальных методов являются численные методы сеток, разностные методы и методы Галеркина, аналитический метод разделенных переменных [3].

Разностные схемы и метод сеток применяются для решения дифференциального уравнения в частных производных с ограничениями вида краевых или граничных условий. Точность аппроксимации разностными методами и методом сеток не превышает $O(h^2)$, где $h$ - шаг сетки. Метод сеток и разностные методы обеспечивают первый порядок точности по времени и второй порядок точности по пространственной координате [4].

Стационарные и нестационарные уравнения могут быть решены одной из разновидностей метода Галеркина. Метод Галеркина для построения матрицы итоговой системы требует вычисления интегралов по всему отрезку. Если в методе Галеркина выбраны сравнительно простые базисные функции $\varphi_i(x)$, $i = 1,2,...,n$, то матрица коэффициентов будет вычисляться сравнительно легко [5].

Метод разделенных переменных является аналитическим методом решения дифференциальных уравнений.

Первое время метод разделенных переменных применялся к дифференциальным уравнениям, искомые функции которых представляют собою выражения, зависящие от разных переменных. В настоящее время, метод разделенных переменных для уравнений в частных производных представляет собой равенство между собой функций от разных независимых переменных [6,7].

В работе для решения математической модели уравнения теплопроводности (4) применим метод разделенных переменных, который даст возможность получить точное решение уравнения теплопроводности (4).

## Основная часть

Согласно [2], эмбрион представляет собой многослойный, нестационарный, нелинейный микробиологический объект с разными коэффициентами теплопроводности на каждом слое $\lambda_e$, $e = 1,...,4$. При этом коэффициент теплопроводности $\lambda$ для кусочно-однородной области имеет вид:

$$\lambda(x,y,z)=\begin{cases}\lambda_1, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_1 - \text{область бластомеров}\\ \lambda_2, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_2 - \text{область перивителлиро}-\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ванного пространства}\\ \lambda_3, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_3 - \text{оболочка эмбриона}\\ \lambda_4, \text{если } (x,y,z)\in\Omega_4 - \text{питательная среда}\end{cases}$$

Модель нагрева (1) в сферической системе координат, построенная путем применения закона сохранения энергии к многослойной неподвижной среде, имеет вид:

$$\rho_e c_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = \lambda_e\left(\frac{\partial^2 T_e}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T_e}{\partial r}\right), \quad e = 1,...,4. \qquad (1)$$

Равенства (2) выражают условия идеального теплового контакта слоев:

$$T_{e-1} = T_e, \quad -\lambda_{e-1}\frac{\partial T_{e-1}}{\partial r} = -\lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial r}, \qquad (2)$$

$$T_e(r,0) = T_0,$$

Граничные условия (3) относятся к одностороннему обогреву:

$$-\lambda_3\frac{\partial T_3}{\partial r}(0,t) = q, \quad 0\le t\le\tau_h, \qquad (3)$$

тепловой поток $q$, направленный от нагревателя к единице поверхности объекта, рассчитывается по формуле:

$$q = \frac{T_4 - T_3}{\dfrac{1}{\alpha_3}+\dfrac{1}{\alpha_4}+\sum\limits_{e=1}^{4}\dfrac{\delta_{0e}}{\lambda_e}},$$

где $\alpha_3, \alpha_4$ - коэффициенты теплоотдачи на оболочке и питательной среде эмбриона;

$\delta_{0e}$ - толщина $e$ - го слоя эмбриона;

$T_3$ - температура в конце нагрева на оболочке эмбриона;

$T_4$ - температура в конце нагрева питательной среды эмбриона.

$\rho_e, c_e, \lambda_e$ - плотность, средняя удельная теплоемкость и теплопроводность $e$ - го слоя.

Так как коэффициенты теплопроводности сред $\lambda_e$ не отличаются значительно, то можем принять $\lambda = \max\lambda_e, \; e = 1,..,4$. Построим дифференциальное уравнение в сферической системе координат лазерного теплового воздействия на эмбрион.

Наиболее нагретой будет оболочка эмбриона (зона пеллюцида). Согласно [2], эмбрион представляет собой нестационарное температурное поле шарообразного однородного по теплопроводности тела радиуса R, содержащего в центре дискретный импульсный источник с радиусом $r_0$.

В сферической системе координат дифференциальное уравнение теплопроводности математической модели для эмбриона (1) будет иметь вид:

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right) = \frac{q(r,t)}{pc}, \qquad (4)$$

где T – избыточная температура,

t – время,

$a = \dfrac{\lambda}{pc}$ - коэффициент температуропроводности,

$\lambda$ - коэффициент теплопроводности

$r$ - расстояния от центра источника лазерного воздействия до точки, в которой рассчитывается температурное поле,

$p,c$ - плотность и удельная теплоёмкость соответственно

$q(r,t)$ - плотность источника лазерного воздействия

$$q(r,t) = \begin{cases} q_0, \text{если } r \in [0, r_0], & t \in [0,h] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

$h$ - время воздействия источника

Решим уравнение теплопроводности (4). Применяя метод разделенных переменных запишем общее однородное решение уравнение теплопроводности в виде:

$$T(r,t) = u(r)v(t).$$

Подставив $T(r,t)$ в уравнение (4), получаем:

$$v'(t)u(r) - a(v(t)u''(r) + \frac{2}{r}v(t)u'(r)) = 0$$

Решая уравнение с разделяющими переменными и используя универсальную подстановку для решения уравнения Эйлера [6], получаем общее однородное решение уравнения теплопроводности (4):

$$T_{о.о.}(r,t) = \left(c_1 + \frac{c_2}{r}\right)e^{ct},$$

где $c = const, \; c_1 = const, \; c_2 = const$.

$$T_{реш.у.}(r,t) = \left(c_1 + \frac{c_2}{r}\right)e^{ct} + y_{ч.н.}(r,t)$$

Используя метод разделеннх переменных, будем искать частное неоднородное решение уравнения теплопроводности (4) в виде:

$$y_{ч.н.}(r,t) = f(r)g(t),$$

где с учетом граничных условий уравнения теплопроводности (1):

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \le t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

Используя результаты теоремы про вид решения для линейного неоднородного дифференциального уравнения, в правой части которого стоит квазиполином [6], решение уравнения теплопроводности (4) примет вид:

$$T_{реш.у.}(r,t) = -\frac{q_0}{6a}r^2 + \left(c_1 + \frac{c_2}{r}\right)e^{ct} \qquad (5)$$

Равенство (5) является решением аналитическим методом разделенных переменных уравнения теплопроводности (4).

## Вывод

В статье построена математическая модель уравнения теплопроводности в сферической системе координат для многослойного микробиологического объекта с учетом коэффициентов теплопроводности на каждом слое эмбриона, толщины каждого слоя эмбриона и удельного теплового потока между нагревателем и эмбрионом. Так как коэффициенты теплопроводности каждого слоя эмбриона не отличаются значительно, то для математической модели уравнения теплопроводности (1) написано и решено аналитическим методом разделенных переменных уравнение теплопроводности (4) с усредненными коэффициентами теплопроводности.

Литература

1. Antinori S., Experience with the UV non contact laser in a assisted hatching in human // J of Assist Reprod and Genet., -1997. 14:5: Abstract.
2. Завертяев, Б. П. Биотехнология в селекции и воспроизводстве крупного рогатого скота [Текст] / Завертяев Б. П. – Л. : Агропромиздат, 1989. – 201 с.
3. Калиткин. Н. Н. Численные методы [Текст] / Калиткин Н. Н. – М. : Наука, 1973. – 388с.
4. Годунов, С. К. Разностные схемы [Текст] / С. К. Годунов, В. С. Рябенький – М. : Наука, 1978. – 396с.
5. Флетчер К., Численные методы на основе метода Галеркина [Текст] / Флетчер К. – М. : Мир, 1988. – 352 с.
6. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / Михайлов В. П. – М. : Наука, 1973. – С. 151-197.
7. Петровский, И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными [Текст] / Петровский И. Г. – М. : Наука, 1986. – С. 418-426.