ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕ-НИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Саратовский государственный аграрный университет им. Н. И. Вавилова"

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ

"Системный анализ и основы компьютерного моделирования экосистем"

Составили:
профессор кафедры "Информационные системы и технологии",
к.э.н. Варюхин А.М.

старший преподаватель кафедры "Информационные системы и технологии",
к.э.н. Янко С.Н.

Саратов 2010

Варюхин А. М., Янко С.Н. Компьютерный практикум по курсу "Системный анализ и основы моделирования экосистем". – Саратов: Издательство ФГОУ ВПО СГАУ, 2010 .- 52 с.

В пособии приведены методические указания и порядок выполнения работ, обеспечивающих компьютерную поддержку авторского курса А.М. Варюхина "Системный анализ и основы моделирования в экосистем". В каждой работе сформулированы цели ее выполнения, кратко изложены теоретические основы, на базе которых она построена, приведены контрольные вопросы и рекомендуемая литература. Пособие предназначено для студентов специальности 320400 "Агроэкология", оно может быть использовано студентами и аспирантами других специальностей, обучающихся в СГАУ, а также применяться при преподавании в других вузах.

SIMULINK - ИНСТРУМЕНТ ВИЗУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Разработка моделей средствами Simulink (в дальнейшем S-моделей) основана на использовании технологии drag-and-drop («перетащи и оставь»). В качестве «кирпичиков» для построения S-модели используются модули (или блоки), хранящиеся в библиотеке Simulink.

Simulink хорош тем, что, с одной стороны, обеспечивает пользователю доступ ко всем основным возможностям пакета MATLAB, а с другой — является достаточно самостоятельной его компонентой, в том смысле, что при работе с ним не обязательно иметь навыки в использовании других инструментов, входящих в состав пакета Matlab.

Блоки, включаемые в создаваемую модель, могут быть связаны друг с другом как по информации, так и по управлению. Тип связи зависит от типа блок и логики работы модели. Данные, которыми обмениваются блоки, могут быть скалярными величинами, векторами или матрицами произвольной размерности.

Любая S-модель может иметь иерархическую структуру, причем число уровней иерархии практически не ограничено.

Наряду с другими параметрами моделирования пользователь может задавать способ изменения модельного времени (с постоянным или переменным шагом), а также условия окончания моделирования.

В ходе моделирования имеется возможность наблюдать за процессами, происходящими в системе. Для этого используются специальные «смотровые окна», входящие в состав библиотеки Simulink. Интересующие пользователя характеристики системы могут быть представлены как в числовой, так и в графической форме. Кроме того, существует возможность включения в состав модели средств анимации.

Еще одно важное достоинство Simulink заключается в том, что он является открытой системой: состав библиотеки может быть пополнен пользователем за счет разработки собственных блоков.

Начало работы

Запуск Simulink можно произвести одним из трех способов:

- нажав соответствующую кнопку на панели инструментов командного окна MATLAB;
- ведя команду Simulink в активной строке командного окна;
- выбрав команду New\Model в меню File.

По команде New\Model кроме него открывается еще и пустое окно для создания S-модели.

Список разделов библиотеки Simulink представлен в основном окне браузера в виде дерева, и правила взаимодействия с ним являются стандартартными для списков такого типа:

Структура библиотеки Simulink представлена на рисунке 1. Нижний уровень иерархии образуют собственно блоки Simulink, которые и играют роль «кирпичиков» при построении S-моделей.

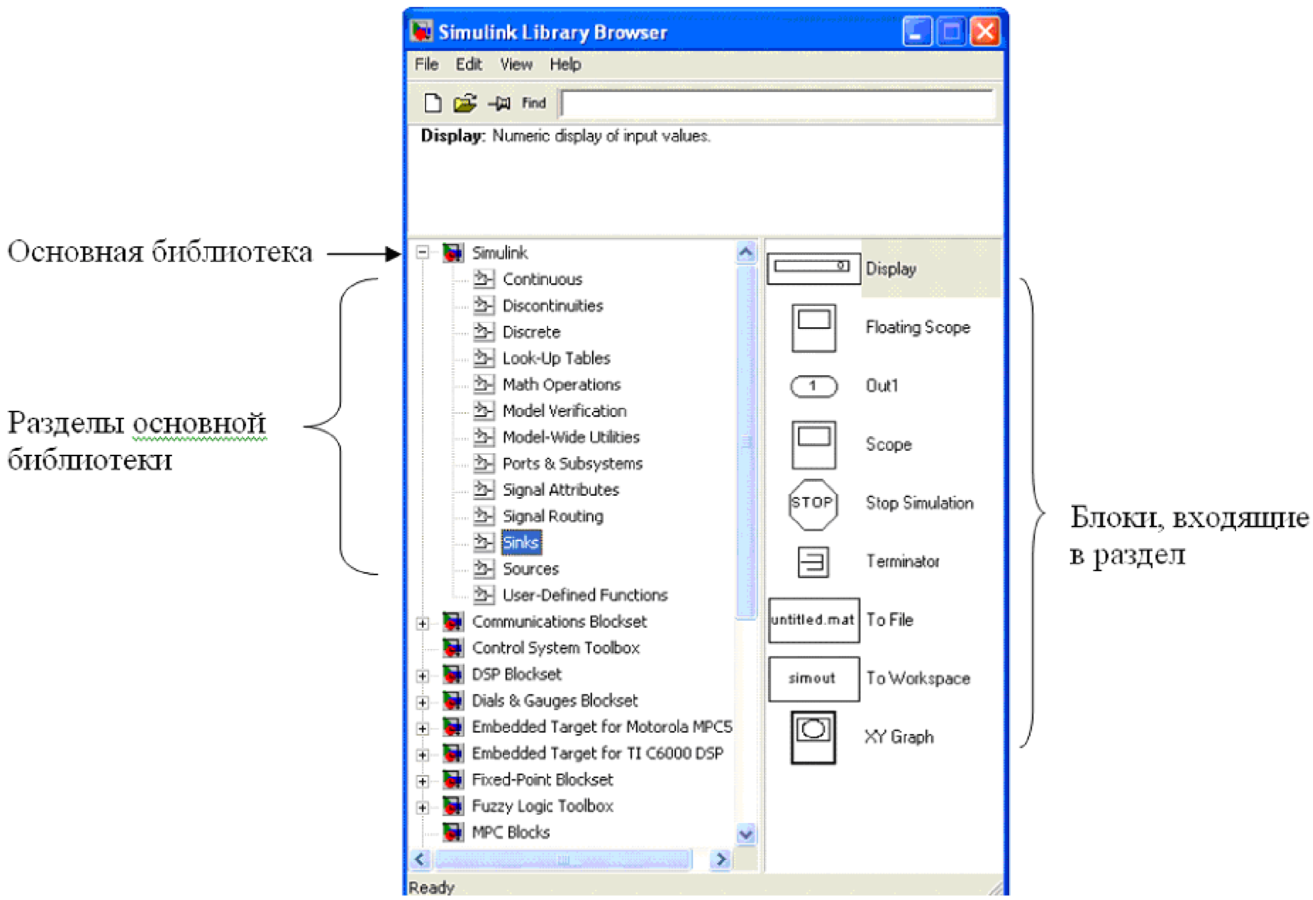

Рисунок 1. Окно браузера библиотеки Simulink.

Меню окна блок-диаграммы содержит следующие разделы (рисунок 2):

File - команды работы с mdl-файлами; **Edit** - команды редактирования блок-диаграммы и опции для работы с библиотекой; **View** - команды изменения формата окна и управления выводом дополнительной информации;

Simulation - команды управления моделированием;

Format - команды редактирования формата (т.е. внешнего облика блоков диаграммы и блок-диаграммы в целом) и т.д.

На панель инструментов выведены следующие стандартные команды меню, за исключением:

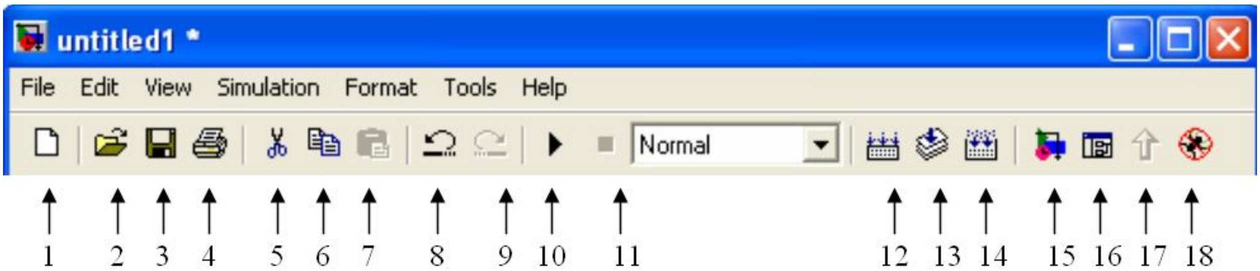

Рисунок 2. Меню окна блок-диаграммы Simulink.

- **10 Start/Pause/Continue** — запуск модели на исполнение (команда Start); после запуска модели на изображении кнопки выводится символ, и ей соответствует уже команда Pause (Приостановить моделирование); для возобновления моделирования следует щелкнуть по тоже кнопке, поскольку в режиме паузы ей соответствует команда Continue (Продолжить);
- **11 Stop** — закончить моделирование; кнопка становится доступной по истечении интервала моделирования и после выполнения команды Pause;
- **15 Library Browser** — активизировать окно браузера библиотеки
- **18 Debug** – средство для отладки создаваемого приложения

Организация работы с библиотекой Simulink.

Библиотека блоков Simulink представляет собой набор визуальных объектов, используя которые можно собирать, как из кубиков, произвольную конструкцию.

Для любого блока можно получать требуемое число копий и использовать каждую из них абсолютно автономно. Более того, практически для всёх существует возможность индивидуальной настройки: пользователь может изменить как внутренние параметры блоков (например, количество входов), так и внешнее оформление (размер, цвет, имя и т. д.)

На порядок соединения блоков друг с другом также не накладываются каких ограничений. Конечно, при связывании блоков необходимо соблюдать определенные правила, однако они обусловлены в основном логикой работы самой модели, а не специальными требованиями Simulink.

Для удобства работы пользователя основная библиотека блоков разбита на разделы, содержимое которых не может изменяться пользователем:

- **Continuous** (Блоки для моделирования непрерывных систем);
- **Discrete** (Блоки для моделирования дискретных систем);
- **Function & Tables** (Функции и таблицы);
- **Math** (Математические блоки);
- **Sinks** (Блоки-«получатели»);
- **Sources** (Блоки-«источники»).

Окна настройки параметров всех библиотечных блоков вызываются двойным кликом мыши на них и имеют идентичную структуру. Окна содержат краткую характеристику блока, поля ввода (или выбора) значений параметров блока и 4 кнопки: OK - передать Simulink установленные значение параметров и закрыть окно настройки; Cancel - отменить выполненные установки и закрыть окно настроек; Help - вызов файла помощи в формате html; Apply - передать Simulink установленные значения параметров, не закрывая окно.

Чтобы запустить модель на исполнение с новыми параметрами, закрывать окно настроек не обязательно.

Создание простейшей модели.

Для создания новой модели используется традиционная для Windows команда меню **file > new > model**. Появляется новое пустое окно модели с именем untitled.

Создадим поэтапно простейшую модель беспроцентного накопительного счета (пенсионного, образовательного, свадебного и др.).

Найдем в библиотеке раздел Continuous (системы непрерывного времени) и в нем Inegrator (накопитель).

Затащим левой кнопкой мыши блок Inegrator из библиотеки в окно модели.

Стрелка слева указывает на вход интегратора, т. е. возможность подключения входного потока средств. Треугольник справа блока является его выходным сигналом и означает запас (сальдо) в накопителе.

Будем ежемесячно вкладывать в фонд рубли (можно тысячи и миллионы). Для этого из раздела Sources затащим мышью блок константу (Constant).

Создадим линию потока средств от константы к интегратору. Наведем курсор на выход блока константы. Курсор из стрелки превращается в крест. Протянем мышь до стрелки входа интегратора. Крест раздваивается. Отпускаем кнопку мыши. Произошло соединение блоков. Исчезли знаки входных и выходных портов блоков.

Для просмотра динамики денежек на нашем счете из библиотеки Sinks вытащим в модель графопостроитель Scope и объект Display. Соединим с ними линиями интегратор (Рисунок 3).

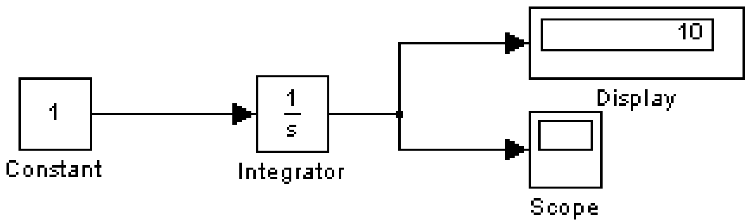

Рисунок 3. Модель беспроцентного накопления средств.

Запустим модель: меню Simulation > Start.

Просмотрим результаты моделирования. Дважды щелкнем по блоку Scope.

Если вы запутались в графике, дважды щелкните по кнопке бинокля в середине панели кнопок. Выполнится автомасштабирование. График станет наглядным.

Ось времени (10 месяцев) обозначена внизу. Вертикальная ось показывает накопление денег при вкладах по рублю в месяц. За Десять месяцев мы накопим 10 рублей.

Вы создали простейшую модель и выполнили моделирование!

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ

"***Исследование моделей роста популяций***"

Основная цель работ: закрепить теоретические сведения по математической теории динамики популяций и получить, практические навыки по построению и применению математических моделей роста популяций при различных предположениях об их функционировании и с использованием программных средств MatLab, MatLab Simulink и Word.

Введение

Для изучения на практических занятиях предлагается несколько типов моделей. Непрерывные модели представлены моделями экспоненциального и логистического роста Дискретные модели - дискретным аналогом логистического уравнения.

К каждой из моделей имеется теоретическое описание, задание и контрольные вопросы к заданию. Теоретическое описание включает в себя историческую справку, вид уравнений, используемых в модели, пояснение их биологического смысла и область применимости.

Методические указания при использовании программных средств.

После ознакомления с теорией предлагается изучить несколько типов математических моделей. Логика работы с каждой из моделей следующая, пользователь строит модель, задает соответствующие параметры модели и получает в графическом представлении различные типы поведения системы.

Наборы параметров, обеспечивающие характерные режимы динамики численности приведены в заданиях, приложенных к каждой из моделей. После выполнения очередного задания пользователь отвечает на контрольные вопросы.

Модельные параметры, которые должны задаваться пользователем, следующие: начальная численность популяции, скорость роста популяции, емкость среды, коэффициент смертности, коэффициент внутривидовой конкуренции.

Работы основывается на последовательном выполнении заданий, в каждом из которых изучается влияние одного или группы параметров на режим динамики численности популяции.

Лабораторная работа 1 "Модель экспоненциального роста".

В основе этой модели, предложенной Мальтусом в 1798 г., лежит предположение, что прирост численности вида за время t пропорционален этой численности и интервалу времени, за который произошел прирост:

$$\Delta X = r \cdot X \Delta t ,$$

Здесь r- константа собственной скорости роста популяции. Совершив предельный переход, получим линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dX}{dt} = r \cdot X .$$

Решением этого уравнения является функция:

$$X(t) = X_0 \cdot \exp(r \cdot t),$$

где X_0 - начальная численность популяции.

Примером применения модели Мальтуса может служить описание развития однородной популяции в условиях неограниченных ресурсов питания (рост клеточной культуры до начала истощения питательной среды)

Порядок выполнения работы

В данном задании исследуют влияние начальной численности и параметра r на динамику роста популяции.

Цель задания - изучить влияние начальной численности и скорости роста на характер кривой динамики численности и освоить общие принципы работы с программными средствами MatLab, MatLab Simulink и Word.

1. Загрузите программу MatLab, нажмите кнопку Simulink, в открывшемся окне нажмите кнопку New (новая модель). Из библиотечных блоков Simulink создайте в соответствии с моделью Мальтуса Simulink-модель экспоненциального роста (Рисунок 1.1).

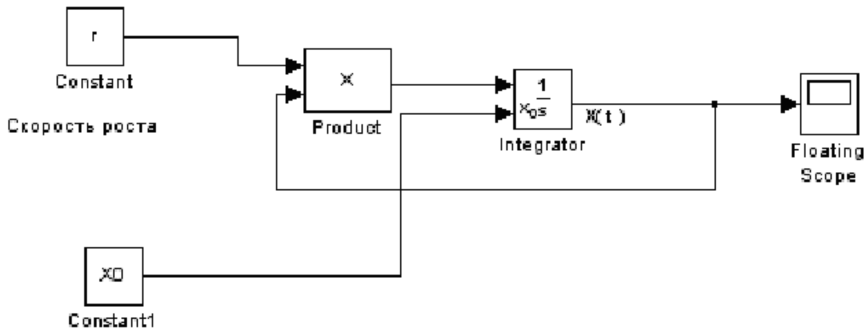

Рисунок 1.1 Модель экспоненциального роста (модель Мальтуса).

2. Оцените работоспособность модели.

Задайте в блоках констант значения r – скорости роста популяции (r < 0,5) и начальное значение численности X_0 (X_0 < 5). Для этого дважды кликните на блоке соответствующей константы и в отрывшихся окне введите требуемые значения констант.

Задайте интервал моделирования. Для этого в окне модели выберите раздел меню: "Simulation" в открывшемся подменю выберите подраздел Simulation parameters" в раскрывшемся окне выберите вкладку "Solver" и введите в поле "Stop time" число 20.

Запустите модель на исполнение, нажав кнопку "Start". Результаты посмотрите в блоке "Scope" дважды кликнув по нему. Поэкспериментируйте с моделью, оцените полученные результаты.

Сохраните модель на своей дискете под именем: "Maltus1NN1NN2" , где NN1- код группы, NN2 – Ваш индивидуальный код.

3. Аналогично создайте модифицированную Simulink-модель экспоненциального роста (рисунок 1.2).

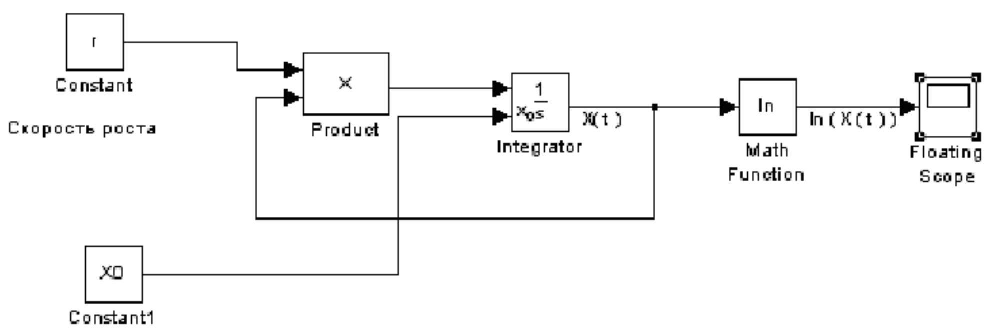

Рисунок 1.2. Модель экспоненциального роста с логарифмической поправкой

4. Оцените работоспособность модели и сохраните ее на своей дискете под именем "Maltus2NN1NN2"

5. Исследуйте построенные модели.

Разработайте программу исследования модели "Maltus1NN1NN2" и построения соответствующего графика.

Программа для модели "Maltus1NN1NN2" должна иметь следующий вид:

```
%Открытие модели
open_system ('MaltusNN1NN2')
r=0.5;
X0=10.0;
%Выполнение модели
sim ('MaltusNN1NN2')
Y=ScopeData;
Y(:,1)=[];
n=length(Y)
L=1:n;
plot(L,Y)
xlabel('t')
ylabel('x( t )')
grid on
```

Сохраните программу под именем PrMaltus1NN1NN2. Разработайте программу исследования модели "Maltus2NN1NN2" и построения соответствующего графика. Программа для модели "Maltus2NN1NN2" должна иметь следующий вид:

```
%График Мальтус2
%Открытие модели
open_system('Maltus2NN1NN2')
r=0.5;
X0=10.0;
%Выполнение модели
sim('Maltus2NN1NN2')
Y=ScopeData;
Y(:,1)=[];
n=length(Y)
L=1:n;
plot(L,Y)
xlabel('t')
ylabel('ln(x( t )')
grid on
```

Сохраните программу под именем PrMaltus2NN1NN2. Запустите по очереди обе программы. В результате Мы увидим два искомых графика функций (рисунок 1.3):

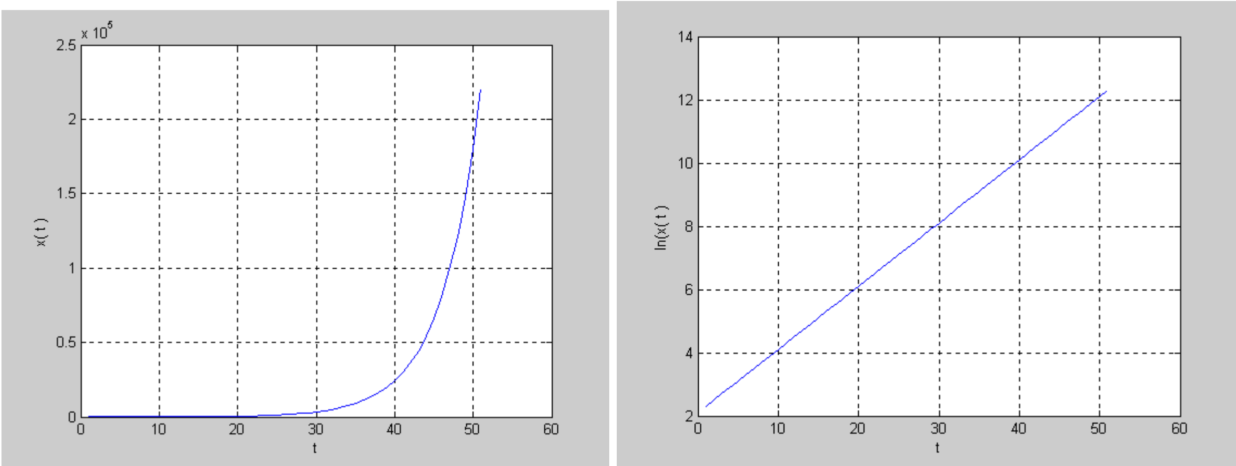

Рисунок 1.3 График исследования модели Мальтуса

и модели Мальтуса с логарифмической поправкой.

Меняя параметры, поэкспериментируйте и посмотрите, как меняются графики.

Предложенные выше программы, позволяют анализировать отклик модели на задаваемые вручную параметры r и X_0.

Необходимо разработать программу, позволяющую автоматически задавать параметры и получать оклики модели. Программа должна иметь следующий вид:

```
%Программа исследования модели Мальтуса
%Открытие модели
open_system ('ModMaltusExp')
%План эксперимента по r
r=[0:0.005:0.5];
%План 'эксперимента по X0
for   X0=10.0:3.0:30
%Выполнение модели
sim ('ModMaltusExp')
%Формирование графиков и надписей, черчение графика
plot (r,ScopeData(end,2:end))
%Формирование надписей
hold on
grid
xlabel ('r')
ylabel ('X(tn)')
end
hold off
```

Сохраните программу под именем PrMaltusNN1NN2. Используйте эту программу для исследования поведения модели Мальтус1. Поэкспериментируйте с программой, наблюдая отклики модели при различных планах изменения параметров. В результате Вы должны получить семейство графиков (рисунок 1.4):

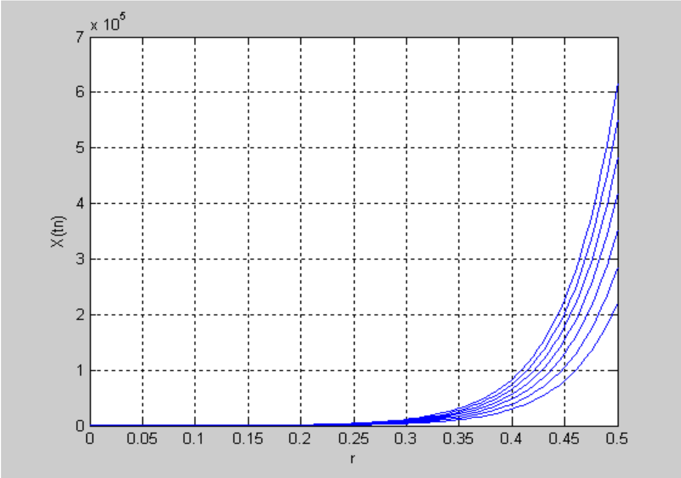

Рисунок 1.4 Семейство графиков при исследование модели Мальтуса.

5. Создайте документ Word под именем "RostPop1NN1NN2".

Документ представляет собой отчет о выполненной работе. Отчет доложен содержать:

а) Фамилии студентов выполнивших работу

б) Постановку задачи (историческая справка, математическая модель Мальтуса и т. д.);

в) Графические схемы построенных Simulink-моделей экспоненциального роста "Maltus1NN1NN2" и"Maltus2NN1NN2".

Для сохранения схем моделей необходимо в MatLab открыть соответствующую модель и в ее меню Edit выбрать раздел сохранения модели в Clipboord. Затем перейдите в документ "RostPop01NN1NN2" выберете место расположения схемы и вставте ее обычным образом.

г) Тексты программ, реализующих имитационные эксперименты с созданными S-моделями и графики, представляющие визуализацию результатов работы программ

д) Интерпретацию полученных результатов, ответы на контрольные вопросы и выводы.

Контрольные вопросы:

- чем отличаются полученные кинетические кривые?

- чем отличаются эти кривые в исходном и логарифмическом масштабе?

Лабораторная работа.2 " Непрерывная модель логистического роста".

Модель логистического роста была предложена Ферхюльстом в 1838 г. описания развития популяции в условиях ограниченных ресурсов питания. В основу модели положено уравнение:

$$\frac{dX}{dt} = r \cdot X - bX^2$$, которое приводится к виду: $$\frac{dX}{dt} = r \cdot X\left(1 - \frac{X}{K}\right)$$

Член - $b \cdot X^2$, пропорциональный количеству встреч между особями учитывает. "самоотравление" популяции, объяснимое многими причинами (конкуренция за ресурсы питания, выделение в среду вредного метаболита и др.). Коэффициент b называется коэффициентом внутривидовой конкуренции . Величина К = r/b соответствует устойчивому стационарному состоянию с максимально возможной в данных условиях численностью популяции и называется "емкостью среды". Параметр r называется скоростью роста и характеризует способность популяции к увеличению численности. Решением дифференциального уравнения является функция:

$$X(t) = \frac{X_0 \cdot K}{X_0 + (K - X_0) \cdot \exp(-rt)},$$

X_0 - начальная численность популяции.

Характер логистической кривой зависит от величин параметров r и K и начальной численности Xо.

Порядок выполнения

Цель задания - изучить влияние параметров: скорости роста, начальной численности, емкости среды на режим динамики численности популяции.

1. Используя библиотечные блоки Simulink, создайте в соответствии с моделью Ферхюльста Simulink-модель логистического роста (рисунок 2.1).
2. Оцените работоспособность модели.

Задайте в блоках констант значения r – скорости роста популяции ($0 < r < 0,5$), начальное значение численности X_0 ($10 < X_0 < 100$) и емкость среды K ($100 < K < 10000$). Задайте интервал моделирования в диапазоне (20-200). Запустите модель на исполнение. Результаты просмотрите в блоке "Scope".Поэкспериментируйте с моделью, оцените полученные результаты.

3. Сохраните модель на своей дискете под именем: "ModLogistNN1NN2" , где NN1-код группы, NN2 – Ваш индивидуальный код.

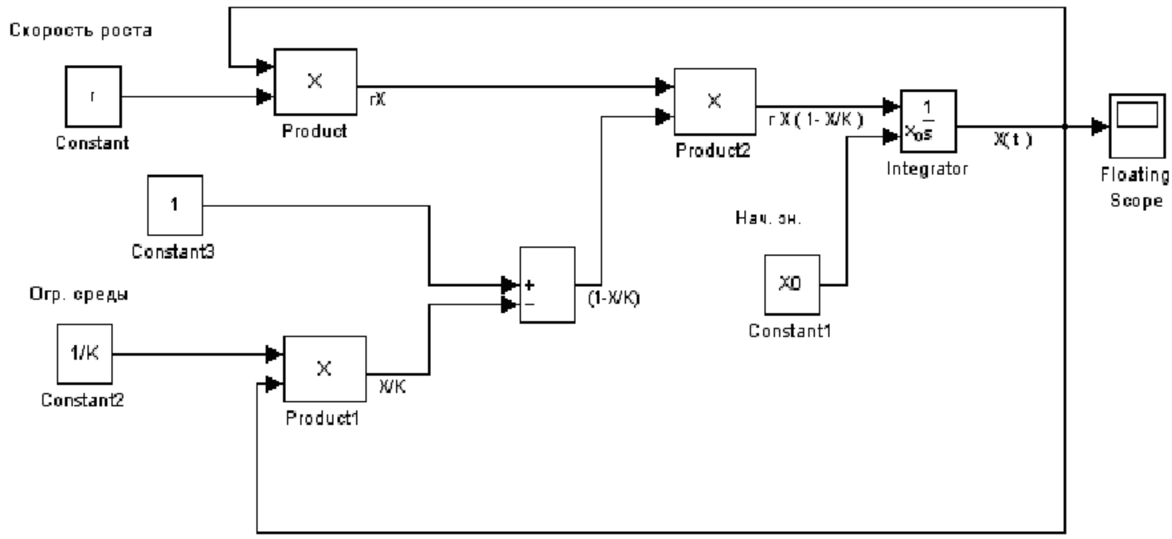

Рисунок 2.1 Simulink-модель непрерывной модели логистического роста

4) Исследуйте построенную модель. Для этого разработайте программу исследования модели "ModLogistNN1NN2" и построения соответствующих графиков. Программа для модели "ModLogistNN1NN2" должна иметь следующий вид:

```
%Исследования непрерывной логистической модели
%Открытие модели
open_system ('ModLogist')
X0=50;
K1=2500;
K2=5000;
%План эксперимента по r
r=[0.0:0.005:0.2];
%План эксперимента по K
for   K=K1:500.0:K2
%Выполнение модели
sim ('ModLogist')
%Формирование графиков и надписей, черчение графика
subplot(1,2,1)
plot(r,ScopeData(end,2:end));
%Формирование надписей K
nr=num2str(K,2);
text(0.133,K-200,'K =')
text(0.148,K-200,nr)
hold on
grid on
```

```
xlabel('r')
ylabel('X(tn)')
end
hold off
% Формирование временного графика, формирование временной координаты
n=length(ScopeData);
L=1:n;
% Отбор временных графиков
z=rot90(ScopeData);
z(:,2:end)=[];
n1=length(z);
n1=fix(n1./2);
m=1:2:n1;
Text='NOMER'
n2=m*2-1;
subplot(1,2,2)
plot(L,ScopeData(:,n2));
axis tight
hold on
grid on
xlabel('t')
ylabel('X(t)')
hold off
```

Сохраните программу на своей дискете под именем "PrModLogistNN1NN2".

Запустите программу. В результате Вы должны получить два семейства графиков Xtn(r) и X(t) следующего вида (рисунок 2.2).

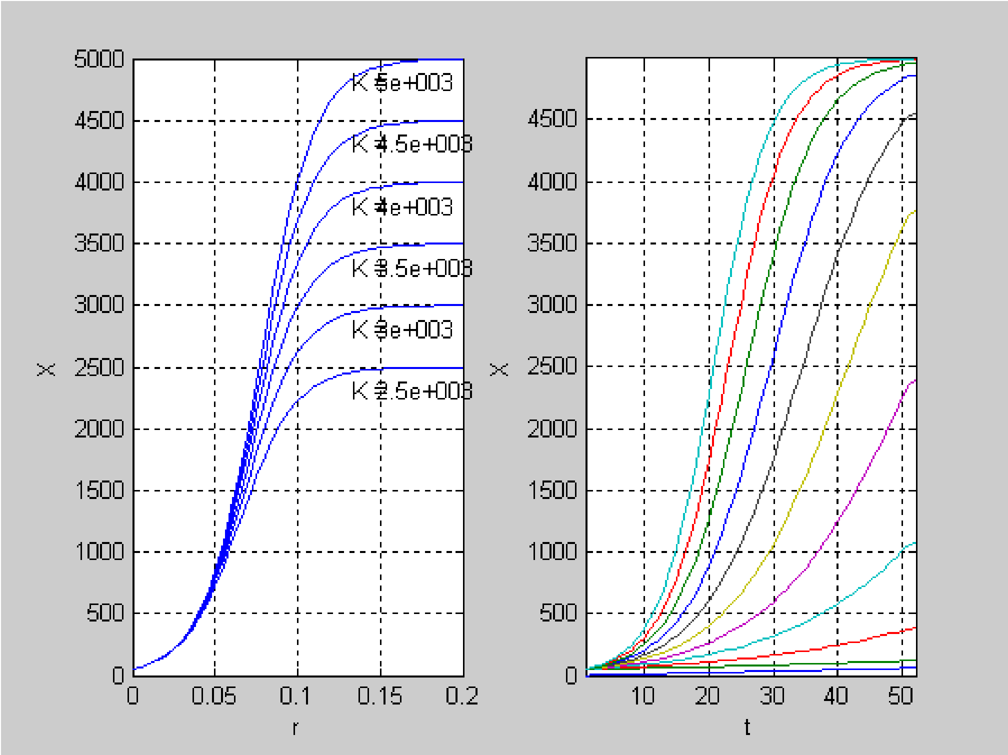

Рисунок 2.2. Семейство графиков, получившихся при исследовании непрерывной модели логистического роста.

Поэкспериментируйте с программой, наблюдая отклики модели при различных планах изменения параметров.

5. Создайте документ Word под именем "RostPop2NN1NN2". Документ представляет собой отчет о выполненной работе. Отчет доложен содержать:

а) Фамилии студентов выполнивших работу

б) Постановку задачи (историческая справка, математическая модель логистического роста и т. д.);

в) Графическую схему построенной Simulink-модели логистического роста "ModLogistNN1NN2"

г) Текст программы, реализующей имитационный эксперименты с созданной S-моделью, и графики, представляющие визуализацию результатов работы программы

д) Интерпретацию полученных результатов, ответы на контрольные вопросы и выводы.

Контрольные вопросы:

-Какие характеристики логистической кривой определяются константой скорости, емкостью среды и начальной численностью?

-Какие начальные условия приводят к решению с точкой перегиба?

-Как меняется форма кривой, если Хо < 0.5К; 0.5К< Хо < К; Хо>К; Хо = K.

Лабораторная работа 3 "Дискретная модель логистического роста".

Дискретные модели применяются для описания развития популяций, численность которых в момент времени t зависит численности в k предшествующих моментов времени:

$$X(t) = F(X(t-1), X(t-2), \ldots, X(t-k))$$

В простейшем случае численность каждого следующего поколения $X(t+1)$ зависит лишь от численности предыдущего поколения $X(t)$, и говорят что поколения в популяции не перекрываются. Это справедливо для многих видов насекомых, а также для некоторых синхронных культур микроорганизмов.

В качестве примера дискретной модели, рассмотрим разностный аналог логистического уравнения (см. непрерывную логистическую модель):

$$\frac{dX}{dt} = rX \cdot \left(1 - \frac{X}{K}\right).$$

Заменив $\frac{dX}{dt}$ на $\frac{\Delta X}{\Delta t}$, где $\Delta X = X(t+1) - X(t)$ и $\Delta t = 1$,

получим $X(t+1) = X(t)\left(1 + r \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)\right)$

Учитывая биологические соображения, преобразуем данное уравнение к виду:

$$X(t+1) = X(t) \cdot \exp\left(r \cdot \left(1 - \frac{X(t)}{K}\right)\right).$$

Это уравнение можно считать разностным аналогом логистического уравнения.

При различных соотношениях параметров r и K, пользуясь этой моделью, можно получать различные режимы динамики численности популяции:

- $0 < r < 1$ - монотонное приближение численности к стационарной;
- $1 < r < 2$ - затухающие колебания;
- $2 < r < 3$ - стационарные колебания;
- $r > 3{,}1$ - нерегулярное поведение (хаос).

Порядок выполнения

Цель задания - получение характеристик колебательных режимов динамики численности популяции и демонстрация возможностей и области применимости дискретного моделирования по сравнению с непрерывным. При изучении этой модели варьируется параметр скорости роста при заданных параметрах начальной численности и емкости среды.

1. Используя библиотечные блоки Simulink, создайте в соответствии с моделью дискретного логистического роста Simulink-модель дискретного логистического роста (рисунок 3.1).

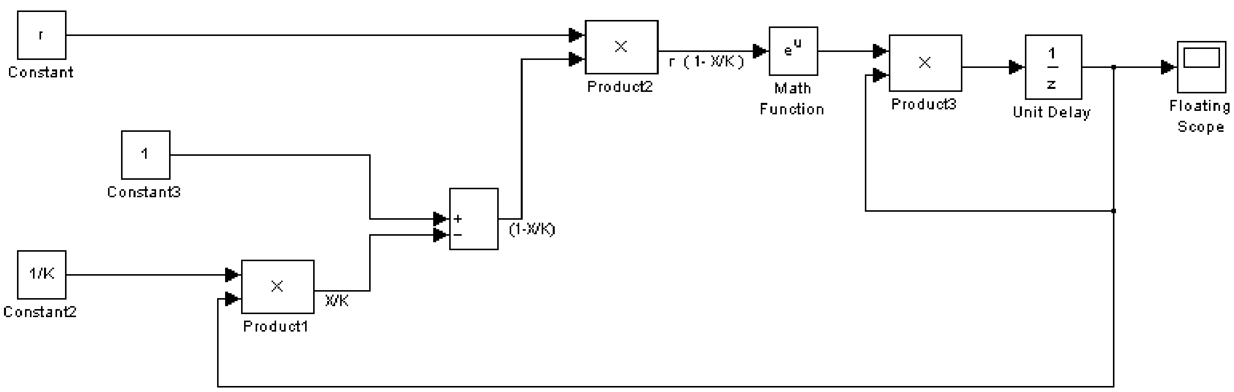

Рисунок 3.1. Simulink-модель дискретного логистического роста.

2. Оцените работоспособность модели.

Задайте в блоках констант значения r – скорости роста популяции ($0 < r < 1$), начальное значение численности X_0 ($10 < X_0 < 100$) и емкость среды K ($100 < K < 1000$). Задайте интервал моделирования в диапазоне (20-200). Запустите модель на исполнение, нажав кнопку "Start". Результаты просмотрите в блоке "Scope". Поэкспериментируйте с моделью, оцените полученные результаты.

3.Сохраните модель на своей дискете под именем: "ModLogistDisNN1NN2", где NN1- код группы, NN2 – Ваш индивидуальный код.

4. Исследуйте построенную модель.

Для этого разработайте программу исследования модели и построения соответствующих графиков. Программа для модели "ModLogistDisNN1NN2" должна иметь следующий вид:

```
%Исследования дискретной логистической модели
%Задание количества выводимых графиков
% p=1 через один, p=2 через три, p=3 через пять...
p=2;
% Задание емкости среды и начальной численности популяции
K=1000;
nr1=num2str(K,5);
X0=100;
nr2=num2str(X0,3);
%Задание шага по r (числа графиков)
n3=0.08
%Открытие модели
open_system('ModLogistDis')
%План эксперимента 1 по r
r=[0.1:n3:1];
%Выполнение модели
sim('ModLogistDis')
%Формирование временного графика
%Формирование временой кординаты
n=length(ScopeData (:,1));
L=1:n;
%отбор графиков
z=rot90(ScopeData);
z(:,2:end)=[];
n1=length(z);
n1=fix(n1./2);
m=2:p:n1;
Text='Номера отобранных временных графиков';
n2=m*2-1;
subplot(2,2,1)
plot(L,ScopeData(:,n2));
axis tight
hold on
%grid on
text(11,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'K =')
text(13,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr1)
text(19.5,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'X0 =')
text(22,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr2)
title('0 < r < 1')
xlabel('t')
ylabel('X(t)')
hold off
%План эксперимента 2 по r
r=[1.1:n3:2];
%Выполнение модели
```

```
sim('ModLogistDis')
%отбор временных графиков
z=rot90(ScopeData);
z(:,2:end)=[];
n1=length(z);
n1=fix(n1./2);
m=2:p:n1;
Text='Номера отобранных временных графиков';
n2=m*2-1;
subplot(2,2,2)
plot(L,ScopeData(:,n2));
axis tight
hold on
%grid on
text(11,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'K =')
text(13,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr1)
text(19.5,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'X0 =')
text(22,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr2)
title('1 < r < 2')
xlabel('t')
ylabel('X(t)')
hold off
%План эксперимента  по r
r=[2.1:n3:3];
%Выполнение модели
sim('ModLogistDis')
%отбор временных графиков
z=rot90(ScopeData);
z(:,2:end)=[];
n1=length(z);
n1=fix(n1./2);
m=2:p:n1;
Text='Номера отобранных временных графиков';
n2=m*2-1;
subplot(2,2,3)
plot(L,ScopeData(:,n2));
axis tight
hold on
%grid on
text(11,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'K =')
text(13,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr1)
text(19.5,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'X0 =')
text(22,0.7*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr2)
title('2 < r < 3')
xlabel('t')
```

```
ylabel('X(t)')
hold off
%План эксперимента 4 по r
r=[3.1:n3*2:6];
%Выполнение модели
sim('ModLogistDis')
%отбор временных графиков
z=rot90(ScopeData);
z(:,2:end)=[];
n1=length(z);
n1=fix(n1./2);
m=2:p:n1;
Text='Номера отобранных временных графиков';
n2=m*2-1;
subplot(2,2,4)
plot(L,ScopeData(:,n2));
axis tight
hold on
%grid on
text(11,0.6*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'K =')
text(13,0.6*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr1)
text(19.5,0.6*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),'X0 =')
text(22,0.6*max(max(ScopeData(1:end,2:end))),nr2)
title('3 < r < 8')
xlabel('t')
ylabel('X(t)')
hold off
zoom on
```

Сохраните программу под именем “PrLogistDisNN1NN2". Запустите программу. В результате Вы должны получить четыре семейства графиков (рисунок 3.2). Поэкспериментируйте с программой, наблюдая отклики модели при различных планах изменения параметров.

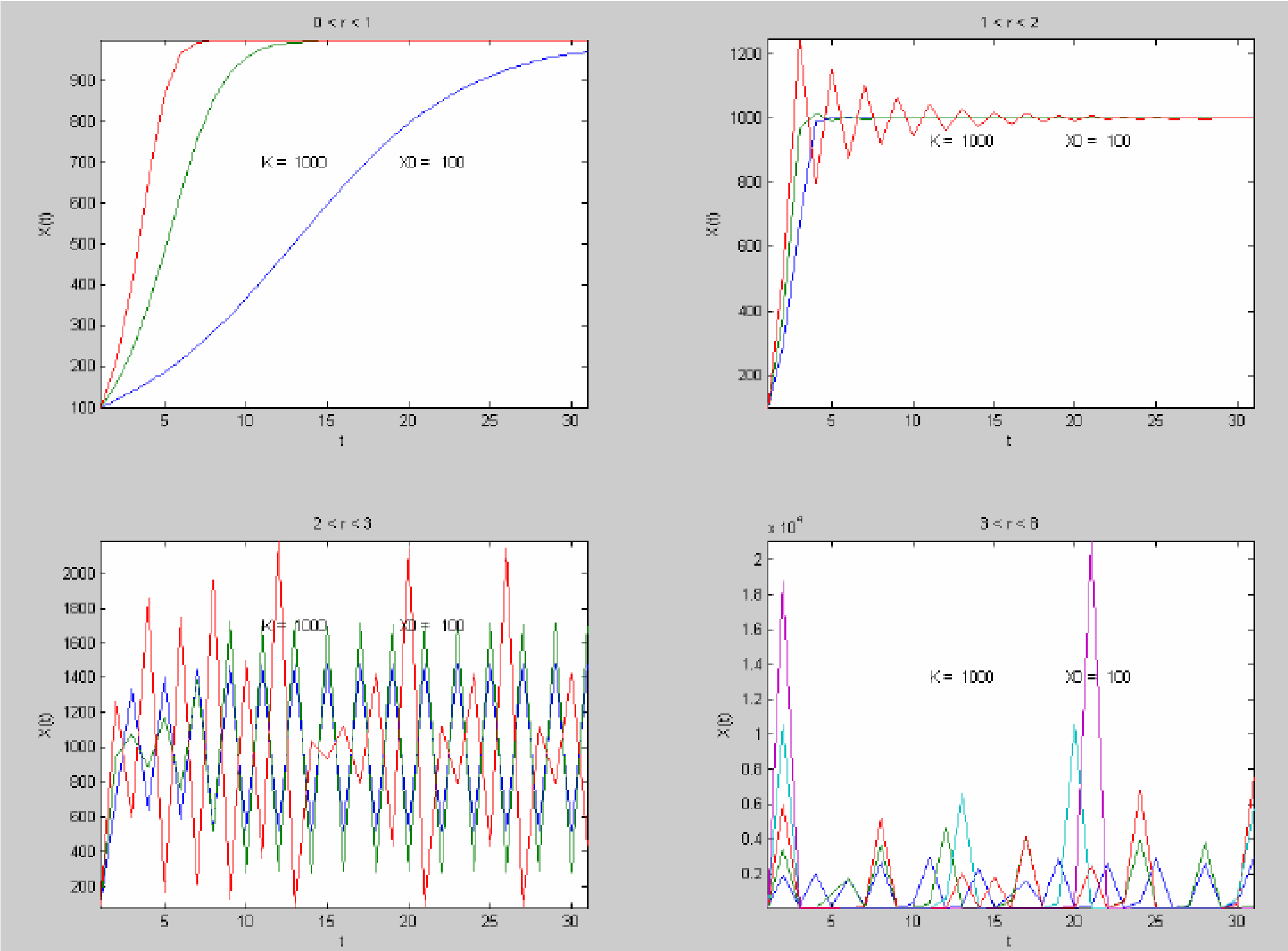

Рисунок 3.2. Семейство графиков дискретной модели логистического роста

5.Создайте документ Word под именем "RostPop3NN1NN2". Документ представляет собой отчет о выполненной работе. Отчет доложен содержать:

а) Фамилии студентов выполнивших работу;

б) Постановку задачи (историческая справка, дискретная математическая модель логистического роста и т. д.);

в) Графическую схему построенной дискретной Simulink-модели логистического роста "ModLogistDisNN1NN2";

г) Текст программы, реализующей имитационный эксперименты с созданной S-моделью, и графики, представляющие визуализацию результатов работы программы;

д) Интерпретацию полученных результатов, ответы на контрольные вопросы и выводы.

Контрольные вопросы:

- При каких значениях r дискретная и непрерывная логистическая модели дают одинаковые решения?

- При каких значениях r получаются устойчивые решения и в чем их отличие друг от друга?

- При каких значениях r модель может описывать хаотические вспышки численности насекомых?

Литература

1. Гиляров А.М. Популяционная экология, М.: Из-во МГУ, 1990.

2. Гультяев А. Визуальное моделирование в среде Matlab: Учебный курс. Питер. 2000

3. Дьяконов В. MATLAB: Учебный курс. Питер. 2000

4. Дьяконов В., Круглов В Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. Питер. 2001

5. Полуэктов РА., Пых ЮА., Швытов ИА. Динамические модели экологических систем. Л.: Гидрометеоиздат. 1980.

6. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Ь. Математические модели биологических продукционных процессов: Учебное пособие. М.: Из-во МГУ, 1993.

7. Смит Дж. М, Модели в экологии, М.: Мир, 1976.

8. Федоров В.Д., Гильманов Г. Г. Экология. М.: Из-во МГУ. 1980.

Лабораторная работа 4 "Изучение моделей динамических систем (на примере системы линейных уравнений)"

Основная цель работы: и изучение основных типов стационарных состояний и их устойчивости для модельной системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теоретическое введение

Динамическое описание объектов в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений часто используются для исследования реальных процессов в различных областях науки и, в частности, биологии, экологии, химии, экономики. Решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Введем понятие устойчивого и неустойчивого решения системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\overline{X}' = \overline{f}(t, \overline{X}) \quad (1)$$

с начальными условиями $\overline{X}(t_0) = \overline{X}_0$, где $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$

n - мерный вектор; $t \in I = [t_0, +\infty)$ - независимая переменная, по которой производится дифференцирование;

$\overline{X}' = (\frac{dX_1}{dt}, \frac{dX_2}{dt}, ..., \frac{dX_n}{dt})$ n – мерный вектор первых производных по t;

$\overline{f}(t, \overline{X}) = (f_1(t, \overline{X}), f_2(t, \overline{X}), ..., f_n(t, \overline{X}))$ - n-мерная вектор - функция.

Если начальные данные (t_0 , $\overline{X}_0$) изменяются, то изменяется и решение. Тот факт, что решение зависит от начальных данных, обозначается следующим образом: $\overline{X}(t) = \overline{X}(t; t_0, \overline{X}_0)$. Естественно, что в качестве математической модели пригодна лишь та задача Коши, которая устойчива к малым изменениям начальных данных.

Определим понятие устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости в смысле Ляпунова.

Для этого отклонение решения $\overline{X}(t)=\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0)$, вызванное отклонением $\overline{\Delta}X_0$ начального значения $\overline{X}_0$, будем записывать следующим образом: $\left|\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0+\overline{\Delta}X_0)-\overline{X}(t)\right|=\left|\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0+\overline{\Delta}X_0)-\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0)\right|$.

Определение 1. Решение $\overline{X}(t)=\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0)$ системы (1) называется устойчивым по Ляпунову в положительном направлении (или устойчивым), если оно непрерывно по $\overline{X}_0$ на интервале $I=[t_0,+\infty)$, т.е. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ такое, что если для $\forall$ $\overline{\Delta}X_0$ $\left|\overline{\Delta}X_0\right|\le\delta\ \Rightarrow\left|\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0+\overline{\Delta}X_0)-\overline{X}(t)\right|\le\varepsilon$ $\forall\ t\ge t_0$.

Если, кроме того, если отклонение решения $\overline{X}(t)$ стремится к нулю при $t\to+\infty$ для достаточно малых $\overline{\Delta}X_0$, т.е. $\exists\ \Delta>0$, что $\forall$ $\overline{\Delta}X_0$

$|\overline{\Delta}X_0|\le\Delta\Rightarrow\left|\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0+\overline{\Delta}X_0)-\overline{X}(t)\right|\to0$, $t\to+\infty$,

то решение $\overline{X}(t)$ системы (1) называется асимптотически устойчивым в положительном направлении (или асимптотически устойчивым). Аналогично определяются различные типы устойчивости решения в отрицательном направлении.

Определение 2. Решение $\overline{X}(t)=\overline{X}(t;t_0,\overline{X}_0)$ системы (1) называется неустойчивым по Ляпунову в положительном направлении (или неустойчивым), если оно не является устойчивым в положительном направлении. Аналогично определяется неустойчивость в отрицательном направлении.

Геометрическая интерпретация

1) Геометрически устойчивость по Ляпунову решения $\overline{X}(t)$ можно интерпретировать следующим образом (рисунок 4.1): все решения $X(t;t_0,\overline{X}_0+\Delta X_0)$, близкие в начальный момент t_0 к решению $\overline{X}(t)$ (т.е. начинающиеся в пределах δ - трубки), не выходят за пределы ε - трубки при всех значениях $t\ge t_0$.

2) Асимптотическая устойчивость есть устойчивость с дополнительным условием. Геометрически это означает, что любое решение $\overline{X}_1(t)$, начинающееся в момент

t_0 в Δ - трубке, с течением времени неограниченно приближается к решению $\overline{X}(t)$ (рисунок 8). Трубка радиуса Δ называется областью притяжения решения $\overline{X}(t)$.

3) Неустойчивость по Ляпунову геометрически означает, что среди решений, близких в начальный момент t_0 к решению $\overline{X}(t)$, найдется хотя бы одно, которое в некоторый момент t_1 (свой для каждого такого решения) выйдет за пределы ε - трубки (рисунок 4.1).

Исследование устойчивости произвольного решения $\overline{X}(t)$ системы (1) всегда можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения некоторой преобразованной системы.

В дальнейшем будем предполагать, что система (1) имеет нулевое решение, т.е. $\overline{f}(t,0) = 0 \ \forall\, t \geq t_0$, и ограничимся исследованием устойчивости нулевого решения. Переформулируем определения различных типов устойчивости для нулевого решения $\overline{X}(t) \equiv 0$ системы (1).

<u>Определение 3.</u> Нулевое решение $\overline{X}(t) \equiv 0$ системы (1) называется устойчивым по Ляпунову в положительном направлении (или устойчивым), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ \overline{X}_0$

$$\left|\overline{\Delta}\, X_0\right| \leq \delta \ \Rightarrow \left|\overline{X}(t; t_0, \overline{X}_0)\right| \leq \varepsilon \text{ для } \forall\, t \geq t_0.$$

Если кроме того, $\exists\, \Delta > 0$, что для $\forall\ \overline{X}_0$

$\left|\overline{\Delta}\, X_0\right| \leq \Delta \Rightarrow \left|\overline{X}(t; t_0, \overline{X}_0)\right| \to 0,\ t \to +\infty$, то решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) называется асимптотически устойчивым в положительном направлении (или асимптотически устойчивым) .

<u>Определение 4.</u> Нулевое решение $\overline{X}(t) \equiv 0$ системы (1) называется неустойчивым по Ляпунову в положительном направлении (или неустойчиво), если оно не является устойчивым в положительном направлении.

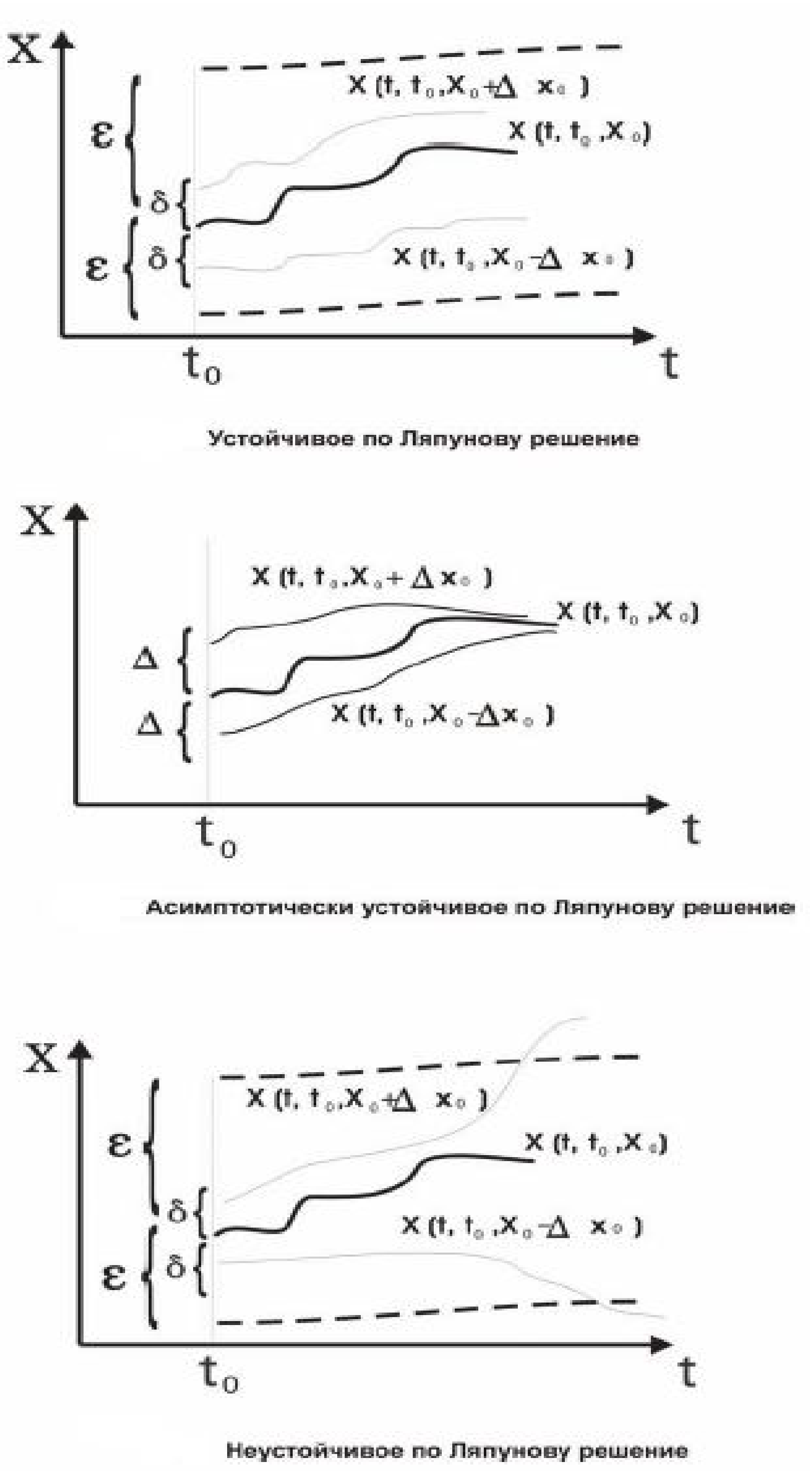

Рисунок 4.1. Виды решений по Ляпунову.

Устойчивость решения стационарной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется автономной (или стационарной, или консервативной, или динамической), если независимая переменная не входит явно в систему уравнений.

Нормальную автономную систему 2- го порядка можно записать в следующем виде:

$$\frac{dX}{dt} = P(X, Y) \quad (2)$$

$$\frac{dY}{dt} = Q(X, Y)$$

Эффективным методом исследования устойчивости динамической системы является графическое представление характеристик траекторий в фазовом пространстве, так называемый фазовый портрет системы, а также изучение зависимости фазовых переменных от времени и зависимости структуры фазового портрета от параметров.

Такой подход допускает наглядное представление поведения переменных на фазовой плоскости (X,Y). Совокупность траекторий точек M(X,Y) плоскости (X,Y), изображающих (представляющих) значения X и Y в последовательные моменты времени t соответствуют состояниям системы в процессе изменения согласно уравнениям (2).

Множество фазовых траекторий, построенных из различных начальных условий (задаваемых точкой с координатами Xo ,Yo), образует так называемый фазовый портрет системы и позволяет анализировать характер изменений в системе без знания аналитических выражений решений системы уравнений (2).

Особый интерес представляют стационарные состояния (точки покоя Xст.Yст.) системы, в которых производные переменных по времени равны нулю.

$$\frac{dX}{dt} | X_{CT}, Y_{CT} = 0 \; ; \; \frac{dY}{dt} | X_{CT}, Y_{CT} = 0 \; .$$

Соответственно равны нулю и правые части уравнений (2):

$$P(X_{CT}, Y_{CT}) = Q(X_{CT}, Y_{CT}) = 0$$

Точки покоя системы (2) могут быть устойчивыми и неустойчивыми по Ляпунову. Как известно, исследование устойчивости любого, а значит, и постоянного решения можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения. Поэтому далее будем считать, что система (2) имеет нулевое решение $X(t) = Y(t) \equiv 0$, т. е. $P(0,0) = Q(0,0) = 0$, и точка покоя совпадает с началом координат фазового пространства. Таким образом, устойчивость нулевого решения системы (2) означает устойчивость начала координат фазового пространства системы (2), и наоборот.

В данной работе проводится изучение типов стационарных состоянии и их устойчивости для нормальной системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dX}{dt} = P_1 \cdot X + P_2 Y \qquad (3)$$

$$\frac{dY}{dt} = P_3 \cdot X + P_4 Y$$

Точка (0,0) является точкой покоя системы (3). Исследуем расположение траектории системы (3) в окрестности этой точки. Из теории известно, что решение можно представить в следующем виде:

$X = \alpha_1 e^{kt}$, $Y = \alpha_2 e^{kt}$.

Для определения k получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} P1 - k & P2 \\ P3 & P4 - k \end{vmatrix} = 0 \quad \textbf{(4)}$$

Рассмотрим возможные случаи.

I. *Корни характеристического уравнения действительны и различны.*

1) $k_1 < 0, k_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел).

2) $k_1 > 0, k_2 > 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел).

3) $k_1 > 0, k_2 < 0$. Точка покоя неустойчива (седло).

4) $k_1 = 0, k_2 > 0$. Точка покоя неустойчива.

5) $k_1 = 0, k_2 < 0$. Точка покоя устойчива, но не асимптотически.

II. *Корни характеристического уравнения комплексные*:

$k_1 = p + q\,i$, $k_2 = p - q\,i$

1) $p < 0$, $q \neq 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый фокус).

2) $p > 0$, $q \neq 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый фокус).

3) $p = 0$, $q \neq 0$. Точка покоя устойчива (центр). Асимптотической устойчивости нет.

III. *Корни кратные*: $k_1 = k_2$

1) $k_1 = k_2 < 0$. Точка покоя асимптотически устойчива (устойчивый узел).

2) $k_1 = k_2 > 0$. Точка покоя неустойчива (неустойчивый узел).

3) $k_1 = k_2 = 0$. Точка покоя неустойчива. Возможен исключительный случай, когда все точки плоскости являются устойчивыми точками покоя.

Для системы (3) двух линейных уравнений с постоянными действительными коэффициентами характеристическое уравнение (4) приводится к виду

$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$

1) Если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво.

2) Если $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, или $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

3) Во всех остальных случаях нулевое решение неустойчиво; однако при $a_1 = a_2 = 0$ возможен исключительный случай, когда нулевое решение устойчиво, но не асимптотически.

Разновидности особых точек в фазовом пространстве для системы (3) представлены на рисунке 4.2.

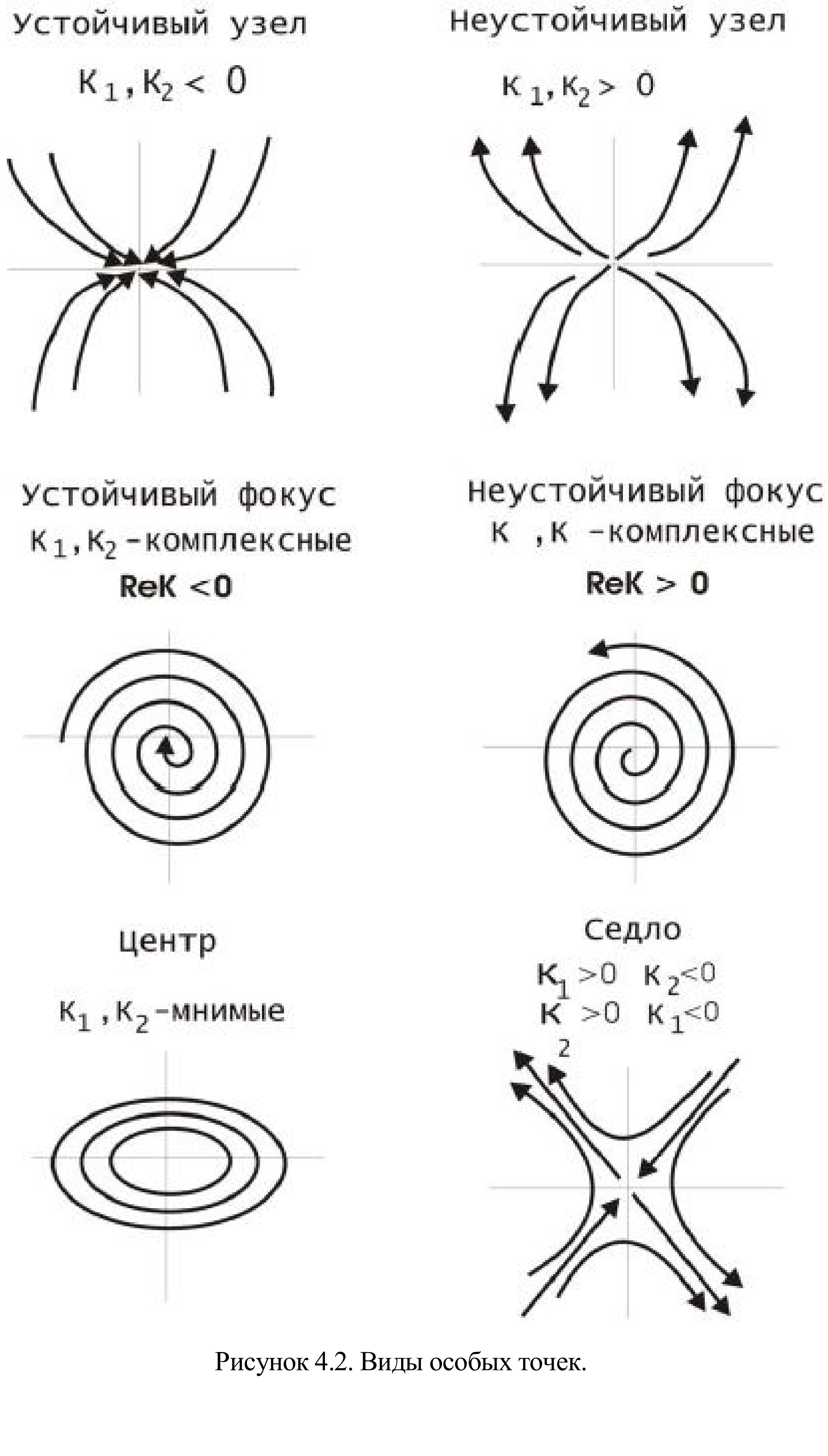

Рисунок 4.2. Виды особых точек.

ЦЕЛИ И ИСХОДНЫЕ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Цели выполняемой работы являются:

1. Аналитическая оценка устойчивости (вида особой точки) нулевого решения системы (3) для заданного набора значений коэффициентов правых частей.

2. Построение MatLab Simulink модели (S-модели) для численного решения системы (3) и выполнение с ее помощью расчетов и построение изображений динамики переменных X и Y во времени и фазовом пространстве для шести различных вариантов наборов параметров системы (таблица 4.1), описываемой уравнениями (3) с начальными и граничными условиями (таблица 4.2).

Таблица 4.1.

Варианты расчетов для исследования динамики линейных систем.

Номер варианта	В А Р И А Н Т Ы				Примечание
	P_1	P_2	P_3	P_4	
1.	**1**	**-1**	**1**	**1**	
2.	**3**	**-2**	**2**	**-1**	
3.	**1**	**4**	**1**	**1**	
4.	**2**	**1**	**1**	**2**	
5.	**-2**	**1**	**1**	**-2**	
6.	**1**	**-2**	**1**	**-1**	
7.	**-2**	**-1**	**-1**	**-2**	
8.	**2**	**-2**	**-2**	**2**	
9.	**4**	**2**	**2**	**1**	
10	**7**	**3**	**3**	**7**	
11	**7**	**-3**	**3**	**7**	
12	**-2**	**0**	**2**	**0**	

Таблица 4.2.

Начальные и граничные условия линейной системы

Наименование	**Значение**
$T_{\min}$	**0**
$T_{\max}$	**10**
$X_{\min}$	**-30**
$X_{\max}$	**+30**
$Y_{\min}$	**-30**
$Y_{\max}$	**+30**
T_0	**0**
X_0, Y_0	**варьируются**

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Используя библиотечные блоки Simulink, создайте Simulink-модель решения системы дифференциальных уравнений (3) (рисунок 4.3).

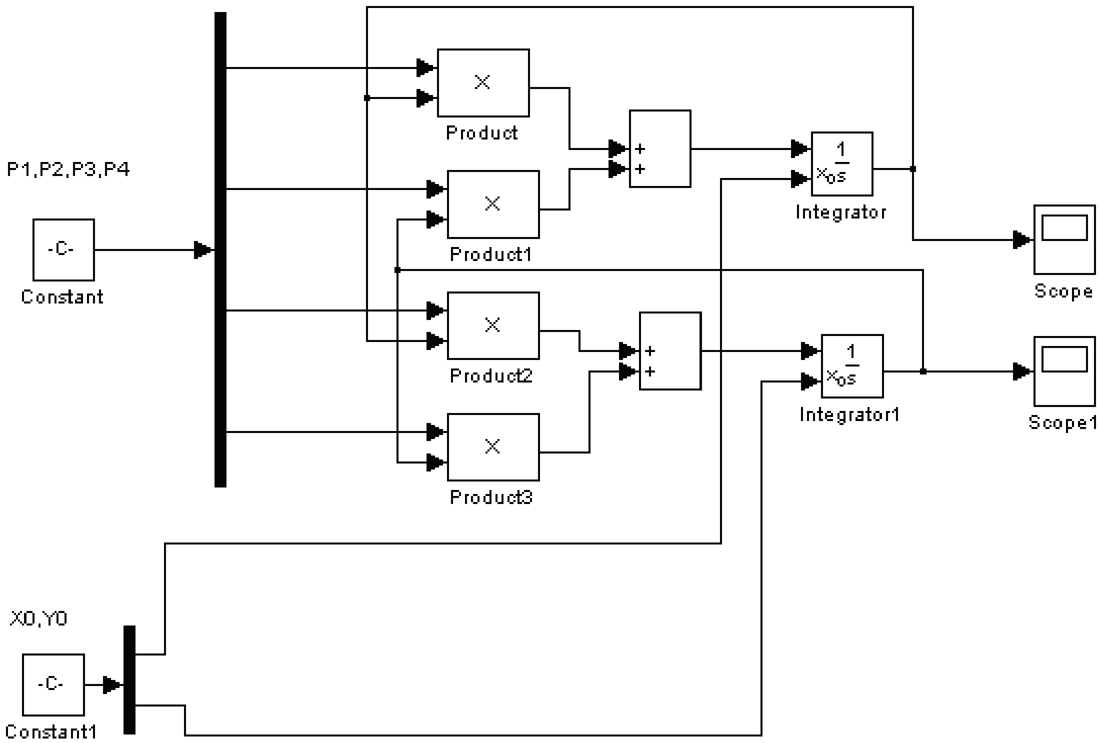

Рисунок 4.3. S-модель решения системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

2. Оцените работоспособность модели.

Задайте в блоках констант: значения вектора коэффициентов правых частей системы (3) в соответствии с заданными вариантами (таб. 1); начальные значения численности X_0 ,Y_0 ($0 < X_0 < 1$, $0 < Y_0 < 1$) Задайте интервал моделирования в диапазоне (0-10). Запустите модель на исполнение, нажав кнопку "Start". Результаты просмотрите в блоке "Scope" . Поэкспериментируйте с моделью, оцените полученные результаты.

3. Сохраните модель на своей дискете под именем: "UstDifurNN1NN2" , где NN1-код группы, NN2 – Ваш индивидуальный код.

4. Исследуйте построенную модель.

Для этого разработайте программу для проведения исследования модели "UstDifurNN1NN2" и построения соответствующих графиков:

Программа для модели "UstDifurNN1NN2" должна иметь о следующий вид:

```
%Программа исследования устойчивости системы дифуров
%Задание коэффициентов правых частей
P=[1 -2 1 -1]
%Открытие модели
open_system('UstDifurNN1NN2')
%Начальные условия
Y0=0.0;
for X0=0.0:0.003:0.009
%Формирование графиков и надписей
sim('UstDifurNN1NN2')
%Черчение графика X(t)
%Формирование временой кординаты
n=length(ScopeData (:,1));
L=1:n;
subplot(3,1,1)
plot(L,ScopeData(1:end,2))
%Формирование надписей
hold on
grid on
xlabel('t')
ylabel('X')
end
hold off
%Черчение графика Y(t)
for X0=0.0:0.003:0.009
sim('UstDifurNN1NN2')
%Формирование временой кординаты
n=length(ScopeData (:,1));
L=1:n;
subplot(3,1,2)
plot(L,ScopeData1(1:end,2))
%Формирование надписей
hold on
grid on
xlabel('t')
ylabel('Y')
end
hold off
%Черчение фазового портрета {X(t);Y(t)}
```

```
for Y0=0.0:0.005:0.01
for X0=0.0:0.003:0.009
sim('UstDifurNN1NN2')
subplot(3,1,3)
plot(ScopeData(1:end,2),ScopeData1(1:end,2))
%Формирование надписей
hold on
grid on
xlabel('X')
ylabel('Y')
end
end
hold off
```

Сохраните программу под именем “PrUstDifurNN1NN2". Запустите программу. В результате Вы должны получить два семейства графиков X (t), Y(t) и фазовый портрет (рисунок 4.4) Поэкспериментируете с программой, наблюдая отклики модели при различных значениях начальных условий X_0, Y_0 в окрестностях решения (0,0) и разных параметрах правых частей системы (3).

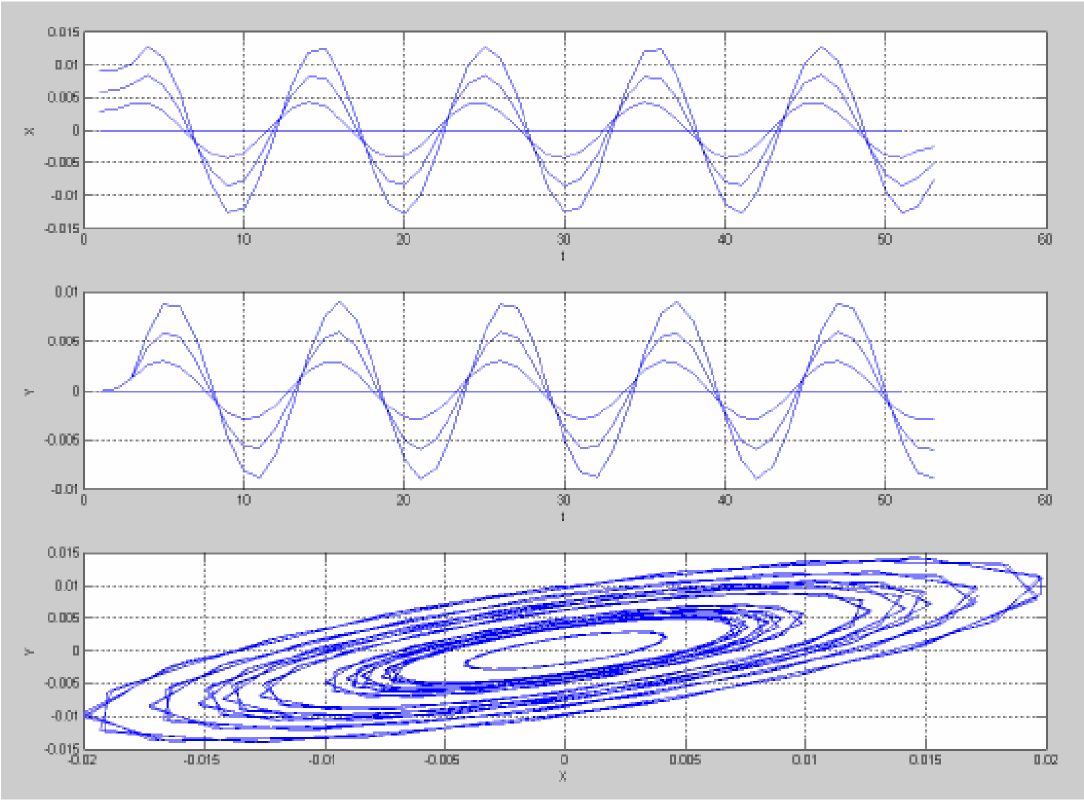

Рисунок 4.4 Семейство графиков X (t), Y(t) и фазовый портрет.

5.Создайте документ Word под именем "UstDifurNN1NN2".

а) Фамилии студентов выполнивших работу;

б) Постановку задачи (математические основы теории устойчивости);

б) Графическую схему построенной Simulink-модели решения системы дифференциальных уравнений (3) "UstDifurNN1NN2";

в) Текст программы, реализующей имитационный эксперименты с созданной S-моделью, и графики, представляющие визуализацию результатов работы программы;

д) Интерпретацию полученных результатов, ответы на контрольные вопросы и выводы.

Запишите рядом с полученным по программе фазовым портретом название типа соответствующей ему особой точки.

Аналитически, по формулам характеристического уравнения, подтвердите тип особой точки для, предложенного Вам варианта задачи. Для этого составьте характеристическое уравнение для системы (3), найдите его корни и оцените на этой основе устойчивость нулевого решения (0,0) и тип устойчивой точки.

контрольные вопросы:

- Как влияет изменение параметров правых частей (таб. 1) на тип особой точки?

- Каково влияние начальных условий на динамику поведения системы?

Литература

1. Гультяев А. Визуальное моделирование в среде Matlab: Учебный курс. Питер. 2000
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. Дьяконов В., Круглов В Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. Питер. 2001
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. Учебник. М.: Наука, 1985.

Лабораторная работа 5 Исследование динамики двух видовых популяций

Основная цель работы: исследование взаимоотношений «хищник-жертва» на фазовой плоскости и во времени методом математического моделирования.

Теоретическое введение.

Биологические системы вступают во взаимодействие друг с другом на всех уровнях, будь то взаимодействие биомакромолекул в процессе биохимических реакций, или взаимодействие видов в популяциях.

В популяционной динамике принято классифицировать взаимодействия по их результатам. Наиболее распространенными и хорошо изученными являются взаимодействия **конкуренции** (когда численность каждого из видов в присутствии другого растет с меньшей скоростью), **симбиоза** (когда виды способствуют росту друг друга) и типа **хищник-жертва** или паразит-хозяин (когда численность вида-жертвы в присутствии вида-хищника растет медленнее, а вида-хищника - быстрее). В природе также встречаются взаимодействия, когда один из видов чувствует присутствие второго, а другой - нет (**аменсализм** и **комменсализм**), или виды **нейтральны**.

Первое глубокое математическое исследование закономерностей динамики взаимодействующих популяций дано в книге В Вольтерра "Математическая теория борьбы за существование" (1931)) Крупнейший итальянский математик Вито Вольтерра - основатель математической биологии предложил описывать взаимодействие видов подобно тому, как это делается в статистической физике и химической кинетике, в виде мультипликативных членов в уравнениях (произведений численностей взаимодействующих видов). Тогда в общем виде с учетом самоограничения численности по логистическому закону система дифференциальных уравнений, описывающая взаимодействие двух видов, может быть записана в форме:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2 \quad (5.1)$$

Здесь параметры a_i - константы собственной скорости роста видов, c_i - константы самоограничения численности (внутривидовой конкуренции), $b_{i,j}$ - константы взаимодействия видов, (i,j=1,2). Соответствие знаков этих последних коэффициентов различным типам взаимодействий приведено в таблице.

Таблица 5.1.

Типы взаимодействия видов.

1.	СИМБИОЗ	$b_{12}, b_{21}>0$
2.	КОММЕНСАЛИЗМ	$b_{12}>0$, $b_{21}=0$
3.	ХИЩНИК-ЖЕРТВА	$b_{12}>0$, $b_{21}<0$
4.	АМЕНСАЛИЗМ	$b_{12}=0$, $b_{21}<0$
5.	КОНКУРЕНЦИЯ	b_{12}, $b_{21}<0$
6.	НЕЙТРАЛИЗМ	b12, b21=0

Исследование свойств моделей типа (5.1) приводит к некоторым важным выводам относительно исхода взаимодействия видов.

Уравнения конкуренции ($b_{12}>0$, $b_{21}<0$) предсказывают выживание одного из двух видов, в случае если собственная скорость роста другого вида меньше некоторой критической величины. Оба вида могут сосуществовать, если произведение коэффициентов межпопуляционного взаимодействия меньше произведения коэффициентов внутри популяционного взаимодействия: $b_{12}\, b_{21} < c_1\, c_2$.

Вольтерр предположил по аналогии со статистической физикой, что интенсивность взаимодействия пропорциональна вероятности встречи (вероятности столкновения молекул), то есть произведению концентраций. Это и некоторые другие предположения позволили построить математическую теорию взаимодействия популяций одного трофического уровня (конкуренция) или разных трофических уровней (хищник-жертва).

Системы, изученные Вольтерра, состоят из нескольких биологических видов и запаса пищи, который используют некоторые из рассматриваемых видов. О компонентах системы формулируются следующие допущения:

1. Пища либо имеется в неограниченном количестве, либо ее поступление с течением времени жестко регламентировано.

2. Особи каждого вида отмирают так, что в единицу времени погибает постоянная доля существующих особей.

3. Хищные виды поедают жертвы, причем в единицу времени количество съеденных жертв всегда пропорционально вероятности встречи особей этих двух видов, т.е. произведению количества хищников на количество жертв.

4. Если имеются пища в неограниченном количестве и несколько видов, которые способны ее потреблять, то доля пищи, потребляемая каждым видом в единицу времени, пропорциональна количеству особей этого вида, взятого с некоторым коэффициентом, зависящим от вида (модели межвидовой конкуренции).

5. Если вид питается пищей, имеющейся в неограниченном количестве, прирост численности вида за единицу времени пропорционален численности вида.

6. Если вид питается пищей, имеющейся в ограниченном количестве, то его размножение регулируется скоростью потребления пищи, т.е. за единицу времени прирост пропорционален количеству съеденной пищи.

Перечисленные гипотезы позволяют описывать сложные живые системы при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в правых частях которых имеются суммы линейных и билинейных членов. Как известно, такими уравнениями описываются и системы химических реакций.

Классическая модель Лотки и Вольтера.

Базовой моделью незатухающих колебаний служит классическое уравнение Вольтерра, описывающее взаимодействие видов типа хищник-жертва.

Рассмотрим модель взаимодействия хищников и их добычи, когда между особями одного вида нет соперничества. Пусть x_1 и x_2 число жертв и хищников соответственно. Предположим, что относительный прирост жертв x_1'/x_1 равен $a-bx_2$, $a>0$, $b>0$, где $\boldsymbol{a}$ — скорость размножения жертв в отсутствие хищников, $-bx_2$ - потери от хищников. Развитие популяции хищников зависит от количества пищи (жертв), при отсутствии пищи ($x_1=0$) относительная скорость изменения популяции хищников равна

$\frac{x_2'}{x_2}=-c$, $c>0$, наличие пищи компенсирует убывание, и при $x_1>0$ имеем,

$$\frac{x_2'}{x_2} = (-c + dx_1),\ d>0.$$

Таким образом, система Вольтера - Лотка имеет вид:

$$x_1' = (a - bx_2)x_1$$

$$x_2' = (-c + dx_1)x_2,\ \text{где } a,\ b,\ c,\ d > 0.\ (5.2)$$

Систему можно представить в следующем виде:

$$x_1' = ax_1 - bx_2x_1$$

$$x_2' = -cx_2 + dx_1x_2,\ \text{где } a,\ b,\ c,\ d > 0.\ (5.3)$$

Рассмотрим фазовый портрет системы Вольтерра - Лотка (рисунок 5.1.) для a=4, b=2.5, c=2, d=1 и графики ее решения с начальным условием $x_1(0)=3$, $x_2(0)=1$.

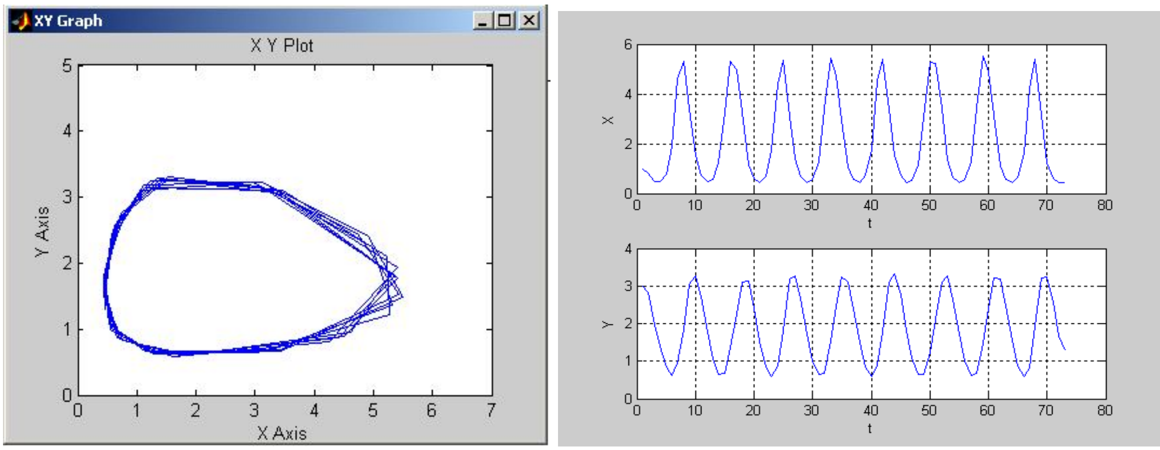

Рисунок 5.1. Фазовый портрет и графики системы Вольтерра – Лотка.

Видно, что процесс имеет колебательный характер. При заданном начальном соотношении числа особей обоих видов **3 : 1**, обе популяции сначала растут. Когда число хищников достигает величины ***b***, популяция жертв не успевает восстанавливаться и число жертв начинает убывать. Уменьшение количества пищи через некоторое время начинает сказываться на популяции хищников и когда число жертв достигает величины $\boldsymbol{x_1=c/d}$ (в этой точке $x_2'=0$), число хищников тоже начинает сокращаться вместе с сокращением числа жертв. Сокращение популяций происходит до тех пор, пока число хищников не достигнет величины $\boldsymbol{x_2=a/b}$ (в этой точке $x_1'=0$).С этого момента начинает расти популяция жертв, через некоторое время пищи становится достаточно, чтобы обеспечить прирост хищников, обе популяции растут, и .процесс повторяется снова и снова. На графике четко виден периодический характер процесса. Периодичность процесса явственно видна на фазовой плоскости — фазовая кривая ($x_1(t)$, $x_2(t)$) — замкнутая линия. Самая левая точка, этой кривой, - это точка, в которой число жертв достигает наименьшего значения. Самая правая точка, - точка пика популяции жертв. Между этими точками количество хищников сначала убывает, до нижней точки фазовой кривой, где достигает наименьшего значения, а затем растет до верхней точки фазовой кривой. Если в начальный момент система находилась в стационарной точке, то решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ не будут изменяться во времени, останутся постоянными. Всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию решений. Неэллиптичность формы траектории, охватывающей центр, отражает негармонический характер колебаний.

Уравнения Вольтерра-Лотка с логистической поправкой.

Рассмотрим модель конкурирующих видов с “логистической поправкой”:

$$x_1' = (a - bx_2)x_1 - \beta x_1^2$$

$$x_2' = (-c + dx_1)x_2 - \beta x_2^2 \quad (5.4)$$

или

$$x_1' = ax_1 - bx_2x_1 - \beta x_1^2$$

$$x_2' = -cx_2 + dx_1x_2 - \beta x_2^2 \quad (5.5)$$

В этом случае поведение решений в окрестности стационарной точки меняется в зависимости от величины и знака параметра β. Рассмотрим фазовый портрет системы Вольтерра—Лотка (рисунок 5.2) для β =0.1, a=4, b=2.5, c=2, d=1 и графики ее решения с начальным условием $x_1(0)$=3, $x_2(0)$=1.

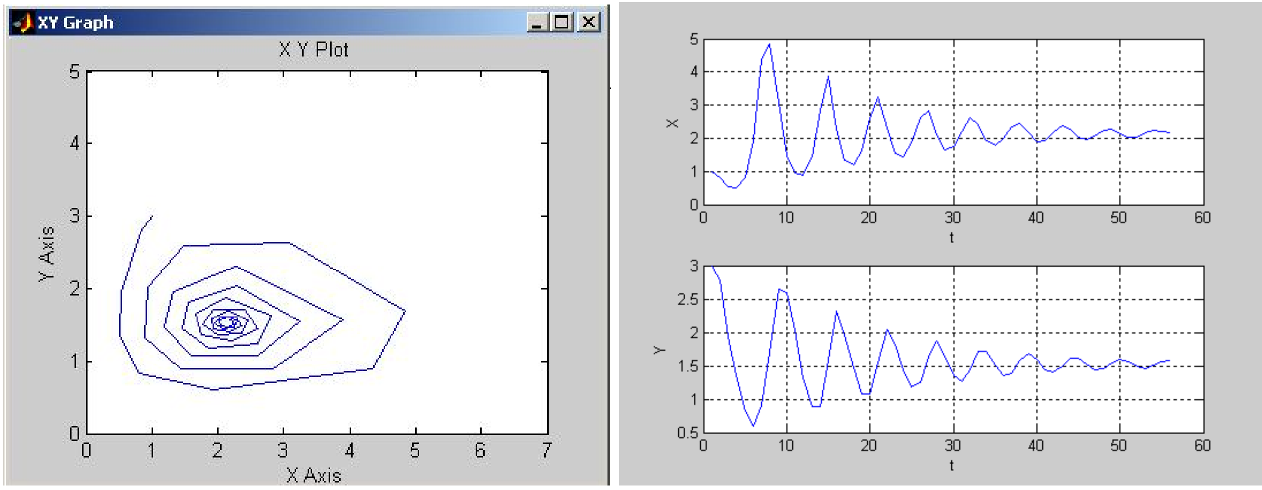

Рисунок 5.2. Фазовый портрет и графики
системы Вольтерра – Лотка с логистической поправкой.

Видно, что в этом случае стационарная точка превращается в устойчивый фокус, а решения — в затухающие колебания. При любом начальном условии состояние системы через некоторое время становится близким к стационарному и стремится к нему при $t \to \infty$.

В случае при отрицательном значении параметра β, стационарная точка является неустойчивым фокусом и амплитуда колебаний численности видов растет. В этом случае как бы близко ни было начальное состояние к стационарному, с течением времени состояние системы будет сильно отличаться от стационарного.

Рассмотренные модели 2 и 3 могу описывать поведение конкурирующих фирм, рост народонаселения, численность воюющих армий, изменение экологической обстановки, развитие науки и пр.

Порядок выполнения задания на примере исследования динамики сообщества типа хищник- жертва.

Цель задания - построение MatLab Simulink модели (S-модели) для численного решения системы (2) и выполнение с ее помощью расчетов и построение изображений динамики переменных x_1 (жертв) и x_2 (хищников) во времени и фазовом пространстве, описываемой уравнениями (2) с начальными и граничными условиями.

1.Используя библиотечные блоки Simulink, создайте в соответствии с моделью Вольтера Simulink-модель Вольтера «Хищник – жертва» (рисунок 5.3).

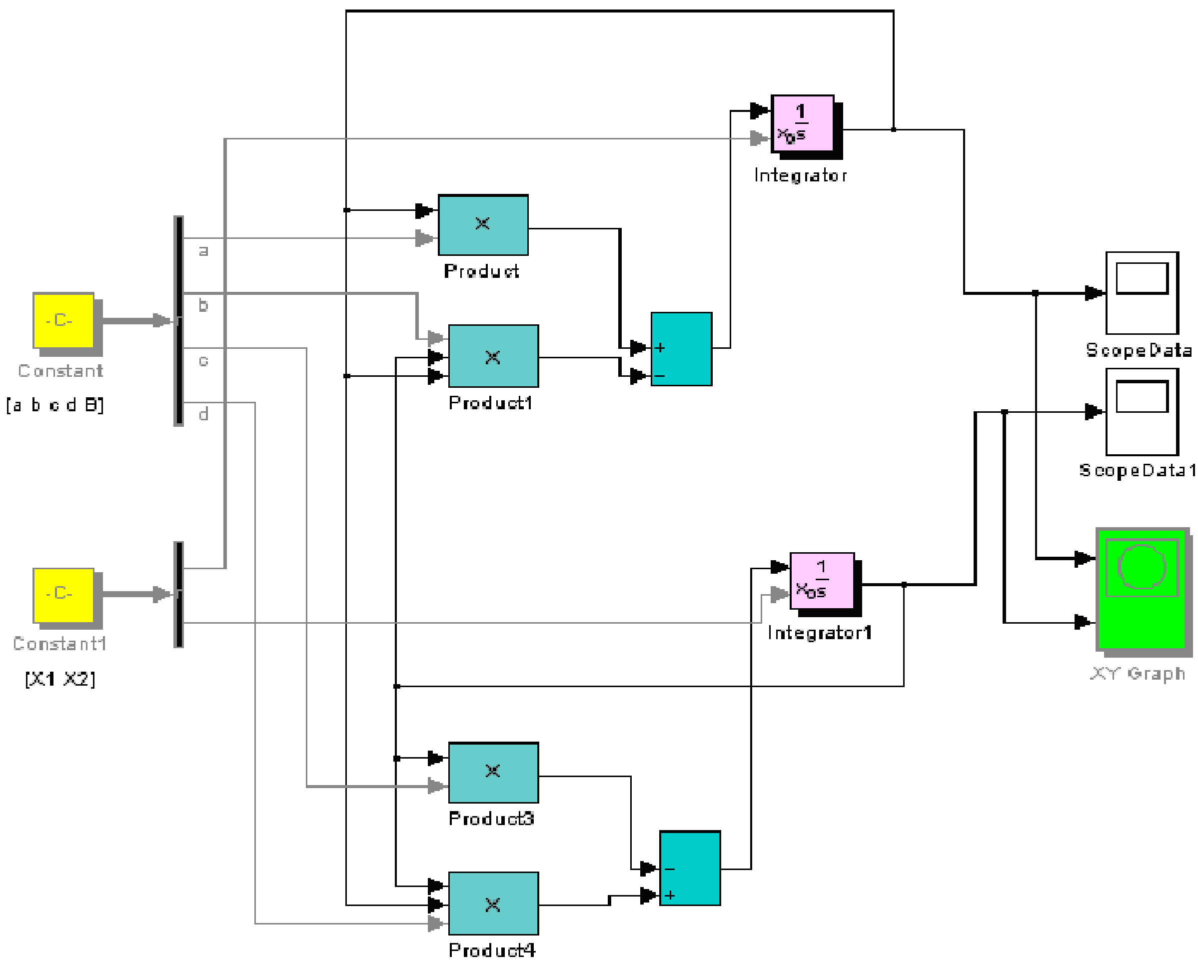

Рисунок 5.3. S-модель модель Вольтера «Хищник-жертва».

2. Проверьте работоспособность модели.

Задайте интервал моделирования в диапазоне (0-20). В блоках констант задайте: значения вектора коэффициентов правых частей системы (5.3) (0< a, b, c, d, <10); начальные значения численности X1 ,X2 (0 < X1< 5, 0 <X2< 5). Запустите модель на исполнение. Просмотрите результаты. Поэкспериментируйте с моделью оцените полученные результаты.

3. Сохраните модель на своей дискете под именем: "ModVolNN1NN2" , где NN1-код группы, NN2 – Ваш индивидуальный код.

4. Разработайте программу исследования модели "ModVolNN1NN2" и построения соотвествующих графиков. Сохраните программу на своей дискете под именем PrModVolNN1NN2. Она должна иметь приблизительно следующий вид:

```
%Программа исследования для модели Вольтера-Локка
%Открытие модели
open_system('labrab5')
%Начальные условия
X01=1
X02=3
a=4
b=2.5
c=2
d=1.0
%Расчет модели
sim('labrab5')
%Черчение графика X(t), формирование временой кординаты
%length - длина
n=length(ScopeData (:,1));
L=1:n;
subplot(2,1,1)
plot(L,ScopeData(1:end,2))
%Формирование надписей
hold on
grid
xlabel('t')
ylabel('X')
end
hold off
%Черчение графика Y(t)
%for X0=0.0:0.003:0.009
sim('labrab5')
%Формирование временной координаты
n=length(ScopeData1(:,1));
L=1:n;
subplot(2,1,2)
plot(L,ScopeData1(1:end,2))
%Формирование надписей
hold on
grid
xlabel('t')
ylabel('Y')
end
hold off
end
hold off
```

5. Аналогично, самостоятельно в соответствии с моделью «Хищник-жерва» с логистической поправкой (5.5):

а) создайте Simulink-модель, сохраните ее под именем ModVolterLogNN1NN2. Проверьте работоспособность модели.

б) Разработайте программу исследования модели "ModVolLogNN1NN2" и построения соответствующих графиков. Сохраните программу под именем PrModVolLogNN1NN2.

в) Задайте значение констант из постановки задачи и исследуйте модель, сделайте выводы по результатам исследования.

6. Аналогично, самостоятельно в соответствии с классической моделью взаимодействия двух популяций (5.1):

а) Создайте Simulink-модель, сохраните ее под именем ModKlassNN1NN2. Проверьте работоспособность модели.

б) Разработайте программу исследования модели "ModKlassNN1NN2" и построения соответствующих графиков. Сохраните программу под именем PrModKlassNN1NN2.

в) Исследуйте полученную модель на основные типы взаимодействия популяций (таблица 5.1; значения $|a_i, b_i| < 1$,. $0{,}3 < |c_i| < 0{,}5$). Сделайте выводы.

7. Создайте документ Word под именем " ModVolterNN1NN2"и задокументируйте:

а) Постановку задачи (историческая справка, математическая модель Вольтера, основные принципы взаимодействия популяций.

б) Графические схемы построенных Simulink-моделей Вольтера "ModVolLogNN1NN2" и "ModVolNN1NN2", ModKlassNN1NN2 и программы их исследования, графики.

в) Процесс исследования построенных моделей.

г.) Проведите анализ результатов, сделайте выводы и письменно ответьте на контрольные вопросы:

1. При каких значениях параметра β кривые системы (2) и (3) подобны?

2. Как значения параметра β для системы (3) влияют на форму кривых?

3. Как начальные значения X1 и X2 влияют на форму кривых?

4. Дайте определение константам a, b, c, d, как их значения влияют на формы кривых систем (2) и (3)?

Литература

1. Гультяев А. Визуальное моделирование в среде Matlab: Учебный курс. Питер. 2000
2. Дьяконов В., Круглов В Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. Питер. 2001
3. Смит Дж. М, Модели в экологии, М.: Мир, 1976.
4. Дьяконов В. MATLAB: Учебный курс. Питер. 2000
5. Полуэктов РА., Пых ЮА., Швытов ИА. Динамические модели экологических систем. Л.: Гидрометеоиздат. 1980.
6. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Ь. Математические модели биологических продукционных процессов: Учебное пособие. М.: Из-во МГУ, 1993.