2. Острейковский, В.А. Эксплуатация атомных станций: Учебник для вузов / В.А. Острейковский. М.: Энергоатомиздат, 1999 – 928 с.
3. Маловик, К.Н. Анализ ресурсных характеристик при неоднородном потоке отказов изделий. Методи та прилади контролю якості. [Текст] / К.Н.Маловик. –Івано-Франківськ, 2011.- №26, с.85-89.
4. Болотин, В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций [Текст]/ В.В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1984.- 312 с.
5. Ястребенецкий, М.А. Системы управления и защиты ядерных реакторов [Текст] / М.А. Ястребенецкий, Ю.В. Розен, С.В. Елисеев, А.А. Сиора, В.В. Силер, Л.И. Спектор, В.С. Харченко; Под ред. М.А. Ястребенецкого. – К.: Основа-Прин, 2011.- 768 с.
6. Антонов, А.В. Статистические методы в теории надежности: Учебное пособие [Текст] / А.В.Антонов, М.С. Никулин. – М.: Абрис, 2012.- 390 с.
7. Правила устройства и безопасности эксплуатации оборудования и трубопроводов атомных электрических установок: ПН АЭС-7-008-89. – М.: Энергоатомиздат, 1998.
8. Глоссарий МАГАТЭ по вопросам безопасности. Международное агентство по атомной энергии. – Вена, 2008.
9. Маловик, К.Н.. Совершенствование методов анализа ресурсоспособности изделий. Международный научно-технический журнал Энергетика – известия ВУЗв и энергетических объединений СНГ. [Текст] / К.Н. Маловик – Минск, 2012.-№2, с.50-57.
10. Ходасевич, Г.Б. Обработка экспериментальных данных на ЭВМ: учеб. пособие [Текст] / Г.Б. Ходасевич. СПб.: СПбГТУ, 2002. Ч. 2 : Обработка многомерных данных. 82 с.
11. Бен-Ари, М. Языки программирования. Практический сравнительный анализ [Текст] / М. Бен-Ари. М.: Мир, 2000.- 366с.

УДК 517.965.3+519.246+519.218.7 (045)

ПРЕДЕЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В САМООРГАНИЗОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Н.И. Делас
Кандидат технических наук, докторант*
Контактный тел.: 067-501-62-77
E-mail: nikolaivad@gmail.com
В.А. Касьянов
Доктор технических наук, професор*
Контактный тел.: 050-700-79-04
E-mail: vakasyanov@mail.ru
*Кафедра механики
Национальный авиационный университет
пр. Комарова, 1, г. Киев, Украина, 03680

На основі принципу максимуму ентропії отриманий закон розподілу, який асимптотично наближається до степенного (гіперболічного). Виведені співвідношення для параметрів цього розподілу

Ключові слова: гіперболічний розподіл, закон Ципфа, ентропія

На основе принципа максимума энтропии, получен закон распределения, асимптотически приближающийся к степенному (гиперболическому). Выведены соотношения для параметров этого распределения

Ключевые слова: гиперболическое распределение, закон Ципфа, энтропия

On the basis of the principle of maximum entropy, the distribution is obtained, asymptotically approaching a power (hyperbolic). Relations are derived for the parameters of this distribution

Keywords: hyperbolic distribution, Thipf's law, the entropy

Введение

Как в природе, так и в сфере человеческой деятельности можно увидеть множество примеров сложившихся систем, где «правит» степенной (гиперболический) закон распределения. Нередко он носит название закона Ципфа, обнаружившего его проявление в лингвистике, однако, в зависимости от сферы проявления варианты названия варьируются.

Так, в экономике – это закон Парето (неравномерность распределения материальных благ в обществе); в социальной географии – закон Ауэрбаха (распределение городов по численности населения). Законом Бредфорда называют распределение ученых по их продуктивности, законом Кудрина – распределение типовых технических агрегатов на крупных промышленных комбинатах. Степенной вид имеют распределения размеров усталостных дефектов в металлических конструкциях [1], а также распределение масштабов турбулентных вихрей в атмосфере [2]. И даже в таких далеких друг от друга областях как продажи в Интернете (правило Криса Андерсона) [3], астрономия [4], музыка [5], педагогика [6], криминалистика [7] проявляется степенной закон. В соответствии с ним выстроены биоценозы в различных экосистемах.

В нашей статье [8] собран список из более десятка различных подходов, объясняющих данный феномен. Такое разнообразие теорий свидетельствует лишь о том, что в настоящее время не существует единой точки зрения на механизм формирования степенного (гиперболического) закона распределения.

Цель статьи

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы, опираясь на общепринятый принцип максимума энтропии, вывести соотношения, которые объясняли бы природу этого механизма.

Основное содержание

На наш взгляд, весьма продуктивной была бы идея многие самоорганизованные системы, в том числе и вышеперечисленные объекты, трактовать с единой точки зрения, а именно, *с позиции того, что на множестве некоторых* **«потребителей»** *распределяется некоторое ограниченное множество* **«ресурсов»** (рис. 1).

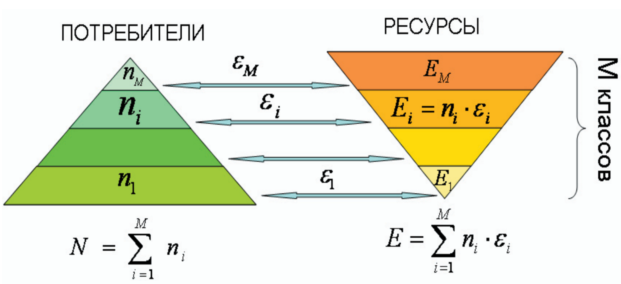


Рис. 1. Сложившаяся система как распределение «потребителей» и «ресурсов»

Рассмотрим абстрактное сообщество, состоящее из N объектов или субъектов, в дальнейшем – «потребителей». В нем неравномерно распределено ограниченное количество «ресурса» E. Каждый потребитель располагает своей индивидуальной долей ε_i этого ресурса. Можно построить дискретную шкалу разбиения ε на M равных интервалов со средними значениями $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_M$. По этому признаку сообщество делится на M классов, в каждом из которых содержится n_i потребителей, обладающих примерно равным количеством индивидуальной доли ресурса ε_i. При таких обозначениях очевидны равенства:

$$\sum_{i=1}^{M} n_i = N\,, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{M} n_i \varepsilon_i = E\,. \tag{2}$$

Можно показать, что распределение ограниченного ресурса в сообществе складывается не произвольно, а в соответствии с определенным правилом, названным здесь *предельно гиперболическим законом распределения*. Этот закон вытекает из принципа максимума энтропии.

Энтропийный принцип эффективен для исследования сложных трудно-формализуемых объектов. В его основе лежит понимание, что в процессе своего распределения некоторая величина стремится достичь *наивысшей степени экспансии*, и ее распределение приобретает наиболее вероятную из всех доступных форм. При этом информационная энтропия:

$$H = -\sum_{i=1}^{M} p_i \cdot \ln(p_i)\,, \tag{3}$$

где p_i – частота исхода, достигает своего *условного* максимума. В конкретном случае этими *условиями* являются ограничения (1) и (2).

Таким образом, условный максимум энтропии выступает *интегральным критерием* того, что из множества возможных вариантов система реализуется именно в *данной* конфигурации. В нашей задаче это обуславливает некую определенную форму зависимости $n_i = f(\varepsilon_i)$.

Однако поиск этого выражения требует правильного понимания, что есть p_i в формуле (3). Здесь стоит обострить *внимание*.

В большинстве опубликованных по данной теме источников, с которыми авторам удалось познакомиться, входящая в формулу (3) частота p_i, записывается в виде:

$$p_i = \frac{n_i}{N}\,. \tag{4}$$

В этом случае искомое распределение $n_i = f(\varepsilon_i)$ выводится как следствие условного максимума энтропии:

$$H_n(n_i) = -\sum_{i=1}^{M} \frac{n_i}{N} \cdot \ln\frac{n_i}{N}\,. \tag{5}$$

С ограничениями (1) и (2) решение имеет известный экспоненциальный вид:

$$n_i = C \cdot \exp(-\mu \cdot \varepsilon_i)\,, \tag{6}$$

где C и μ – множители, определяемые из этих условий.

Физический смысл данного результата состоит в том, что при распределении (6) *«потребители»* максимально полно (насколько ограничения (1) и (2) это позволяют) заселяют все M классов.

В настоящей статье особый акцент делается на том, что в процессе формирующегося распределения максимальную экспансию по классам осуществляют не только элементы сообщества – «потребители» n_i, но и сами «ресурсы» $E_i = n_i \cdot \varepsilon_i$. Интуиция не противится этой точке зрения, в том числе, и при анализе примеров, приведенных в начале статьи.

Так, иногда было бы даже более естественным (чем наоборот) полагать, что в обществе распределяется капитал, по городам – население, среди турбулентных вихрей – энергия. Как поймем далее, это подтверждает и опыт, предлагая обилие примеров гиперболического распределения.

При такой точке зрения частота p_i, входящая в формулу (3), принимает вид:

$$p_i = \frac{n_i \cdot \varepsilon_i}{E}. \tag{7}$$

Теперь получим распределение $n_i = f(\varepsilon_i)$ как результат решения задачи на условный максимум энтропии, записанной в следующем виде:

$$H_E(n_i) = -\sum_{i=1}^{M} \frac{n_i \cdot \varepsilon_i}{E} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \varepsilon_i}{E}, \tag{8}$$

где в качестве условий выступают требования (1) и (2).

Условный экстремум функции удобно находить методом множителей Лагранжа. Когда в качестве такой функции выступает энтропия, этот подход иногда называют формализмом Джейнса. Суть его состоит в том, что для достижения *условного* максимума $H(n_i)$, достаточно решить задачу нахождения *безусловного* максимума новой функции $\Phi(n_i)$, которая, кроме $H(n_i)$, аддитивно включает уравнения связи (в нашем случае – это (1) и (2)), взвешенные множителями Лагранжа λ и μ:

$$\begin{aligned}\Phi(n_i) = -\sum_{i=1}^{M} \frac{n_i \cdot \varepsilon_i}{E} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \varepsilon_i}{E} + \\ +\lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{n_i}{E} - \frac{N}{E}\right) + \mu \cdot \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{n_i \cdot \varepsilon_i}{E} - 1\right)\end{aligned}. \tag{9}$$

Чтобы найти такое распределение n_i, при котором $\Phi(n_i)$ достигает экстремума, необходимо приравнять нулю частные производные:

$$\frac{\partial \Phi(n_i)}{\partial n_i} = -\frac{\varepsilon_i}{E} \cdot \ln \frac{n_i \cdot \varepsilon_i}{E} - \frac{\varepsilon_i}{E} + \lambda \cdot \frac{1}{E} + \mu \cdot \frac{\varepsilon_i}{E} = 0.$$

Отсюда получим распределение $n_i = \phi(\varepsilon_i)$:

$$n_i = \frac{C}{\varepsilon_i} \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{\varepsilon_i}\right), \tag{10}$$

где $C = E \cdot \exp(\mu - 1)$.

Физический смысл множителя λ становится ясным после определения экстремума функции $n_i = f(\varepsilon_i)$, задаваемого формулой (10). Проще найти экстремум соответствующего ему непрерывного распределения $n = \phi(\varepsilon)$, которое получается при $M \to \infty$. Из условия $\frac{dn}{d\varepsilon} = 0$ следует $\lambda = -\varepsilon_*$, а константа $C = n_* \cdot \varepsilon_* \cdot e$.

Здесь $e \approx 2.7182$, а ε_*, и n_* – координаты точки, в которой распределение (10) достигает максимума.

В итоге искомое распределения $n_i = \phi(\varepsilon_i)$, имеет вид:

$$\frac{n_i}{n_*} = \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_i} \cdot \exp\left(1 - \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_i}\right). \tag{11}$$

Ниже (рис. 2) приведены ее графики.

Так как с ростом аргумента ε_i влияние экспоненциального множителя в выражении (11) практически нивелируется, то оно асимптотически приближается к степенной (гиперболической) зависимости:

$$n_i = \frac{n_* \cdot \varepsilon_* \cdot e}{\varepsilon_i} = \frac{C}{\varepsilon_i}. \tag{12}$$

Поэтому авторы предложили называть соотношение (11) *предельно гиперболическим законом распределения (ПГР)*.

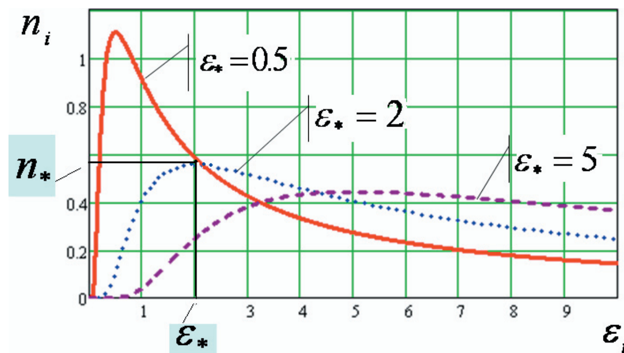


Рис. 2. Предельно гиперболический закон распределения (ПГР)

Заметим, что зависимость (11) может быть получена и другим способом, а именно, в результате нахождения условного максимума энтропии Хартли:

$$S = k \cdot \ln G, \tag{13}$$

где G – статистический вес, характеризующий число допустимых комбинаций (микросостояний) внутри сообщества, k – множитель, учитывающий размерность. Важно, что, как и в предыдущем случае, результат (11) можно получить лишь, если вместо традиционной записи:

$$G = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{M} (n_i)!}, \tag{14}$$

которая тоже приводит к решению (10), представить статистический вес в виде:

$$G = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} n_i \cdot \varepsilon_i\right)!}{\prod_{i=1}^{M} (n_i \cdot \varepsilon_i)!}. \tag{15}$$

Отличие этих записей в том, что выражение (14) характеризует число возможных нетривиальных перестановок *потребителей* ресурса, а (15) – число возможных перестановок самих *порций ресурса*, за исключением количества тривиальных комбинаций внутри каждого класса.

Не приводя здесь подробных выкладок, заметим лишь, что процедура вывода остается та же, что и с использованием выражения (8) для энтропии H. В качестве дополнительного приема необходимо только применить известную формулу Стирлинга: $\ln(n_i \cdot \varepsilon_i)! \approx n_i \cdot \varepsilon_i \cdot (\ln(n_i \cdot \varepsilon_i - 1)$.

Примечательно, что все кривые, приведенные на (рис. 2.), при соответствующем выборе масштаба могут быть точно совмещены. Это означает, что функция предельно гиперболического распределения (11), обладает свойством *масштабной инвариантности*. В силу этого она может описывать автомодельные процессы, а также объекты фрактального типа.

Важно, что полученный здесь закон ПГР (11) при очень малых значениях параметра ε_i устремляет значение n_i к нулю (рис. 2), а не в бесконечность. Последнее присуще для чисто гиперболического распределения (12), и является, по-видимому, идеализацией реальности.

Авторы полагают, что все эмпирические проявления гиперболического закона распределения на самом деле *являются фактами проявления закона ПГР* (11). Дело в том, что отклонение от чистой гиперболы может быть для опыта практически не заметным в случаях, когда значение параметра ε_* уменьшается (смотри тенденцию на рис. 2). Но есть примеры, когда этот эффект проявлен достаточно отчетливо. Например, в работе [1] указывается на степенной характер эмпирической кривой распределения усталостных дефектов в металлических элементах конструкции (рис. 3). Здесь максимальные количества дефектов приходятся на некоторые характерные (не самые меньшие) размеры l_*.

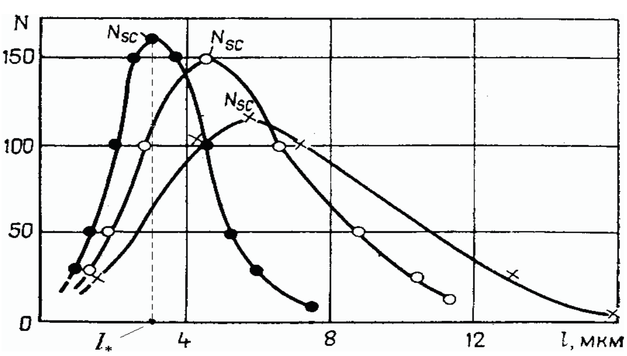


Рис. 3. Распределение микродефектов на поверхности конструкции после длительного воздействия знакопеременной нагрузки [9]

Наше предположение, что гиперболические распределения в чистом виде не существуют, а *существуют предельно гиперболические распределения* (11), можно также отнести и к закону Парето. В самом деле, трудно представить реальную картину, что чисто гиперболический характер этого распределения мог бы сохраняться вплоть до наиболее малых долей ресурса ε_i. В этом случае наше общество должно было бы состоять в основном из самых неимущих граждан (бомжей). В действительности, наиболее многочисленным (с числом n_*) является слой граждан с небольшим достатком ε_*.

При анализе статистических данных часто применяют *ранговые распределения*. Их также можно получить из приведенных выше кривых. Однако, переход от зависимости $n_i = f(\varepsilon_i)$ к ранговому распределению $n(i) = A/i$ (здесь i – ранг, номер в порядке убывания n_i) сопровождается снижением информативности в силу монотонного характера ранговой кривой, в то время как график (11) имеет модальный вид с точкой максимума при $\varepsilon_* > 0$ (рис. 2). В этом случае первому, самому многочисленному рангу, соответствует «потребитель», обладающий «ресурсом» ε_*.

Строго гиперболический характер рангового распределения соответствовал бы такому виду кривой (рис. 2), у которой $\varepsilon_* = 0$. Однако, на практике он встречается, как правило, в «деформированном» виде. Классическим примером может служить модификация эмпирического рангового закона Ципфа, предложенная Б. Мандельбротом [10]: $n(i) = A/(B+i)^\gamma$. Возможно, это как раз и связано с тем, что соответствующая ему кривая (11) имеет максимум при $\varepsilon_* > 0$.

Следующий шаг посвятим выводу соотношений, *связывающих параметры* n_* *и* ε_* *в выражении (11) с интегральными характеристиками системы:* E, N *и* M. Для этого подставим выражение (11) в уравнения связи (1), (2):

$$\sum_{i=1}^{M} n_* \cdot \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_i} \cdot \exp\left(1 - \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_i}\right) = N \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{M} n_* \varepsilon_* \cdot \exp\left(1 - \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_i}\right) = E \qquad (14)$$

Для получения аналитических решений этих дискретных равенств, рассмотрим их непрерывные аналоги (полагая, шаг дискретности $\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_M}{M}$, где ε_M – индивидуальный ресурс представителя последнего, самого обеспеченного, класса M):

$$N \approx n_* \varepsilon_* \frac{M}{\varepsilon_M} \int_0^{1/\phi} \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon} \exp\left(1 - \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}\right) d\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) \qquad (15)$$

$$E \approx n_* \varepsilon_*^2 \frac{M}{\varepsilon_M} \int_0^{1/\phi} \exp\left(1 - \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}\right) d\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) \qquad (16)$$

Здесь $\phi = \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon_M}$ (17)

Точные значения [9] этих определенных интегралов соответственно равны:

$$I_1(\phi) = \int_0^{1/\phi} \frac{\varepsilon_*}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}\right) d\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) = -Ei(-\phi) \qquad (18)$$

$$I_2(\phi) = \int_0^{1/\phi} \exp\left(-\frac{\varepsilon_*}{\varepsilon}\right) d\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) = -I_1(\phi) + \frac{e^{-\phi}}{\phi}, \qquad (19)$$

где $Ei(\cdot)$ – интегральная показательная функция.

Между прочим, к необходимому нам выражению (19) можно также прийти, если к интегралам (15), (16) применить метод интегрирования по частям.

Как показали расчеты, во всем диапазоне $1 \le i \le M$ замена дискретных сумм (13), (14) на интегралы (16), (17) приводит к погрешности, не превышающей 0.5%.

Выражения (13) и (14) после этого можно записать в виде:

$$N = M \cdot e \cdot n_* \cdot \phi \cdot I_1(\phi), \qquad (20)$$

$$E = M \cdot e \cdot n_* \cdot \varepsilon_* \cdot (e^{-\phi} - \phi \cdot I_1(\phi)) \quad . \tag{21}$$

Отсюда получим:

$$\varepsilon_* = \frac{E}{N} \cdot \frac{F(\phi)}{1 - F(\phi)}, \tag{22}$$

$$n_* \cdot \varepsilon_* \cdot e = \frac{E}{M} \cdot \frac{e^{\phi}}{1 - F(\phi)}, \tag{23}$$

где

$$F(\phi) = \phi \cdot e^{\phi} \cdot I_1(\phi) \quad . \tag{24}$$

Из (22) выражается зависимость для ε_M – конечного значения шкалы вариации ε_i. Это есть величина индивидуальной доли ресурса представителя самого обеспеченного класса:

$$\varepsilon_M = \frac{E}{N} \cdot \frac{F(\phi)}{\phi \cdot (1 - F(\phi))} . \tag{25}$$

В этих формулах наряду с исходными величинами E, N и M остается один неизвестный параметр $\phi = \varepsilon_* / \varepsilon_M$. А так как $0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_M$, то теоретически он может варьироваться в диапазоне: $0 \le \phi \le 1$. С учетом выражений (19), (22) – (24), распределение (11) примет вид:

$$\frac{n_i}{N/M} = \frac{E/N}{\varepsilon_i} \cdot \frac{1}{1 - F(\phi)} \cdot e^{\phi - \frac{E/N}{\varepsilon_i} \cdot \frac{F(\phi)}{1 - F(\phi)}} . \tag{26}$$

Величины E/N и N/M – есть соответственно среднее значение индивидуальной доли ресурса и среднее значение заселенности класса.

По формуле (26) для различных значений параметра ϕ построены кривые (рис. 4а). Каждый из этих графиков обрывается при достижении $\varepsilon_i = \varepsilon_M$. Зависимость $\varepsilon_M = f(\phi)$, рассчитанная по формуле (25), приведена на (рис. 4б).

Из рисунка (а) видно, что в случае, когда параметр ϕ стремится к нулю, кривая все более напоминает чистую гиперболу. Это также вытекает из формулы (23), где при $\phi \to 0$ правая часть становится равной $\frac{E}{M}$. Таким образом, при $\phi \to 0$, предельно-гиперболическое распределение (11) превращается в чисто гиперболическое выражение вида:

$$n_i = \frac{E/M}{\varepsilon_i} .$$

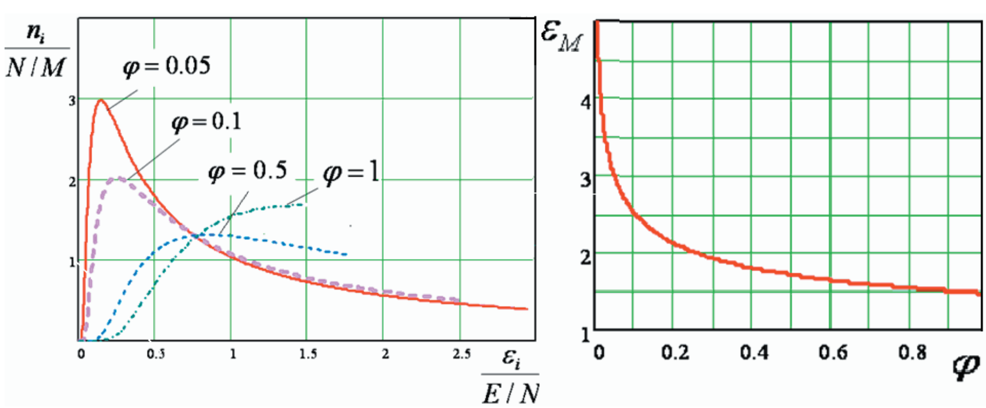
Из (17) и (22) видно, что это происходит при стремлении к нулю среднего значения индивидуальной доли ресурса E/N, то есть при неограниченном числе «потребителей» N.

Неопределенность параметра ϕ связана с произволом выбора величины ε_M как конечного значения шкалы вариации ε_i. Понятно, что на практике ε_M как доля представителя самого «обеспеченного» класса формируется не произвольно. Чтобы определить эту величину, условий (1), (2) недостаточно. Необходимы дополнительные соображения.

Вернемся к рассуждениям, предшествовавшим формуле (7) где был сформулирован главный тезис статьи, который и позволил в итоге получить выражение (11). Нами была предложена идея – рассматривать всякую сложившуюся систему (сообщество) как результат распределения по классам неких конечных множеств *«потребителей»* и *«ресурсов»*.

Как второй тезис, эти распределения осуществляются при стремлении их к максимальной экспансии, дозволенной рамками имеющихся ограничений. Такая тенденция обусловлена внутренними «статистическими силами», толкающими систему к наиболее вероятной конфигурации, а значит, к максимуму энтропии. Говоря о взаимном распределении «потребителей» и «ресурсов», следует понимать, что стремление к максимально полному заселению всех M классов (следовательно, стремление к максимуму энтропии) испытывают оба эти множества.

Однако, предшествующие выкладки, получены нами, исходя из требования условного максимума только (8) – энтропии для «ресурсов» $H_E(n_i)$. Для полного решения задачи (что, очевидно, позволит определить недостающий параметр ϕ) необходимо добавить еще одно условие – требование максимума энтропии $H_n(n_i)$ распределения множества «потребителей» (5).



а) б)

Рис. 4. Влияние параметра ϕ: (а) — на распределение $\frac{n_i}{N/M}$ (формула (26)); (б) — на величину ε_M (формула (25))

Осуществим эти действия, несколько преобразовав выражение (26). С учетом (22) выразим аргумент ε_i как:

$$\varepsilon_i = i \cdot \Delta\varepsilon = $$
$$= i \cdot \frac{\varepsilon_M}{M} = i \cdot \frac{\varepsilon_*}{M \cdot \phi} = $$
$$= i \cdot \frac{1}{M \cdot \phi} \cdot \frac{E}{N} \cdot \frac{F(\phi)}{1 - F(\phi)} .$$

Тогда (26) примет вид:

$$\frac{n_i}{N} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\phi}{F(\phi)} \cdot e^{\phi \cdot (1 - \frac{M}{i})} \qquad (27)$$

К слову сказать, несмотря на схожесть, выражение (27) нельзя считать ранговым распределением, так как соответствующая этому выражению кривая имеет немонотонный характер с локальным максимумом при $i_* \neq 0$. Это всего лишь – порядковое распределение.

Если зависимость (27) подставить в формулу (5), получим выражение для вычисления энтропии распределения «потребителей»:

$$H_n = -\frac{\phi \cdot e^{\phi}}{F(\phi)} \cdot \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{i} \cdot e^{-\frac{M\phi}{i}} \cdot \ln\left(\frac{\phi \cdot e^{\phi}}{F(\phi)} \cdot \frac{1}{i} \cdot e^{-\frac{M\phi}{i}}\right). \qquad (28)$$

Ее график приведен на рисунке (рис. 5). Расчет показывает, что найденное значение $\phi_{extr} \approx 0.22$ как максимум H_n, практически не чувствительно к изменению количества классов M.

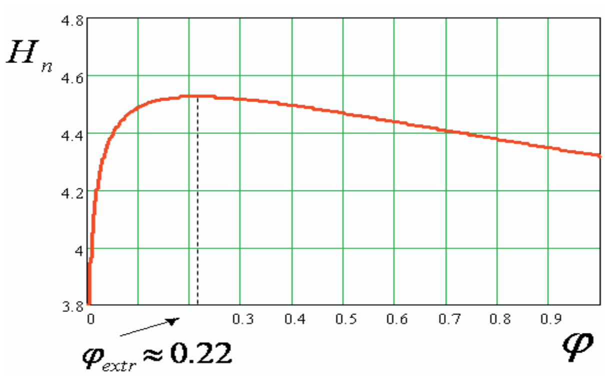


Рис. 5. Определение параметра ϕ_{extr}

В итоге выражение для закона ПГР (11) можно записать в виде:

$$n_i \approx \frac{1.78 \cdot E/M}{\varepsilon_i} \cdot e^{\frac{-0.45 \cdot E/N}{\varepsilon_i}} \qquad (29)$$

Его параметрами являются только исходные величины: E, N и M.

Выводы

Распределения, подчиняющиеся степенному (гиперболическому) закону, характерны для обширного круга природных и социальных явлений. Всякую сложную систему, которой свойственен подобный тип распределения, можно представить как множество «потребителей», на котором распределены элементы множества «ресурсов».

Требование условного максимума энтропии «ресурсов», позволяет получить соотношение (11), названное здесь предельно гиперболическим законом распределения (ПГР), а также – выражения для его параметров (22) – (25).

При увеличении аргумента ε_i, функция (11), описывающая закон ПГР, асимптотически быстро приближается к чисто гиперболическому виду, это и оправдывает ее название. Кривая ПГР обладает свойством масштабной инвариантности.

Авторы предполагают, что именно предельно гиперболический закон обладает универсальностью проявления, а не гиперболический. Отклонение от чистой гиперболы может быть для опыта практически не заметным в случаях, когда значение параметра ε_* достаточно мало.

Литература

1. Ботвина, Л. Р., Автомодельность накопления повреждаемости [Текст] / Л. Р. Ботвина, Г. И. Баренблатт // Проблемы прочности. – 1985. – №12. – С. 17–24.
2. Голицин, Г. С., Функции распределения вероятностей для циклонов и антициклонов [Текст] / Г. С. Голицин, И. И. Мохов, М. Г. Акперов, М. Ю. Бардин // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413, №2. – С. 254–256.
3. Андерсен, К. Длинный хвост. Новая модель ведения бизнеса [Текст] : пер. с англ. – М. : Вершина, 2008. – 272 с.
4. Хайбуллов, Р. А., . Ранговый анализ космических систем [Текст] / Р. А. Хайбуллов // Известия главной астрономической обсерватории в Пулкове. – 2009. – Вып.3, №219. – С. 95–104.
5. Орлов, Ю. К., Невидимая гармония [Текст] / Ю. К. Орлов // Число и мисль. – 1980. – Вып.3. – С. 70–105.
6. Гурина, Р. В., Ранговый анализ педагогических систем (ценологический подход). Методические рекомендации для работников образования. [Текст] / Р. В. Гурина. – М. : Технетика, 2006. – 40 с.
7. Никитина, Е. Ю. Применение математических методов при исследовании криминологических данных (на примере Японии). Россия и АТР [Текст] / Е. Ю. Никитина, М. А. Гузев. – 2009. №2, – С. 77–85.
8. Делас, Н. И. Негауссово распределение как свойство сложных систем, организованных по типу ценозов [Текст] / Н. И. Делас, В. А. Касьянов // Восточно-ерворопейский журнал передовых технологий. – 2012. – №3/4. – С. 27–32.
9. Интернет – ресурс: www.wolframalpha.com.
10. Мандельброт, Б. Фракталы, случай и финансы [Текст] / Б. Мандельброт. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2004. – 256 с.