

**КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

В.М. ЛАРИОНОВ, С.Е. ФИЛИПОВ

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКУ

г. Казань
2010

**КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

В.М. ЛАРИОНОВ, С.Е. ФИЛИПОВ

**ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКУ
(УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ)**

г. Казань
2010

Печатается по решению
Учебно–методической комиссии физического факультета КГУ

Ларионов В.М. – профессор кафедры физики молекулярных систем
Филипов С.Е. – кандидат технических наук, младший научный
сотрудник кафедры физики молекулярных систем

**Введение в гидродинамику. Учебное пособие: курс лекций,
решение задач. – Казань: КГУ, 2010. – 108 с.**

В пособии систематически излагаются физические и математические основы теории движения жидкости и газа. Дается вывод уравнений, описывающих движение идеальной и вязкой среды, приводятся основополагающие сведения о пограничном слое, ламинарном и турбулентном течении жидкости.

Книга рассчитана на студентов младших курсов высших учебных заведений, специализирующихся по механике жидкости и газа, теплофизике и энергетике, а также научных работников и инженеров, которым необходимы начальные знания по гидродинамике.

Рецензент: Ю.В. Ваньков, доктор техн. наук, профессор
(Казанский государственный энергетический институт)

Физический факультет Казанского государственного университета, 2010

Содержание

Предисловие	5
Глава 1. Идеальная жидкость	6
1.1. Уравнение непрерывности	7
1.2. Уравнение Эйлера	8
1.3. Уравнение Бернулли	12
1.4. Гидростатика.....	13
1.5. Поток энергии	15
1.6. Поток импульса	16
1.7. Сохранение циркуляции скорости.....	18
1.8. Потенциальное течение	19
1.9. Несжимаемая среда	21
1.10. Примеры потенциального течения несжимаемой жидкости.....	23
ЗАДАЧИ к Главе 1	28
Глава 2. Звуковые волны в газах	33
2.1. Линеаризация уравнений гидродинамики	33
2.2 Волновые уравнения, бегущие и стоячие волны	36
2.3. Продольные колебания газа в канале	39
2.4. Понятие импеданса	43
2.5. Колебания газа в трубе с произвольными импедансами на концах.....	44
2.6. Звуковые волны в движущейся среде	47
2.7. Энергия звуковой волны.....	49
2.8. Поглощение звука	51
2.9. Колебания газа в трубе с учетом потерь акустической энергии	53
2.10. Распространение звука в канале переменного сечения.....	55
ЗАДАЧИ к Главе 2	57
Глава 3. Вязкая жидкость	63
3.1. Уравнение движения вязкой жидкости.....	63
3.2. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости	66
3.3. Установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости	67

3.4. Подобные течения	71
3.5. Течение при малых числах Рейнольдса	73
3.6.Ламинарный пограничный слой	78
3.7. Обтекание пластины	80
3.8. Влияние пограничного слоя на характер течения жидкости.....	83
ЗАДАЧИ к Главе 3	86
Глава 4. Турбулентное движение несжимаемой вязкой жидкости	91
4.1. Общие положения	91
4.2. Логарифмический профиль скоростей.....	94
4.3. Турбулентное течение в трубе	97
4.4. Турбулентный пограничный слой	98
4.5. Кризис сопротивления	100
4.6. Турбулентная струя.....	101
ЗАДАЧИ к Главе 4	105
Список литературы.....	108

Предисловие

В течение ряда лет на специализации «Теплофизика и энергетика» физического факультета КГУ ведутся лекционные и практические занятия по курсу «Гидродинамика» для студентов третьего курса. Лекционный курс основывается на известных фундаментальных трудах: Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц «Гидродинамика», Г. Шлихтинг «Теория пограничного слоя», С.Н. Ржевкин «Курс лекций по теории звука». При разработке лекционного курса авторы исходили из того, что он является начальным, базовым курсом для обучения студентов по указанной выше специализации и должен читаться в течение одного семестра. Цель данного пособия – кратко и в доступной форме изложить основы теории течений жидкости и газа, закрепить полученные студентами знания в процессе решения задач, а также при выполнении лабораторных работ, которые проводятся параллельно чтению лекций.

Авторы выражают признательность рецензенту профессору Ю.В. Ванькову за положительную оценку пособия, профессору А.В. Аганову и профессору Д.А. Таюрскому за ряд ценных редакторских замечаний, а также инженеру В.И. Назаренко за помощь в подготовке лекционных материалов к печати.

Глава 1. Идеальная жидкость

Данный курс посвящен изложению теории движения жидкостей и газов, что составляет предмет изучения одного из разделов физики – механики жидкости и газа. Явления рассматриваются с макроскопической точки зрения, то есть внутреннее строение газов и жидкостей, их микроскопические свойства не изучаются. Эти задачи являются предметом исследования другого раздела физики – «Молекулярной физики». Под макроскопичностью понимается то, что всякий малый объем жидкости или газа считается еще достаточно большим в том смысле, что содержит большое число молекул. Поэтому, если будет говориться о бесконечно малом объеме, то подразумевается, что рассматриваемый объем мал по сравнению со всем объемом, который занимает жидкость или газ, но намного больше межмолекулярного расстояния. Следовательно, термины «частица, точка» в гидромеханике – это не отдельные молекулы.

Согласно приближению сплошной среды параметры, которые будут определять состояние жидкости или газа в любой точке и любой момент времени – следующие: давление P , плотность ρ и температура T . Поскольку тепловые явления не будут рассматриваться, оставим первые два параметра. При необходимости, воспользовавшись уравнением состояния среды, температуру можно определить через давление и плотность. Очевидно, что для движущейся среды необходимо ввести скорость движения – скорость потока (течения) \vec{U} . В общем случае термодинамические величины и скорость потока – функции координат и времени, кроме того, скорость имеет три компоненты. Таким образом, для полного описания движения жидкости необходимо определить пять величин:

$$U_x(x, y, z, t); U_y(x, y, z, t); U_z(x, y, z, t); P(x, y, z, t); \rho(x, y, z, t).$$

1.1. Уравнение непрерывности

Это уравнение – следствие закона сохранения массы вещества. Выберем некоторый объем V_0 (Рис. 1.1). Масса жидкости в этом объеме $\int_{V_0} \rho dV$.

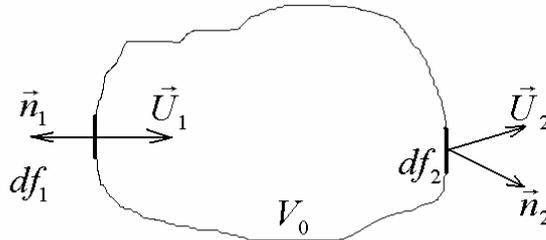


Рис. 1.1. Изменение массы жидкости в произвольно выбранном объеме

За бесконечно малый промежуток времени dt площадку df пересекут частицы жидкости, находящиеся в объеме $dw = df dl \cos \theta$ (Рис. 1.2). Так как $dl = U dt$, через элемент поверхности, ограничивающей объем V_0 , в единицу времени поступает масса жидкости $\rho dw/dt = \rho \vec{U} d\vec{f}$. Полное количество жидкости, вытекающей из объема V_0 , после интегрирования по всей его поверхности равно $\oint \rho \vec{U} d\vec{f}$.

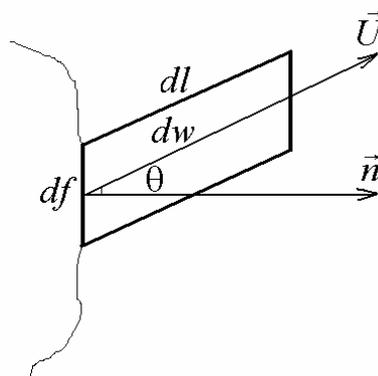


Рис. 1.2. Поток массы жидкости

Если внутри жидкости нет источников массы, то количество вещества, вышедшее из объема V_0 , должно равняться уменьшению количества вещества внутри объема, то есть

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \vec{U} d\vec{f}.$$

Поскольку, $\oint \rho \vec{U} d\vec{f} = \int_{V_0} \operatorname{div}(\rho \vec{U}) dV$, получим

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) \right) dV = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться для любого выбранного объема, то подынтегральное выражение равно нулю, то есть

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0. \quad (1.1)$$

Это и есть уравнение непрерывности, которые можно переписать и в другой форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{U}) + \vec{U} \operatorname{grad} \rho = 0.$$

Вектор $\rho \vec{U}$ называется плотностью потока жидкости. Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а модуль определяет массу жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно потоку.

То же уравнение получится и в том случае, если жидкость накапливается в объеме. В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = -\oint \rho \vec{U} d\vec{f},$$

а дальнейший ход рассуждений такой же, как и выше.

1.2. Уравнение Эйлера

Выделим в жидкости некоторый объем V_0 (Рис.1.3). Полная сила, действующая на него равна

$$-\oint P d\vec{f},$$

где интеграл берется по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Преобразуя в интеграл по объему, получаем

$$-\oint P d\vec{f} = -\int_{V_0} \text{grad}(P) dV.$$

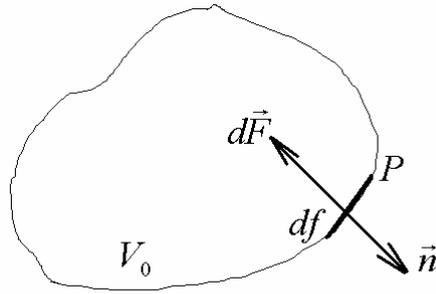


Рис. 1.3. Сила, действующая на жидкость в произвольно выбранном объеме

То есть на каждый элемент объема dV среды действует со стороны окружающей его среды сила $-\text{grad}(P)dV$, а на единицу объема – сила $\vec{F}_1 = -\text{grad}(P)$. По второму закону Ньютона для массы единицы объема среды ρ получим

$$\vec{F}_1 = \rho \frac{d\vec{U}}{dt} \text{ или } \rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\text{grad}(P).$$

С учетом того, что $\vec{U} = \vec{U}(t, x, y, z)$, имеем

$$d\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} dz,$$

следовательно, ускорение единицы объема среды равно

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Поскольку $\frac{dx}{dt} = U_x$, $\frac{dy}{dt} = U_y$, $\frac{dz}{dt} = U_z$, вводя оператор ∇ , получим

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим физический смысл этого выражения. Первое слагаемое – это так называемое «локальное» ускорение, связанное с изменением скорости частиц во времени, но в точке с фиксированными координатами. Движение, при котором скорость изменяется со временем, называется нестационарным или неустановившимся. Второе слагаемое в (1.2) называют «конвективным» ускорением, и оно связано с изменением скорости частицы при перемещении из

одной точки в другую. Дадим простую иллюстрацию сказанного с помощью следующего опыта. Газ или жидкость истекают из большой емкости, через узкую трубку (Рис. 1.4). Поршень неподвижен, давление в емкости достаточно большое, трубка – короткая. В начальный период истечения давление в емкости практически постоянно. Частицы среды разгоняются на участке 0-1, так как в самой емкости направленное движение частиц отсутствует.

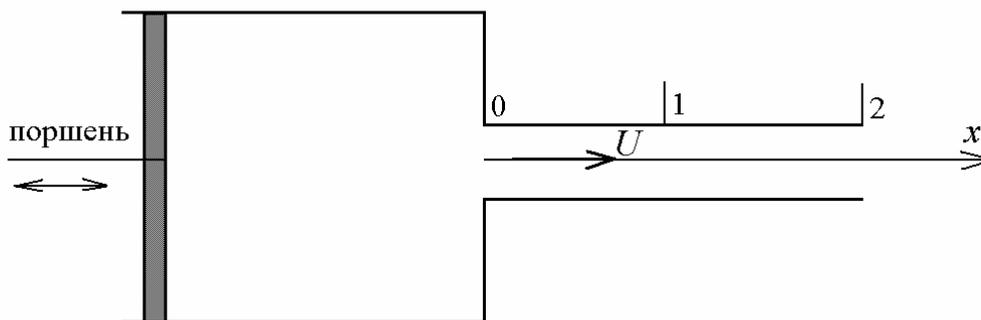


Рис.1.4. Локальное и конвективное ускорение

В сечении 1 скорость частицы равна U_1 , то есть в этом случае на участке 0-1 действует конвективное ускорение, обусловленное тем, что $(\partial U / \partial x) \neq 0$.

На участке 1–2 среда движется равномерно, то есть $U_1 = U_2$ и конвективное ускорение равно нулю. Локальное ускорение тоже отсутствует, так как скорость частиц в каждом из указанных сечений с течением времени остается неизменной.

Пусть теперь поршень совершает гармонические колебания около первоначального положения. В этом случае вслед за изменениями давления в емкости, будет периодически изменяться скорость частиц в сечении 1, а, следовательно, и в сечении 2, то есть существует локальное ускорение, а процесс истечения становится нестационарным.

Окончательно, уравнение движения среды принимает вид

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(P). \quad (1.3)$$

Это уравнение назвали в честь Эйлера, который первым получил данное соотношение.

Если среда движется в поле тяжести, то с учетом силы тяжести,

действующей на единицу объема, уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g}. \quad (1.4)$$

Как отмечалось выше, процессы, связанные с внутренним трением – вязкостью среды не учитываются, также как и теплообмен между различными ее участками. Такие среды – идеальные. Отсутствие теплообмена означает, что движение происходит в адиабатических условиях. Так как $\delta Q = TdS$, $\delta Q = 0$, энтропия S каждого участка среды остается постоянной, то есть движение жидкости изоэнтропическое.

Из термодинамики известно, что $dH = TdS + VdP$, H – энтальпия. Для единицы массы жидкости при условии $S = \text{const}$, получим

$$dH = dP/\rho.$$

Из уравнения адиабаты идеального газа $P \cdot V^\gamma = \text{const}$ следует $P = \text{const} \cdot \rho^\gamma$, то есть $\rho = \rho(P)$. Тогда

$$H = \int \frac{dP}{\rho(P)} + \text{const}, \text{ то есть } H = H(P).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{dH}{dP} \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad x_i = x, y, z, \quad \text{grad } H = \frac{dH}{dP} \text{grad } P = \frac{1}{\rho} \text{grad } P.$$

Тогда уравнение Эйлера (1.4) принимает вид

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\nabla H + \vec{g}. \quad (1.5)$$

Это уравнение можно записать и в другой форме, используя известную из векторного анализа формулу

$$(\vec{U} \nabla) \vec{U} = \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{U}^2) - [\vec{U} \text{rot } \vec{U}].$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - [\vec{U} \text{rot } \vec{U}] = -\text{grad} \left(\frac{U^2}{2} + H \right) + \vec{g}. \quad (1.6)$$

И, наконец, без учета силы тяжести, применив к обеим частям уравнения (1.6) операцию rot , получим еще одну форму уравнения Эйлера, в которое

входит только скорость

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{U} = \operatorname{rot}[\vec{U} \operatorname{rot} \vec{U}]. \quad (1.7)$$

1.3. Уравнение Бернулли

Рассматривается установившийся поток жидкости или газа, при котором в каждой точке пространства, занятого жидкостью, скорость течения остается постоянной во времени, то есть $\partial \vec{U} / \partial t = 0$. Уравнение Эйлера (1.6) принимает вид

$$[\vec{U} \operatorname{rot} \vec{U}] = \nabla \left(\frac{U^2}{2} + H \right) - \vec{g}. \quad (1.8)$$

Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора скорости в точке касания, называются линиями тока. Они описываются системой уравнений

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}. \quad (1.9)$$

Для установившегося течения жидкости линии тока остаются неизменными во времени и совпадают с траекториями частиц. В случае неустановившегося движения среды касательные к линии тока дают направления скорости разных частиц в последовательных точках пространства в определенный момент времени и не совпадают с траекторией частицы, касательные к которой дают направление скорости определенной частицы в последовательные моменты времени.

Умножим уравнение (1.8) на единичный вектор \vec{l} касательный к линии тока в произвольной точке. Вектор $[\vec{U} \operatorname{rot} \vec{U}]$ перпендикулярен \vec{U} и его проекция на направление \vec{l} равна нулю.

Учтем поле тяжести, направленное в отрицательном направлении оси z . Тогда $\vec{g} = -\nabla(gz) = -\vec{l}_z g = \vec{l}_g g$.

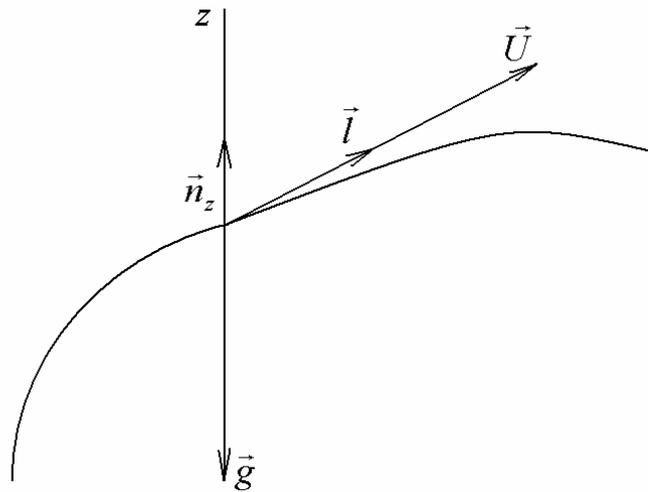


Рис.1.5. К выводу уравнения Бернулли

Известно, что

$$(\text{grad}(f))_l = \frac{\partial f}{\partial l} = (\nabla f \vec{l}),$$

и это производная некоторой функции f по направлению l . Тогда вдоль данной линии тока выполняется соотношение

$$\frac{U^2}{2} + H + gz = \text{const}, \quad (1.10)$$

которое и называется уравнением Бернулли.

Для газов это уравнение имеет вид

$$\frac{U^2}{2} + H = \text{const}, \quad (1.11)$$

так как сила тяжести, обычно, не учитывается.

1.4. Гидростатика

Для покоящейся жидкости $\vec{U} = 0$, поэтому из уравнения Эйлера (1.4) получим $\nabla P = \rho \vec{g}$.

Если плотность жидкости во всех точках занимаемого объема одинакова, из начального уравнения следует

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g.$$

Тогда $P = -\rho gz + \text{const}$. Постоянная находится из условия, что при $z = h$, то есть на свободной поверхности жидкости $P = P_0$. Распределение давления принимает вид

$$P = P_0 + \rho g(h - z).$$

Для больших масс жидкости, например, в озере, плотность не является постоянной. Рассмотрим состояние термодинамического (теплового) равновесия. Из первого закона термодинамики следует

$$d\Phi = -SdT + VdP,$$

где $\Phi(T, P)$ – термодинамический потенциал единицы массы жидкости. Так как $T = \text{const}$, а $V = 1/\rho$, имеем

$$d\Phi = VdP = dP/\rho, \nabla\Phi = \nabla P/\rho = \vec{g} = -\nabla(gz).$$

Отсюда следует

$$\Phi + gz = \text{const}.$$

Это условие теплового равновесия.

Как показывают исследования, жидкость может находиться в механическом равновесии (то есть отсутствует макроскопическое движение), не находясь при этом в состоянии теплового равновесия. Такое состояние не является устойчивым, внутри жидкости возникают хаотические течения, перемешивающие участки с различной температурой, пока она не станет постоянной. Это явление называется конвекцией. Условие отсутствия конвекции имеет вид

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g\beta T}{c_p},$$

где $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$, β – температурный коэффициент расширения. Для

идеального газа условие отсутствия конвекции принимает вид

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}.$$

Следовательно, конвекция наблюдается, если температура газа уменьшается по направлению снизу-вверх, а градиент ее по абсолютному значению больше g/c_p . В этом случае холодные участки устремляются вниз,

вытесняя теплые и перемешиваясь с ними.

1.5. Поток энергии

Рассмотрим произвольный элемент объема среды, энергия которого в расчете на единицу объема равна

$$E = \rho \frac{U^2}{2} + \rho \varepsilon,$$

где первый член есть кинетическая энергия, второй – внутренняя энергия, ε – энергия единицы массы.

Изменение энергии с течением времени равно

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho U^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = \frac{U^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{U} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t}.$$

С учетом уравнения непрерывности (1.1) и Эйлера (1.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho U^2}{2} \right) = -\frac{U^2}{2} \operatorname{div}(\rho \vec{U}) - \vec{U} \operatorname{grad} P - \rho \vec{U} (\vec{U} \nabla) \vec{U}.$$

Используем соотношение $dH = TdS + dP/\rho$, его следствие

$\nabla P = \rho(\nabla H)$, а также $2\vec{U}(\vec{U} \nabla) \vec{U} = \vec{U} \nabla U^2$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho U^2}{2} \right) = -\frac{U^2}{2} \operatorname{div}(\rho \vec{U}) - \rho \vec{U} \nabla \left(H + \frac{U^2}{2} \right). \quad (1.12)$$

Теперь найдем полный дифференциал внутренней энергии

$$d(\rho \varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon.$$

При постоянной энтропии из термодинамических соотношений следует

$$d\varepsilon = TdS - PdV = \frac{P}{\rho^2} d\rho,$$

$$d(\rho \varepsilon) = \varepsilon d\rho + \frac{P}{\rho} d\rho = \left(\varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) d\rho = Hd\rho.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} = H \frac{\partial \rho}{\partial t} = -H \operatorname{div}(\rho \vec{U}). \quad (1.13)$$

Сложив (1.12) и (1.13), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho U^2}{2} + \rho \varepsilon \right) = - \left(H + \frac{U^2}{2} \right) \operatorname{div} \rho \vec{U} - \rho \vec{U} \nabla \left(H + \frac{U^2}{2} \right) = \\ &= - \operatorname{div} \left[\rho \vec{U} \left(H + \frac{U^2}{2} \right) \right].\end{aligned}$$

Интегрируем по всему объему жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho U^2}{2} + \rho \varepsilon \right) dV = - \int \operatorname{div} \left\{ \rho \vec{U} \left(\frac{U^2}{2} + H \right) \right\} dV = - \oint \rho \vec{U} \left(\frac{U^2}{2} + H \right) d\vec{f}.$$

Слева – изменение энергии среды в некотором объеме за единицу времени, справа – количество энергии, уходящей в единицу времени через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем. Величина

$$\rho \vec{U} \left(\frac{U^2}{2} + H \right) \quad (1.14)$$

называется плотностью потока энергии. Полагая $H = \varepsilon + P/\rho$, получим,

$$- \oint \rho \vec{U} \left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon \right) d\vec{f} - \oint P \vec{U} d\vec{f}.$$

Первый член – кинетическая и внутренняя энергия, переносимая в единицу времени средой, пересекающей поверхность границы рассматриваемого объема. Второй член – это работа сил давления над средой внутри рассматриваемой поверхности.

1.6. Поток импульса

Импульс единицы объема жидкости равен $\rho \vec{U}$. Изменение его i -ой компоненты со временем в тензорной форме имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho U_i = \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right).$$

Используем уравнение непрерывности и уравнение Эйлера в тензорной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho U_k)}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} = -U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho U_i = -\rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - U_i \frac{\partial(\rho U_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \rho U_i U_k.$$

Полагая

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \delta_{i,k} \frac{\partial P}{\partial x_k}, \quad \Pi_{i,k} = P \delta_{i,k} + \rho U_i U_k, \quad (1.15)$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho U_i = -\frac{\partial \Pi_{i,k}}{\partial x_k}.$$

Выясним смысл симметричного тензора $\Pi_{i,k}$. Рассмотрим интеграл по некоторому объему

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho U_i dV = -\int \frac{\partial \Pi_{i,k}}{\partial x_k} dV = -\oint \Pi_{i,k} df_k.$$

Слева имеем изменение в единицу времени i -й компоненты импульса жидкости в рассматриваемом объеме. Справа – количество импульса, вытекающего в единицу времени через ограничивающую объем поверхность. Тогда $\Pi_{i,k} df_k$ – i -я компонента импульса, протекающая через элемент df поверхности. Положим $df_k = n_k df$, где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности df . Тогда $\Pi_{i,k} n_k$ – поток i -й компоненты импульса через единичную площадку. Тогда

$$\Pi_{i,k} n_k = P n_i + \rho U_i U_k n_k$$

или в векторной форме

$$P \vec{n} + \rho \vec{U} (\vec{U} \vec{n}).$$

Тензор второго ранга $\Pi_{i,k}$ называется тензором плотности потока импульса, а само выражение – поток вектора импульса в направлении \vec{n} , то есть через поверхность, перпендикулярную к \vec{n} . Если выбрать направление \vec{n} , совпадающим с вектором скорости, то в этом направлении переносится лишь продольная компонента импульса с плотностью потока $P + \rho U^2$.

В направлении, перпендикулярном вектору скорости переносится поперечная компонента импульса с плотностью потока, равной P , что обусловлено сжимаемостью среды.

1.7. Сохранение циркуляции скорости

Интеграл

$$\Gamma = \oint \vec{U} d\vec{l} ,$$

взятый вдоль замкнутого контура, называется циркуляцией скорости вдоль этого контура.

Выделим в жидкости замкнутый контур, составленный из частиц жидкости в некоторый момент времени. С течением времени частицы, а вместе с ними и контур перемещается. Возьмем производную

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{U} d\vec{l} .$$

Элемент $d\vec{l}$ длины контура можно записать как $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, то есть разница радиус-векторов концов вектора $d\vec{l}$.

С течением времени изменяется и скорость, и форма контура, поэтому

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{U} d\vec{r} = \oint \frac{d\vec{U}}{dt} d\vec{r} + \oint \vec{U} \frac{d}{dt} (d\vec{r}) .$$

Второй член справа исчезает, так как

$$\vec{U} \frac{d}{dt} d\vec{r} = \vec{U} d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{U} d\vec{U} = d\left(\frac{U^2}{2}\right) ,$$

а интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю.

С учетом того, что согласно уравнению Эйлера $d\vec{U}/dt = -\text{grad}(H)$, применяя формулу Стокса, получим

$$\oint \frac{d\vec{U}}{dt} d\vec{r} = \int \text{rot} \left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right) d\vec{f} = -\int \text{rot} \text{grad}(H) d\vec{f} = 0 ,$$

так как $\text{rot} \text{grad}(H) = 0$.

Таким образом

$$\Gamma = \oint \vec{U} d\vec{l} = \text{const} ,$$

то есть циркуляция скорости идеальной жидкости вдоль замкнутого контура остается постоянной во времени. Это теорема Томсона или закон сохранения циркуляции скорости.

1.8. Потенциальное течение

Рассмотрим бесконечно малый замкнутый контур δC . Тогда из теоремы Томсона с учетом формулы Стокса следует

$$\oint_{\delta C} \vec{U} d\vec{l} = \int_{\delta f} \text{rot} \vec{U} d\vec{f} \approx \delta f \text{rot} \vec{U} = \text{const}. \quad (1.16)$$

Вектор $\text{rot} \vec{U}$ называется завихренностью течения в данной точке и, следовательно, завихренность переносится движущейся средой без изменения.

Рассмотрим установившееся движение среды и пусть в некоторой точке, лежащей на линии тока, $\text{rot} \vec{U} = 0$. Тогда из уравнения (1.16) это условие справедливо вдоль всей линии тока. Такое движение, при котором завихренность течения равна нулю во всем пространстве, занятом средой, называется потенциальным (или безвихревым). Например, установившееся движение идеальной жидкости в трубе. Рассмотрим также обтекание какого-нибудь тела, помещенного в поток. Вдали от тела, как говорят «на бесконечности», поток однороден, $\vec{U} = \text{const}$, $\text{rot} \vec{U} = 0$ на всех линиях тока, то есть во всем пространстве. Аналогично, пусть в некоторый момент времени движение во всем объеме потенциально, то оно будет таким же и в дальнейшем, как это следует из теоремы Томсона. Например, потенциальным должно быть всякое движение, для которого в начальный момент времени среда покоилась ($\vec{U} = 0$). Реально это не происходит. Позади тела образуется поверхность разрыва, отделяющая движущуюся среду от застойной зоны – «следа», где среда или неподвижна или совершает вихревое движение. Это связано с тем, что вблизи границ тела существенную роль играет вязкость среды, здесь образуется так называемый пограничный слой. В теореме Томсона среда – идеальная.

Тем не менее, есть случаи, когда обтекание тел можно считать потенциальным, конечно с определенной степенью точности. Во-первых, тела с «хорошо» обтекаемым профилем, например, крыло самолета, то есть когда

область следа очень маленькая. Во-вторых движение среды, первоначально покоящейся, вызванное колебаниями тела, когда амплитуда колебаний мала по сравнению с размерами тела ($a \ll l$). Пусть цилиндр колеблется в трубе по гармоническому закону $x = a \exp(i\omega t)$. Пусть в некоторый момент времени цилиндр остановился в правом крайнем положении. Тогда, слева скорость среды равна нулю, а справа $\sim v$, то есть изменение скорости среды по координате $\partial U / \partial x \sim v/l$. Сама скорость среды $\sim v$, то есть $\partial U / \partial t \sim \omega v$. Тогда $U(\partial U / \partial x) \sim v^2 / l$; $\omega \sim 1/T \sim v/a$, то есть $\partial U / \partial t \sim v^2 / a$. Значит, в уравнении Эйлера член $\vec{U}(\nabla \vec{U})$ намного меньше, чем $\partial \vec{U} / \partial t$, и его можно не учитывать.

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{U} = -\text{rot}(\nabla H) = 0, \quad \text{rot} \vec{U} = \text{const}.$$

Так как при гармоническом движении в определенные моменты времени $\vec{U} = 0$, то $\text{const} = 0$ и $\text{rot} \vec{U} = 0$ в любой момент времени, а движение среды – потенциальное.

Рассмотрим некоторые особенности потенциальных течений.

1. Поскольку завихренность отсутствует – линии тока при потенциальном течении – незамкнутые. Для замкнутой линии тока циркуляция $\oint \vec{U} d\vec{l}$ может быть и не равна нулю.

2. Положим $\vec{U} = \text{grad} \varphi$, где φ называется потенциалом скорости.

Возьмем уравнение Эйлера в виде

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} - [\vec{U} \text{rot} \vec{U}] = -\nabla \left(H + \frac{U^2}{2} \right).$$

После введения потенциала получим

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H + \frac{U^2}{2} \right) = 0, \quad \text{то есть} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + H + \frac{U^2}{2} = f(t), \quad (1.17)$$

где $f(t)$ – произвольная функция.

Для установившегося течения имеем

$$\frac{U^2}{2} + H = \text{const.}$$

По форме – это уравнение Бернулли. Однако, если для непотенциального движения это уравнение справедливо для каждой линии тока отдельно со своей const , то при безвихревом течении эта константа одна и та же во всем пространстве для всех линий тока.

1.9. Несжимаемая среда

Если плотность остается неизменной по всему объему, занятому средой и в любой момент времени, среда называется несжимаемой ($\rho = \text{const}$).

В уравнении Эйлера (1.4) $\nabla H = \nabla P / \rho = \nabla(P / \rho)$, то есть

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\nabla(P / \rho) + \vec{g}.$$

Уравнение непрерывности (1.1) имеет вид

$$\text{div} \vec{U} = 0.$$

Обычно уравнение Эйлера берут в виде (1.7), так как плотность исключается из рассмотрения.

Еще более простые уравнения для потенциального течения несжимаемой среды. Уравнение (1.7) превращается в тождество. Уравнение непрерывности принимает вид $\Delta \phi = 0$.

Поскольку для изоэнтропического течения $H = P / \rho + \text{const}$, уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const.}$$

Из уравнения Бернулли без учета силы тяжести при $\rho = \text{const}$ следует, что давление в среде максимально в точках, где среда покоится, так как

$$P + \frac{\rho U^2}{2} = \text{const.}$$

При обтекании тела такая точка располагается на его поверхности и называется передней критической точкой (Рис. 1.6). Внешняя нормаль к поверхности тела в этой точке направлена противоположно вектору скорости.

Давление в передней критической точке равно

$$P_k = P_{\max} = P_o + \frac{\rho U_o^2}{2},$$

где P_o – статическое давление, второе слагаемое – динамическое давление в потоке жидкости перед телом.

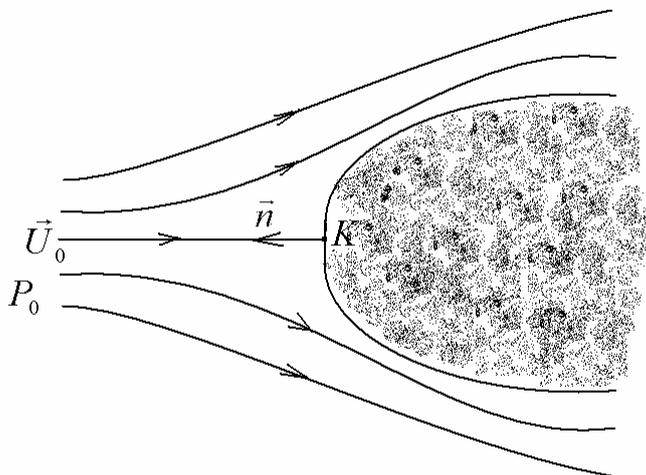


Рис. 1.6. Понятие передней критической точки

Если течение происходит в двухмерном пространстве, его называют плоским. Если положить

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

то уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \equiv 0.$$

ψ – функция тока, которая определяется из уравнения (1.7) после замены U_x и U_y .

Уравнение линий тока (1.9) имеет вид

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y} \quad \text{или} \quad U_y dx - U_x dy = 0.$$

Вводя в уравнение функцию тока, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0.$$

Значит линии тока – семейство кривых, которые определяются уравнением $\psi = \text{const}$.

1.10. Примеры потенциального течения несжимаемой жидкости

1. Рассмотрим движение жидкости вблизи передней критической точки обтекаемого тела. Возьмем бесконечно малый участок вблизи этой точки, лежащий в плоскости x, y . Разложим потенциал в ряд с точностью до членов второго порядка малости

$$\varphi = ax + by + cz + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz.$$

Жидкость считаем несжимаемой, то есть выполняется уравнение Лапласа для потенциала скорости $\Delta\varphi = 0$.

Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = U_z = 0 \text{ при } z=0 \text{ и любых } x, y;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } x=y=z=0, \text{ то есть в критической точке.}$$

Из этих уравнений следует

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = c + Ey + Fx, \text{ то есть } E=0=F, c=0.$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_k = a = 0 = b = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_k ;$$

$$\Delta\varphi = 2A + 2B + 2C = 0, \text{ то есть } -C=A+B.$$

Рассмотрим симметричное обтекание тела вращения, когда течение обладает аксиальной симметрией вокруг оси Z . Тогда потенциал в точках, лежащих на окружности с центром на этой оси, должен быть одинаков. Так как

$$\varphi = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2 + Dxy,$$

то для того, чтобы линии одинакового потенциала представляли собой окружности, необходимо $A = B$, $D = 0$. Следовательно,

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Компоненты скорости равны

$$U_x = 2A_x, U_y = 2A_y, U_z = -4A_z.$$

Линии тока согласно (1.9) определяются уравнениями

$$\frac{dx}{U_x} = \frac{dz}{U_z}, \quad \frac{dy}{U_y} = \frac{dz}{U_z}.$$

С учетом выражений для компонент скорости имеем $x^2 z = c_1$, $y^2 z = c_2$, то есть линии тока – кубические гиперболы. При обтекании цилиндра с осью на оси y , характер линий тока не зависит от y , то есть $V=0$ и $\varphi = A(x^2 - z^2)$.

Поскольку $U_x = 2A_x$, $U_z = -2A_z$ линии тока определяются уравнением, решение которого имеет вид $xz = \text{const}$, что дает семейство гипербол. Аналогичные рассуждения справедливы и для задней критической точки (Рис. 1.7), если размер области обратных токов пренебрежимо мал с размерами тела. В средней части линии тока не являются гиперболами, так как полученные результаты справедливы для областей, лежащих вблизи критических точек.

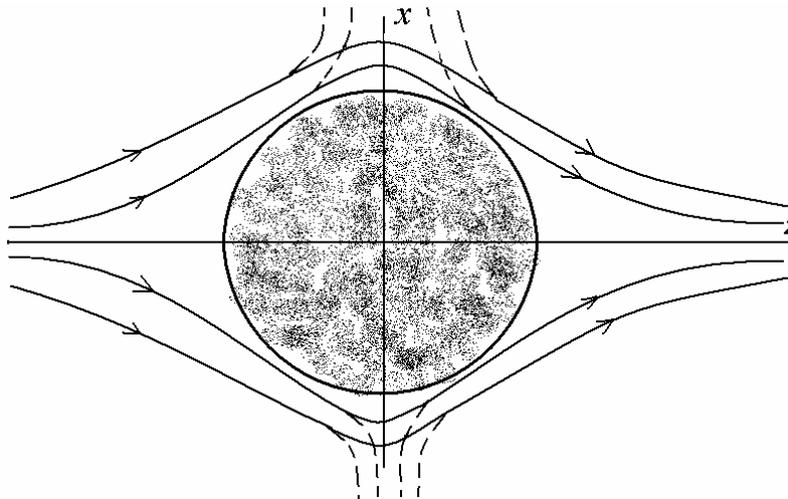


Рис. 1.7. Потенциальное течение при обтекании цилиндра

2. Рассмотрим задачу о движении твердого тела в покоящейся жидкости. Выберем начало координат внутри тела. Решение уравнения Лапласа для потенциала скорости, удовлетворяющее условию равенства нулю скорости потока на бесконечности ($r \rightarrow \infty$), представим в виде

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \vec{A} \nabla \left(\frac{1}{r} \right),$$

где a , \vec{A} не зависят от координат.

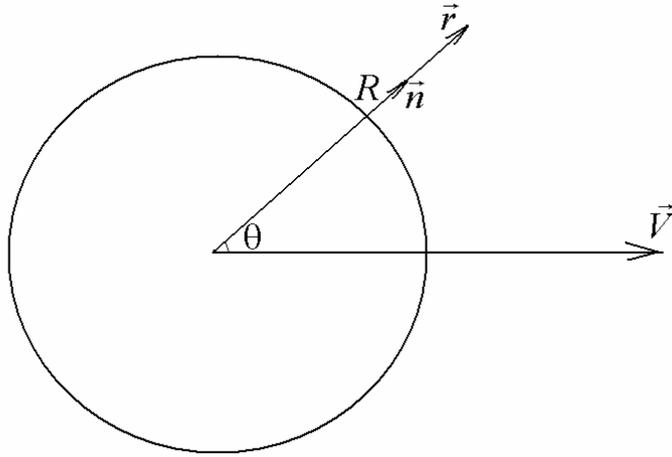


Рис. 1.8. Движение шара в покоящейся жидкости

Потенциал $\varphi' = -a/r$ соответствует скорости $\vec{U}' = \nabla(-a/r) = a\vec{r}/r^3$.

Поток жидкости через замкнутую сферическую поверхность радиусом R равен

$$G' = \oint \rho \vec{U}' d\vec{f}.$$

На этой поверхности $U' = a/R^2$, следовательно

$$G' = \rho(a/R^2)4\pi R^2 = 4\pi\rho a.$$

Но для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, поэтому

$$\oint \rho \vec{U}' d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = 0, \text{ то есть } a = 0.$$

Тогда

$$\varphi = \vec{A} \nabla(1/r) = -\frac{\vec{A}\vec{n}}{r^2} \quad (1.18)$$

Для скорости течения имеем

$$\vec{U} = \nabla\varphi = -\nabla\left(\frac{\vec{A}\vec{n}}{r^2}\right) = -\nabla\left(\frac{\vec{A}\vec{r}}{r^3}\right).$$

Это выражение может быть преобразовано в следующее

$$\vec{U} = \frac{3(\vec{A}\vec{n})\vec{n} - \vec{A}}{r^3}, \quad (1.19)$$

где \vec{n} – единичный вектор в направлении \vec{r} . Таким образом, скорость течения

быстро убывает при удалении от тела. Вектор \vec{A} зависит от формы и скорости движения тела. Этот вектор связан также с полной энергией и полным импульсом жидкости. Полная энергия несжимаемой жидкости (энергия, получаемая жидкостью из-за движущегося в ней тела), равна

$$E = \frac{\rho}{2} \int U^2 dV.$$

Это кинетическая энергия, а внутренняя энергия для несжимаемой изоэнтропической среды – постоянная величина, так как $dE_B = TdS - Pd(1/\rho) = 0$. В качестве объема интегрирования возьмем сферу радиусом R . Начало координат поместим в центре сферы. После интегрирования с учетом выражения (1.19) получим

$$E = \frac{\rho}{2} (4\pi\vec{A}\vec{v} - V_0 v^2), \quad V_0 - \text{объем тела.}$$

Энергия жидкости равна кинетической энергии тела, так как потери отсутствуют. Следовательно

$$E = m v^2 / 2 = m \vec{v} \vec{v} / 2 = \vec{P} \vec{v} / 2, \quad \vec{P} = \frac{2E}{\vec{v}} = 4\pi\rho\vec{A} - \rho V_0 \vec{v}.$$

Сила, действующая на тело со стороны жидкости $\vec{F} = -d\vec{P}/dt$.

Компонента F_v – сила сопротивления, компонента N , перпендикулярная F_v – подъемная сила. При равномерном движении тела $\vec{v} = \text{const}$, $\vec{P} = \text{const}$, $\vec{F} = 0$ – так называемый парадокс Даламбера – силы, действующие на тело, компенсируют друг друга.

В качестве примера рассмотрим движение шара радиуса R (Рис. 1.8).

На поверхности шара нормальные компоненты скоростей должны быть равны, то есть $\vec{U}\vec{n}|_{r=R} = \vec{v}\vec{n}$. С учетом (1.18), (1.19) получим формулы

$$(\vec{U}\vec{n})|_{r=R} = \frac{2\vec{A}\vec{n}}{R^3} = \vec{v}\vec{n}, \quad \vec{A} = \vec{v}R^3 / 2, \quad \varphi = -\frac{R^3}{2r^2} \vec{v}\vec{n}, \quad (1.20)$$

$$U = \frac{R^3}{2r^3} [3\vec{n}(\vec{v}\vec{n}) - v]. \quad (1.21)$$

Для потенциального течения несжимаемой жидкости из уравнения (1.17) следует

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} = f(t), \text{ то есть } P = \left(f(t) - \frac{U^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \rho. \quad (1.22)$$

На бесконечности жидкость покоится, то есть $\rho f(t) = P_0$. Так как центр шара перемещается, то φ зависит от положения шара, поэтому

$$d\varphi / dt = \partial \varphi / \partial t + (\partial \varphi / \partial x) dx / dt + \dots = \partial \varphi / \partial t + \vec{v} \nabla \varphi.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dt} - \vec{v} \nabla \varphi = \frac{d\varphi}{d\vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v} \nabla \varphi.$$

С учетом (1.20), (1.21)

$$\frac{d\varphi}{d\vec{v}} = -\frac{R^3}{2r^2} \vec{n},$$

$$\vec{v} \nabla \varphi = \vec{v} \vec{U} = \frac{R^3}{2r^3} [\vec{v} 3\vec{n}(\vec{v}\vec{n}) - v^2] = \frac{R^3}{2r^3} [3(\vec{v}\vec{n})^2 - v^2];$$

$$U^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^6 \left\{ 9(\vec{n})^2 (\vec{v}\vec{n})^2 - 6(\vec{v}\vec{n})^2 + v^2 \right\}.$$

Тогда распределение давления на поверхности шара согласно формуле (1.22) имеет вид

$$P|_{r=R} = P_0 + \frac{\rho v^2}{8} (9 \cos^2 \theta - 5) + \frac{\rho}{2} R \vec{n} \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Если шар перемещается с постоянной скоростью, последний член будет отсутствовать.

ЗАДАЧИ

1.1. Из открытой емкости через небольшое отверстие на дне вытекает вода. Уровень жидкости в емкости поддерживается постоянным $h = 5$ м. Определить скорость истечения воды, $\rho = 10^3$ кг/м³.

Решение. Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz = \text{const.}$$

Начало линии тока находится на поверхности жидкости ($z = h$), где давление равно атмосферному, а скорость жидкости равна нулю. На выходе из отверстия, где заканчивается линия тока, $z = 0$, давление – тоже атмосферное, а скорость жидкости равна U_1 . В этом случае из уравнения Бернулли следует

$$U_1 = \sqrt{2gh} \approx 10 \text{ м/с.}$$

Это известная формула Торичелли.

1.2. Решить задачу 1.1 в случае, когда дополнительное количество жидкости в емкость не поступает, начальный уровень жидкости h_0 , площадь ее свободной поверхности S_0 – постоянная, площадь отверстия мала ($S / S_0 \ll 1$).

Решение. В этом случае за бесконечно малый промежуток времени изменением скорости истечения жидкости можно пренебречь, считать процесс квазистационарным и использовать формулу Торичелли. Согласно закону сохранения массы

$$U_0(t)S_0 = U_1(t)S, \text{ где } U_0 = -dh/dt.$$

Следовательно, уровень жидкости описывается уравнением

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{S}{S_0} \sqrt{2gh(t)},$$

решение которого имеет вид

$$\sqrt{h} = -\sqrt{\frac{g}{2}} \frac{St}{S_0} + \text{const.}$$

Определяя постоянную интегрирования из начального условия $h = h_0$ при $t = 0$, получим

$$h = \left[\sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2} \frac{St}{S_0}} \right]^2,$$

что и определяет понижение уровня жидкости.

1.3. Найти скорость истечения воздуха из большой емкости в атмосферу, считая, что газ расширяется адиабатически. Давление воздуха в емкости P_1 , плотность ρ_1 ; в атмосфере: P_0, ρ_0 , показатель адиабаты γ , сила тяжести не учитывается.

Решение. Используем уравнение Бернулли в форме $H + U^2 / 2 = \text{const}$, из которого следует

$$U_l = \sqrt{2\Delta H},$$

где $\Delta H = H_0 - H_a$ – разница энтальпий газа в емкости и при выходе в атмосферу. С учетом зависимости энтальпии газа от давления имеем

$$\Delta H = \int_{P_a}^{P_0} \frac{dP}{\rho}.$$

Для адиабатических условий имеем $\rho = \text{const } P^{1/\gamma}$. Выполняя интегрирование, получим следующую формулу для скорости истечения газа

$$U_l = \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{(\gamma - 1)\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P_a}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}.$$

1.4. В горизонтальной трубе длиной l движется несжимаемая жидкость плотностью ρ . Найти скорость истечения, если жидкость непрерывно поступает в трубу, причем давление на входе изменяется по закону $P_0 = P_a + at$, а на выходе равно атмосферному P_a .

Решение. Жидкость несжимаема, поэтому $\partial U / \partial x = 0$, и уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Интегрирование по времени и по длине трубы дает следующий результат

$$\int_0^l U(t) dx = -\frac{1}{\rho} \int \left(\int_0^l \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dt + \text{const} = \frac{1}{\rho l} \int (P_0 - P_a) dt + \text{const}.$$

Постоянная интегрирования находится из условия, что в начальный момент времени $t = 0$ скорость жидкости равна нулю, так как перепад давления на концах трубы отсутствует. В этом случае $\text{const} = 0$, а скорость истечения жидкости находится по формуле

$$U_l(t) = \frac{\dot{a}t^2}{2\rho l}.$$

1.5. Несжимаемая жидкость плотностью ρ поступает в трубу сечением S_1 при постоянном давлении P_1 , затем переходит в трубу с сечением S_2 и вытекает в атмосферу при давлении P_a . Определить скорость истечения.

Решение. Течение жидкости – установившееся и можно использовать уравнение Бернулли

$$P_1 + \frac{\rho U_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho U_2^2}{2}.$$

Второе уравнение следует из закона сохранения массы

$$\oint \rho \vec{U} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV,$$

где V – объем переходного участка между трубами. Так как $\rho = \text{const}$, движение жидкости – одномерное, получаем равенство

$$U_1 S_1 = U_2 S_2.$$

С учетом этого выражения и уравнения Бернулли получим

$$U_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left[1 - (S_2/S_1)^2 \right]}}.$$

1.6. Описать течение жидкости, имеющей потенциал скорости $\varphi = A(x^2 - y^2)$, где $A > 0$.

Решение. Компоненты скорости определяются соотношениями

$$U_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2Ax, \quad U_y = 2Ay.$$

Введем функцию тока $\psi = 2Axy$. Тогда линии тока – семейство гипербол $xy = \text{const}/A$.

В случае $\psi = 0$ линиями тока являются оси координат. Следовательно, течение жидкости происходит внутри клина, образованного взаимно перпендикулярными плоскостями. Направление движения, конкретное расположение линий тока зависит от постоянной A , которая определяется условиями, при которых жидкость поступает в рассматриваемую область.

Задачи для самостоятельного решения.

1.7. Ионизированный газ движется в силовом поле, создающем ускорение (a) в плоскости (x, z) под углом 30° к оси (x) . Получить уравнение движения с учетом силового поля и силы тяжести в векторной форме и для проекций скорости.

Ответ.
$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{g} + \vec{a}.$$

Уравнения для проекций скорости получить самостоятельно.

1.8. Определить скорость истечения воды из скважины глубиной $h = 10$ м, если давление в подземном резервуаре в 5 раз больше атмосферного $P_a = 10^5$ Па.

Ответ. $U_1 \approx 20$ м/с.

1.9. На какую высоту поднимется вода в трубе, если давление подачи в 4 раза больше атмосферного $P_a = 10^5$ Па?

Ответ. $h \approx 30$ м.

1.10. Из закрытой емкости, внутри которой поддерживается постоянное давление $P = 1.003 P_a$, через небольшое отверстие выходит газ. Определить скорость истечения газа в атмосферу $P_a = 10^5$ Па, $\rho = 1.5$ кг/м³.

Ответ. $U_l \approx 20$ м/с.

1.11. В цилиндрической емкости объемом V_0 под поршнем площадью S_0 находится воздух. В некоторый момент времени поршень начинает медленно двигаться с постоянной скоростью U_0 , выталкивая воздух через отверстие площадью S . Найти скорость истечения воздуха, считая его несжимаемым.

Ответ. $U_l = U_0 S_0 / S$.

Глава 2. Звуковые волны в газах

Существование упругих волн вытекает из законов Ньютона. Удар по торцу тонкого длинного стержня сжимает слой, прилегающий к торцу, и сообщает ему скорость. Упругие силы ускоряют следующий слой и деформируют его. Возникшие силы упругости за счет деформации второго слоя останавливают первый слой, а второй слой приобретает скорость. Первый слой возвращается в исходное недеформированное состояние, а второй начал двигаться и сжался. Далее от слоя к слою процесс повторяется, то есть по стержню распространяется упругая волна, переносящая исходное возмущение по стержню. Аналогичный процесс происходит в жидкостях и газах.

2.1. Линеаризация уравнений гидродинамики

Установлено, что при изучении звуковых волн в первом приближении вязкостью, теплопроводностью среды, а также изменением ее энтропии можно пренебречь. Применим уравнения (1.1), (1.3), которые для одномерного движения имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

Кроме того, используем уравнение состояния идеального газа

$$P = \rho R' T, \quad R' = R / \mu.$$

Скорость звука – скорость распространения слабых волн – определяется по формуле

$$c = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S^{1/2}.$$

Для изоэнтропического газа $P = \text{const} \rho^\gamma$. Тогда

$$c = \sqrt{\gamma P / \rho} = \sqrt{\gamma R T / \mu}.$$

Представим газодинамические параметры в виде суммы средних значений и пульсаций, вызванных распространением упругой волны

$$P = P_0(x) + p'(x,t), \quad U = U_0(x) + u'(x,t), \quad \rho = \rho_0(x) + \rho'(x,t).$$

Рассматриваются малые пульсации параметров газа, то есть

$$\frac{p'}{P_0} \sim \varepsilon, \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \sim \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon \ll 1.$$

Так как звуковые волны наблюдаются и в покоящихся средах, то для пульсаций скорости потока условие малости имеет вид $(u' / c_0) \sim \varepsilon$, где $c_0 = (\gamma P_0 / \rho_0)^{1/2}$.

Положим также, что число Маха – малая величина, то есть $M_0 = U_0 / c_0 \sim \varepsilon$.

Если возмущения отсутствуют, то из уравнений (2.1), (2.2) следует

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x} = 0; \quad U_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

С учетом акустических возмущений получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \underline{U_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial x}} + U_0 \frac{\partial p'}{\partial x} + u' \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + u' \frac{\partial p'}{\partial x} + \underline{\rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho' \frac{\partial U_0}{\partial x} + \\ + \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U_0}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.5)$$

В первом уравнении сумма подчеркнутых членов равна нулю. Из соотношений (2.3) следует

$$-\frac{\partial \rho_0}{\partial x} \cdot \frac{U_0^2}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial P_0}{\partial x} = 0.$$

С учетом того, что $\gamma(\partial P_0 / \partial x) = c_0^2(\partial \rho_0 / \partial x)$, получим

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma} c_0^2 - U_0^2 \right) = 0.$$

При условии $U_0^2 < c_0^2 / \gamma$ или $M_0^2 < 1 / \gamma$, получим

$$(\partial \rho_0 / \partial x) = 0, \quad (\partial U_0 / \partial x) = 0, \quad (\partial P_0 / \partial x) = 0.$$

Тогда уравнения (2.4), (2.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для оценки вклада каждого члена этих уравнений вводятся безразмерные параметры первого порядка малости

$$\bar{U} = u' / c_0, \bar{P} = p' / P_0, \bar{\rho} = \rho' / \rho_0 \sim \varepsilon.$$

Для оценки степени изменения газодинамических параметров во времени и пространстве необходимо ввести характерный промежуток времени – масштаб времени и масштаб длины. Так как возмущения обязаны акустической волне, то в качестве масштаба длины естественно взять длину волны λ , а масштаба времени – λ / c_0 . С учетом этого вводятся безразмерные координата и время

$$\bar{x} = x / \lambda, \bar{t} = c_0 t / \lambda.$$

В безразмерном виде первое из уравнений (2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + M_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}} &= 0. \\ (1) \quad (2) \quad (1) \quad (2) \quad (2) \end{aligned}$$

В уравнение входят члены первого и второго порядка малости, которые указаны снизу. Отбрасывая члены порядка ε^2 , или как говорят, проводя линеаризацию уравнения, получим, перейдя к размерной форме

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \quad (2.7)$$

Во втором из уравнений (2.6) последний член можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{1}{1 + \bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} (1 + \bar{\rho})^{-1} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} (1 - \bar{\rho} + \dots) \frac{\partial \rho'}{\partial x}.$$

Осуществляя линеаризацию, получим

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

Для изоэнтропического газа

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \text{ или } \frac{P_0 + p'}{P_0} = \left(\frac{\rho_0 + \rho'}{\rho_0} \right)^\gamma = (1 + \bar{\rho})^\gamma.$$

Тогда

$$1 + \bar{P} = 1 + \gamma \bar{\rho} + \dots$$

В линейном приближении $\bar{P} = \gamma \bar{\rho}$, то есть $p' = c_0^2 \rho'$. Выражая ρ' через p' , подставляя в уравнение (2.7), получим

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

2.2 Волновые уравнения, бегущие и стоячие волны

Продифференцировав уравнение (2.8) по времени, уравнение (2.9) по координате, вычитая одно из другого, получим волновое уравнение для пульсаций скорости газа

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0.$$

Если продифференцировать уравнение (2.8) по координате, уравнение (2.9) по времени и вычесть одно из другого, получим волновое уравнение для пульсаций давления

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0.$$

По аналогии с потенциальным течением жидкости в теории звука вводится потенциал скорости – звуковой потенциал, который связан с пульсациями скорости соотношением

$$u' = -\nabla \varphi'.$$

Для одномерного потока

$$u'(x, t) = -\partial \varphi' / \partial x. \quad (2.10)$$

Подставляя это выражение в (2.9), получим связь звукового потенциала с пульсациями давления

$$p' = \rho_0 (\partial \varphi' / \partial t). \quad (2.11)$$

Если в волновом уравнении для u' учесть формулу (2.10), или в уравнение для p' подставить выражение (2.11), получим волновое уравнение для звукового потенциала

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = 0. \quad (2.12)$$

Вводя новые переменные $v = c_0 t + x$, $w = c_0 t - x$, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial v \partial w} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi' = f_1(c_0 t - x) + f_2(c_0 t + x), \text{ где } f_1 \text{ и } f_2 \text{ – произвольные функции.}$$

С учетом соотношений (2.10), (2.11) получим

$$p' = \rho_0 c_0 (f_1' + f_2'), \quad u' = f_1' - f_2'.$$

Пусть в момент времени $t = 0$, в точке с координатой $x = 0$ создано сжатие среды до давления $2p^*$, частицы среды при этом неподвижны. Тогда

$$p'(0,0) = 2p^*, \quad u'(0,0) = 0.$$

Следовательно $f_1' + f_2' = p^* / \rho_0 c_0$. Обозначим $\rho_0 c_0 f' = F$, то есть

$$p'(x,t) = F_1(c_0 t - x) + F_2(c_0 t + x).$$

Если потери энергии отсутствуют, то с течением времени потенциальная энергия сжатия среды, а следовательно и давление должны оставаться постоянными. Условие $p'(x,t) = 2p^* = \text{const}$ возможно, если $c_0 t - x = \text{const}$, $c_0 t + x = \text{const}$. Это значит, что одна часть импульса сжатия будет распространяться в положительном направлении x со скоростью c_0 , другая часть импульса в отрицательном направлении с той же скоростью, так как $dx/dt = \pm c_0$. Такие возмущения в среде называют бегущими плоскими волнами. Для гармонических волн потенциал имеет следующий вид

$$\varphi' = C_{\varphi}^{(+)} e^{i(\omega t - kx)} + C_{\varphi}^{(-)} e^{i(\omega t + kx)}, \quad (2.13)$$

так как $c_0 t \pm x = \frac{c_0}{\omega} (\omega t \pm kx) = \text{const}(\omega t \pm kx)$, а вид функций f_1 и f_2 – произвольный. Величина $k = \omega / c_0$ – волновое число.

Воспользовавшись формулами (2.10), (2.11), (2.13) получим следующие выражения для пульсаций скорости и давления

$$u'(x, t) = (Ae^{-ikx} + Be^{ikx})e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

$$p'(x, t) = c_0\rho_0(Ae^{-ikx} - Be^{ikx})e^{i\omega t}, \quad (2.15)$$

где $A = -iC_{\varphi}^{(+)}\omega/c_0$, $B = +iC_{\varphi}^{(-)}\omega/c_0$.

Свойства бегущих волн – следующие:

1. Пропорциональность давления и скорости, так как $p' = c_0\rho_0u'$ для прямой волны и $p' = -c_0\rho_0u'$ для обратной волны.
2. Колебания давления происходят в фазе со скоростью.
3. При распространении бегущих волн их амплитуды не зависят от координаты x , если нет диссипации энергии.

Вернемся к выражениям (2.14), (2.15) и запишем их в следующей форме

$$\begin{aligned} u'(x, t) &= B[e^{i(\omega t - kx)} + e^{i(\omega t + kx)}] + (A - B)e^{i(\omega t - kx)} = \\ &= 2Be^{i\omega t} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + (A - B)e^{i(\omega t - kx)} = 2Be^{i\omega t} \cdot \cos kx + (A - B)e^{i(\omega t - kx)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'(x, t) &= c_0\rho_0B[e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)}] + c_0\rho_0(A - B)e^{i(\omega t - kx)} = \\ &= -c_0\rho_02Bie^{i\omega t} \cdot \sin kx + c_0\rho_0(A - B)e^{i(\omega t - kx)}. \end{aligned}$$

Переходя в этих выражениях к действительной форме, получим

$$\text{Re}u'(x, t) = 2B\cos kx \cos \omega t + (A - B)\cos(\omega t - kx),$$

$$\text{Re}p'(x, t) = c_0\rho_02B\sin kx \sin \omega t + c_0\rho_0(A - B)\cos(\omega t - kx).$$

Следовательно, при наложении прямой и обратной бегущих волн, в общем случае, наблюдаются бегущие волны с амплитудой $(A-B)$ и волны с амплитудой, зависящей от координаты x – стоячие волны.

Отметим следующие свойства стоячих волн:

1. В фиксированной точке, колебания давления и скорости сдвинуты по времени на четверть периода.
2. В фиксированный момент времени давление и скорость неравномерно распределены по координате, причем амплитуда скорости изменяется по закону \cos , а давление по закону \sin . Точки, в которых давление или скорость равны нулю, называются «узлами», а где максимальны – «пучностями», причем в

узлах скорости расположены пучности давления, а в пучностях скорости – узлы давления.

3. Колебания давления во всех точках происходят с одинаковой фазой. Для колебаний скорости аналогично.

2.3. Продольные колебания газа в канале

Для того, чтобы ответить на вопрос, как изменяются скорость и давление газа при распространении звуковых волн необходимо для каждого конкретного случая учитывать условия течения на концах канала. В этом случае методика исследования следующая:

1. Записывают граничные условия для каждого конкретного случая.
2. Удовлетворяя этим условиям, пользуясь решениями (2.14), (2.15) получают уравнение собственных частот.
3. Определяют частоты и находят распределение амплитуды колебаний скорости и давления – «эпюры» стоячих волн.

В качестве первого примера рассмотрим колебания газа в трубе, открытой на входе и закрытой на выходе. На открытом конце газ сообщается с атмосферой, сглаживающей пульсации течения. Если принять, что расширение газа происходит мгновенно, то это означает равенство нулю звукового давления. Уточнение граничного условия на открытом конце трубы будет дано ниже. На закрытом конце движение газа невозможно, скорость равна нулю.

Итак, граничные условия имеют вид:

$$p'(0,t) \approx 0, u'(l,t) = 0.$$

Зная выражение для давления (2.15), удовлетворяя первому из граничных условий, получим $A = B$. Удовлетворяя граничному условию для скорости, с учетом формулы (2.14) имеем

$$A(e^{-ikl} + e^{ikl}) = 0.$$

Отбрасывая тривиальный случай $A = 0$, получим следующее характеристическое уравнение: $\cos kl = 0$.

Следовательно, формула частот колебаний имеет вид

$$f_n = \frac{(2n-1)c_0}{4l}, n=1,2,3\dots$$

Значения трех низших частот равны

$$f_1 = c_0 / 4l, \quad f_2 = 3c_0 / 4l, \quad f_3 = 5c_0 / 4l.$$

Колебания с кратными частотами в теории звука называют «гармониками». В данном случае имеем бесконечный ряд нечетных гармоник.

Определим эпюры стоячих волн, то есть зависимости абсолютных значений звукового давления и скорости от координаты.

Выражения (2.14), (2.15) с учетом полученных значений собственных частот принимают вид

$$u'_n(x, t) = 2Ae^{i\omega_n t} \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{l}\right], \quad p'_n(x, t) = -2iAe^{i\omega_n t} \sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{l}\right] c_0 \rho_0.$$

Для абсолютных значений имеем

$$|u'_n(x, t)| = |2A| \left| \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{l} \right|, \quad |p'_n(x, t)| = |2c_0 \rho_0 A| \left| \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{l} \right|.$$

Вводя безразмерные амплитуды пульсаций скорости и давления, получим следующие эпюры стоячих волн (Рис. 2.1.).

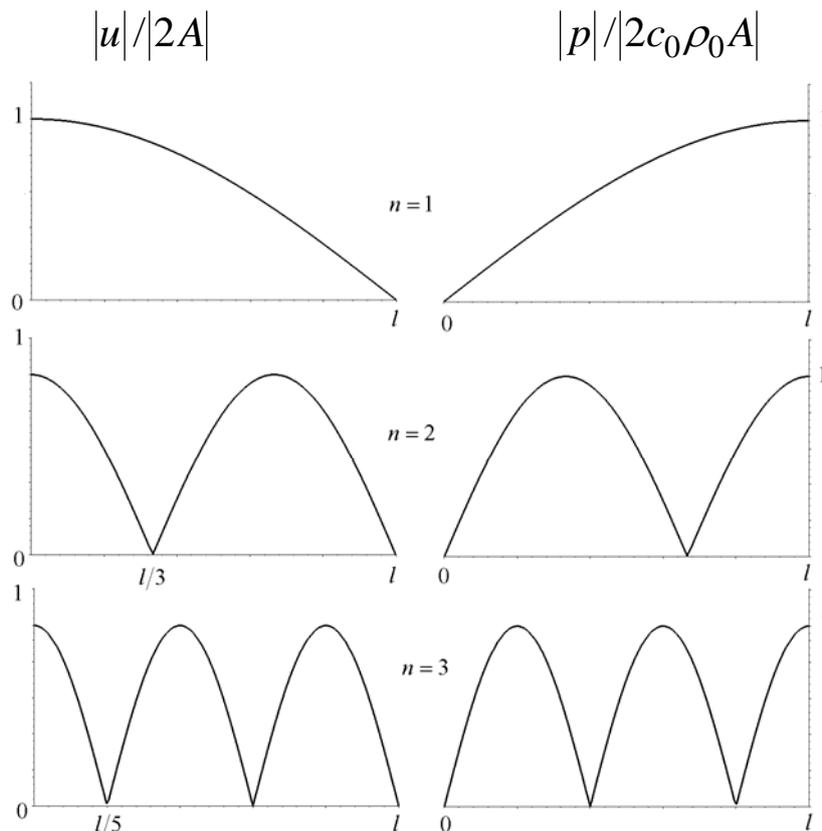


Рис .2.1. Эпюры стоячих волн в трубе с открытым входом и закрытым выходом

Во времени процесс колебаний газа в изучаемой трубе для первой гармоники протекает следующим образом. Пусть в начальный момент времени

$t = 0$ давление в трубе максимально. Следовательно, пульсации скорости равны нулю во всех точках трубы согласно свойствам стоячих волн.

Затем, благодаря перепаду давления, газ начинает вытекать из трубы, давление понижается, скорость отлична от нуля и отрицательна. Через четверть периода давление становится равным атмосферному (колебательная составляющая равна нулю).

В этот момент скорость истечения газа максимальна. Далее, по инерции газ продолжает вытекать, давление уменьшается, газ разрежается, скорость уменьшается и в момент максимального разрежения в трубе ($t = T/2$) газ останавливается. Затем начинается обратный процесс, газ из атмосферы поступает в трубу, скорость меняет знак и растет, давление увеличивается до атмосферного и в момент равенства давлений ($t = 3T/4$) скорость максимальна. Затем по инерции газ втекает в трубу, давление возрастает больше атмосферного, газ тормозится. Наконец, в трубе наступает максимальное сжатие, газ полностью заторможен ($t = T$), после чего весь процесс повторяется в описанной последовательности.

Следующим примером является труба, открытая на входе, на конце которой расположена емкость объемом V (Рис. 2.2.). Граничное условие в начале трубы – $p'(0,t) = 0$.

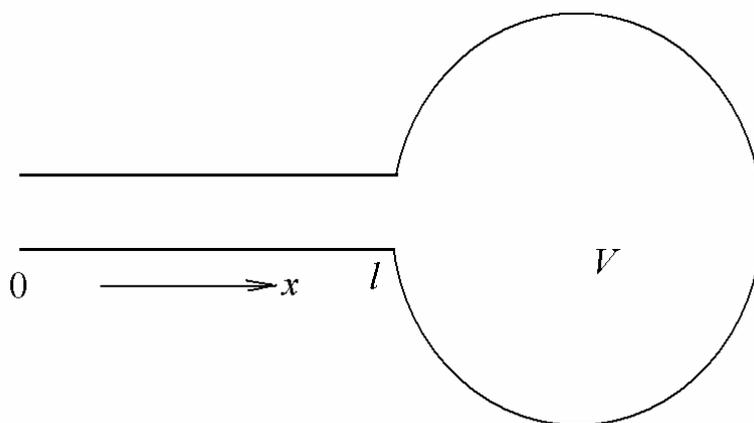


Рис. 2.2. Труба, открытая на входе, с акустической емкостью на выходе

На конце необходимо учитывать непрерывность давления $p'(l,t) = p'_v$ и уравнение сохранения массы, которое после линеаризации имеет вид

$$\rho_0 S u'(l, t) = \frac{d\Delta m}{dt}.$$

Изменение массы газа емкости, очевидно, происходит за счет поступления газа из трубы и приводит к изменению плотности, так как объем газа постоянен. Тогда

$$\Delta m = \Delta \rho V.$$

Считая процесс сжатия газа адиабатическим, связь между изменением давления и плотности в объеме V запишем в линейном приближении так

$$p'_V = c_0^2 \Delta \rho.$$

Воспользовавшись условием непрерывности давления, получим

$$\Delta \rho = \frac{1}{c_0^2} p'(l, t).$$

Подставляя это выражение в уравнение сохранения массы, получим следующее граничное условие

$$u'(l, t) = \frac{V}{\rho_0 S c_0^2} \cdot \frac{\partial p'}{\partial t}(l, t), \quad (2.16)$$

выражающее связь пульсаций скорости и давления на конце трубы. Из граничного условия на входе в трубу следует $A = B$. С учетом выражений (2.14), (2.15), из граничного условия (2.16) на выходе трубы получим трансцендентное уравнение для определения частот колебаний газа

$$\operatorname{tg} kl = \frac{c_0 S}{\omega V}.$$

Подобные уравнения в общем случае не решаются аналитически. Пусть $kl \ll 1$, или $l \ll \lambda$, то есть длина трубы намного меньше длины звуковой волны. Получим частный случай – резонатор Гельмгольца. Для принятого упрощения, можно положить $\operatorname{tg} kl \cong kl$ и уравнение превращается в известную формулу для расчета частоты собственных колебаний газа в резонаторе Гельмгольца

$$f = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

2.4. Понятие импеданса

С целью получения более общих результатов, используем широко применяющееся в акустике понятие «импеданса». Под механическим импедансом в теории звука принято называть отношение акустической силы, действующей в некотором фиксированном сечении x , к акустической скорости газа в этом сечении

$$Z_x = \frac{f_a(x,t)}{u'(x,t)}.$$

Если на систему не действуют внешние силы, то

$$Sp'(x,t) = Z_x u'(x,t).$$

Физический смысл правой части – сила акустического сопротивления, импеданс – своего рода коэффициент сопротивления, а равенство выражает баланс сил, действующих на колеблющийся газ в сечении x .

Импеданс не зависит от времени, давления и скорости, он определяется условиями течения газа в рассматриваемом сечении трубы.

В общем случае импеданс – это комплексная величина.

$$Z_x = X_x + iY_x. \quad (2.17)$$

Исследования показали, что действительная часть импеданса влияет на амплитуду, а мнимая часть – на фазу звуковой волны.

Значения импедансов простейших случаев:

1. Идеально открытый конец $Z_x = 0$, так как $p' = 0$.
2. Закрытый конец $Z_x = \infty$, так как $u' = 0$.
3. Труба, в которой на концах происходит полное поглощение звука.

В этом случае отражения звука не происходит, волны распространяются или вправо, или влево, причем существуют только бегущие волны. Тогда с учетом свойств бегущих волн имеем $Z_x = c_0 \rho_0 S$ или $Z_x = -c_0 \rho_0 S$ (прямая или обратная бегущая волна). Такой импеданс называется характеристическим импедансом трубы, в котором $c_0 \rho_0$ – удельное волновое сопротивление.

4. Импеданс емкости.

Для вычисления импеданса воспользуемся граничным условием (2.16) на конце трубы, переходящей в емкость объемом V .

Учитывая, что $\partial p' / \partial t = i\omega p'$, получим

$$Z_V = -i \frac{\rho_0 S^2 c_0^2}{\omega V}.$$

Значит, импеданс емкости является мнимым и не изменяет амплитуду звуковой волны.

2.5. Колебания газа в трубе с произвольными импедансами на концах

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях газа в трубе, в начале которой действует вынуждающая сила $f_0 e^{i\omega t}$, создаваемая, например, колеблющимся поршнем или источником звука (Рис. 2.3).

Граничные условия на концах трубы определяются импедансами Z_0, Z_l .

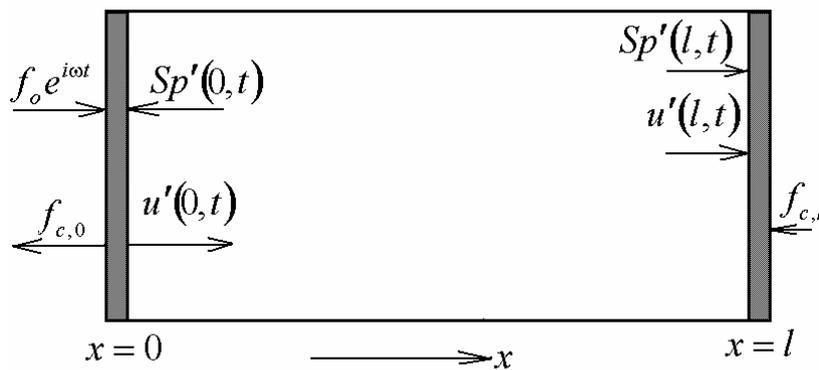


Рис. 2.3. Труба, замкнутая на импедансы Z_0 и Z_l

Баланс сил, действующих на газ в начале и на конце трубы, имеет следующий вид

$$Sp'(0,t) + Z_0 u'(0,t) = f_0 e^{i\omega t},$$

$$Sp'(l,t) = Z_l u'(l,t).$$

Плоские волны, создаваемые в начале трубы, распространяются по ней и в общем случае частично отражаются от импеданса Z_l . Отраженная волна «побежит» обратно и отразится от импеданса Z_0 . В результате в трубе образуется бесконечное число положительных (прямых) и отрицательных (обратных) волн. Пульсации скорости и давления газа описываются выражениями типа (2.14), (2.15).

$$u'(x,t) = (Ae^{-\beta x} + Be^{\beta x})e^{i\omega t},$$

$$p'(x,t) = c_0\rho_0(Ae^{-\beta x} - Be^{\beta x})e^{i\omega t},$$

где $\beta = \beta_\Gamma + i\frac{\omega}{c_0}$ – комплексное волновое число, действительная часть

которого учитывает затухание волн в процессе распространения по трубе.

С учетом этих соотношений, из граничных условий на концах трубы получим

$$(Z_0 + c_0\rho_0S)A + (Z_0 - c_0\rho_0S)B = f_0$$

$$(Z_l - c_0\rho_0S)Ae^{-\beta l} + (Z_l + c_0\rho_0S)Be^{\beta l} = 0.$$

Решим систему этих уравнений по правилу Крамера. Главный определитель равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_0 + c_0\rho_0S & Z_0 - c_0\rho_0S \\ (Z_l - c_0\rho_0S)e^{-\beta l} & (Z_l + c_0\rho_0S)e^{\beta l} \end{vmatrix} =$$

$$= 2(Z_0Z_l + c_0^2\rho_0^2S^2)\text{sh } \beta l + 2c_0\rho_0S(Z_0 + Z_l)\text{ch } \beta l. \quad (2.18)$$

Значения амплитуд определяются соотношениями

$$A = \frac{Z_l + c_0\rho_0S}{\Delta} f_0 e^{\beta l}, \quad B = \frac{c_0\rho_0S - Z_l}{\Delta} f_0 e^{-\beta l}.$$

Подставляя найденные значения A и B в выражения для пульсации скорости и давления, получим следующие выражения

$$u'(x,t) = \frac{f_0 e^{i\omega t}}{\Delta} \left[(Z_l + c_0\rho_0S)e^{\beta(l-x)} - (Z_l - c_0\rho_0S)e^{-\beta(l-x)} \right],$$

$$p'(x,t) = \frac{c_0\rho_0 f_0 e^{i\omega t}}{\Delta} \left[(Z_l + c_0\rho_0S)e^{\beta(l-x)} + (Z_l - c_0\rho_0S)e^{-\beta(l-x)} \right].$$

В этих выражениях первый член описывает прямую, а второй – обратную бегущую волну, причем фаза как прямой, так и обратной волны зависит от $(l - x)$, то есть от расстояния до конца трубы.

Что касается характера волнового процесса в трубе, то это зависит от граничных условий, то есть от импедансов Z_0 и Z_l .

Введем несколько определений.

Коэффициент отражения – отношение амплитуд отраженной и падающей волны. Различают коэффициент отражения волны по скорости (r_v) и давлению (r_p). Воспользовавшись полученными формулами для u' и p' , получим

$$r_p = \frac{|p|_-}{|p|_+} = \frac{Z_l - c_0 \rho_0 S}{Z_l + c_0 \rho_0 S} = \frac{\bar{Z}_l - 1}{\bar{Z}_l + 1},$$

$$r_v = -r_p = -\frac{Z_l - c_0 \rho_0 S}{Z_l + c_0 \rho_0 S},$$

где $\bar{Z}_l = Z_l / c_0 \rho_0 S$ – называется безразмерным импедансом.

Представим коэффициент отражения в виде

$$r_p = r e^{i2\delta},$$

где r – модуль, а 2δ – фаза коэффициента отражения.

Далее вернемся к выражению для пульсаций давления и преобразуем его, вводя коэффициент отражения. Положим $\beta = ik$, то есть пренебрежем затуханием волн внутри трубы. В квадратных скобках добавим и вычтем re^{-ikx} и после ряда несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} p'(x,t) &= c_0 \rho_0 A \left[e^{-ikx} - re^{-ikx} + re^{-ikx} + re^{i(kx-kl+\delta)} e^{i(\delta-kl)} \right] e^{i\omega t} = \\ &= c_0 \rho_0 A (1-r) e^{i(\omega t-kx)} + 2rA e^{i(\omega t+\delta-kl)} \cos[k(x-l)+\delta] c_0 \rho_0. \end{aligned}$$

Итак, в общем случае волновой процесс представляет собой сумму бегущей волны с амплитудой $c_0 A(1-r)\rho_0$ и стоячей волны с амплитудой $c_0 2Ar\rho_0$. Соотношение между этими двумя волнами зависит, очевидно, от модуля коэффициента отражения. Если, например, $Z_l = c_0 \rho_0 S$, тогда $r_p = 0$, то есть отражение отсутствует, и волна беспрепятственно проходит импеданс, а в трубе есть только прямая бегущая волна.

Если труба закрыта на выходе, $Z_l = \infty$, $r_p = 1$, $r = 1$, $2\delta = 0$, то есть происходит полное отражение звуковой волны без изменения фазы. На идеально открытом конце $Z_l = 0$, $r_p = -1$, $r = 1$, $2\delta = \pi$, то есть волна тоже отражается полностью, но ее фаза изменяется на π . В обоих случаях волновой процесс представляет собой стоячую волну.

Как известно, при совпадении собственной частоты колебаний с частотой вынуждающей силы наступает резонанс, а поскольку потери не учитываются, амплитуда колебаний должна расти до бесконечности. Это возможно, как видно из формул для А и В, если $\Delta = 0$. Следовательно это равенство – уравнение собственных частот, которое согласно формуле (2.18) имеет вид

$$\operatorname{th} \beta l = -\frac{c_0 \rho_0 S (Z_0 + Z_l)}{Z_0 Z_l + c_0^2 \rho_0^2 S^2}.$$

Если пренебречь действительными частями импедансов, которые на частоту колебаний не влияют, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\omega l}{c_0} = \frac{\bar{Y}_0 + \bar{Y}_l}{\bar{Y}_0 \bar{Y}_l - 1}. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) позволяет определить собственные частоты колебаний газа в трубе, с любыми импедансами на концах. Например, для трубы, открытой на входе и закрытой на выходе имеем $\bar{Y}_0 = 0$, $\bar{Y}_l = \infty$, а из уравнения (2.19) следует $\cos(kl) = 0$, то есть уравнение, полученное в разделе 2.3. Если труба в начале открыта, а на конце присоединена емкость, $\bar{Y}_0 = 0$, $\bar{Y}_l = \bar{Z}_V$ и находится с учетом формулы, приведенной в конце раздела 2.4. В этом случае уравнение (2.19) совпадает с полученным ранее уравнением (Раздел 2.3).

2.6. Звуковые волны в движущейся среде

Если скорость движения среды достаточно велика, линеаризованные уравнения движения и непрерывности для одномерного случая имеют вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + U_0 \frac{\partial p'}{\partial x} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$$

Введем новые переменные v и w по формулам

$$v = c_0 \rho_0 u' + p', \quad w = c_0 \rho_0 u' - p'.$$

Тогда пульсации скорости и давления равны

$$u' = \frac{v + w}{2c_0 \rho_0}, \quad p' = \frac{v - w}{2}.$$

Заменяя u' и p' в исходных уравнениях, получим два уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (U_0 + c_0) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (U_0 - c_0) \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

которые можно интегрировать по отдельности.

Сделаем замену координат

$$\zeta = (U_0 + c_0)t - x, \quad \eta = (U_0 + c_0)t + x \text{ для } v(x, t) \text{ и}$$

$$\kappa = (c_0 - U_0)t - x, \quad \sigma = (c_0 - U_0)t + x \text{ для } w(x, t).$$

В результате получим

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \kappa} = 0,$$

что возможно лишь в том случае, если

$$v = f_1(\zeta), \quad w = f_2(\sigma).$$

Для частного решения воспользуемся показательными функциями, как это было сделано в разделе 2.2, то есть

$$v(x, t) = C_v \exp\{\beta_1[(U_0 + c_0)t - x]\},$$

$$w(x, t) = C_w \exp\{\beta_2[(c_0 - U_0)t + x]\}.$$

Физический смысл этих решений уже известен – это бегущие плоские волны, причем прямая волна $v(x, t)$ распространяется по газу со скоростью $c_0 + U_0$ обратная волна $w(x, t)$ – со скоростью $c_0 - U_0$, β_1 и β_2 – волновые числа.

Переходя к старым переменным, получим

$$u'(x, t) = \frac{1}{2\rho_0 c_0} [C_v \exp\{\beta_1[(c_0 + U_0)t - x]\} + C_w \exp\{\beta_2[(c_0 - U_0)t + x]\}],$$

$$p'(x, t) = \frac{1}{2} [C_v \exp\{\beta_1[(c_0 + U_0)t - x]\} - C_w \exp\{\beta_2[(c_0 - U_0)t + x]\}].$$

Частота колебаний одинаковая во всех точках системы. Поэтому

$$\beta_1 U_1 = \beta_2 U_2 = \tilde{\omega}, \text{ где } U_1 = c_0 + U_0, U_2 = c_0 - U_0.$$

С учетом этого замечания

$$u'(x,t) = \left[A \exp\left(-\frac{\tilde{\omega}}{c_0 + U_0} x\right) + B \exp\left(\frac{\tilde{\omega}}{c_0 - U_0} x\right) \right] \exp(\tilde{\omega}t),$$

$$p'(x,t) = \rho_0 c_0 \left[A \exp\left(-\frac{\tilde{\omega}}{c_0 + U_0} x\right) - B \exp\left(-\frac{\tilde{\omega}}{c_0 - U_0} x\right) \right] \exp(\tilde{\omega}t),$$

где $A = C_v / (2\rho_0 c_0)$, $B = C_w / (2\rho_0 c_0)$.

В выражениях $u'(x,t)$ и $p'(x,t)$ первые слагаемые соответствуют прямой бегущей волне, распространяющейся со скоростью $c_0 + U_0$, вторые слагаемые обязаны обратной бегущей волне, распространяющейся против потока со скоростью $c_0 - U_0$.

Ограничимся рассмотрением случая без затухания, то есть $\tilde{\omega} = i\omega$. В качестве примера рассмотрим трубу, открытую на концах, то есть

$$p'(0,t) = p'(l,t) = 0.$$

Из условия в начале трубы получим $A = B$. Из второго условия следует

$$A \left[\exp\left(-i \frac{\omega}{c_0 + U_0} l\right) - \exp\left(i \frac{\omega}{c_0 - U_0} l\right) \right] \exp(i\omega t) = 0.$$

Для нетривиального случая ($A \neq 0$), получим

$$1 - \exp\left(i \frac{2c_0\omega}{c_0^2 - U_0^2} l\right) = 0.$$

Очевидно, что этому уравнению удовлетворяют следующие частоты

$$\omega = \omega_0 (1 - M^2),$$

где $\omega_0 = nc_0\pi/l$ – частота колебаний без учета средней скорости, $M = U_0/c_0$ – число Маха.

Значит, чем больше средняя скорость течения, тем меньше частота собственных колебаний.

2.7. Энергия звуковой волны

В разделе 1.5 было показано, что энергия единицы объема жидкости равна $\rho\varepsilon + \rho U^2/2$. Положим $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$. Так как звуковая

волна распространяется в адиабатических условиях, тогда $d\varepsilon = Tds - Pd(1/\rho) = (P/\rho^2)d\rho$. Следовательно, $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$. Полагая $\rho' = \rho - \rho_0$, получим

$$\rho\varepsilon = (\rho\varepsilon)_0 + \left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right)_0(\rho - \rho_0) + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2} \left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right)_0 + \dots$$

Пусть среда покоится, $U_0 = 0$.

$$\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right)_s = \varepsilon + \rho \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s = \varepsilon + P/\rho = H,$$

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial H}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_s \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s = \frac{c_0^2}{\rho}.$$

Тогда энергия равна

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho'H_0 + \frac{c_0^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \rho_0\frac{u'^2}{2} + \dots \quad \text{Первый член - энергия}$$

неподвижной жидкости, второй член связан с изменением массы жидкости, поэтому при отсутствии источников массы $\int\rho'dV = 0$. Тогда полное изменение энергии, вызванное распространением звуковой волны, равно

$$\int \left(\frac{\rho_0 u'^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0} \right) dV = \int E dV,$$

где $E = \frac{\rho_0 u'^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0}$ - плотность звуковой энергии.

Для бегущей волны $\rho' = p'/c_0^2 = \rho_0 c_0 u'/c_0^2 = \rho_0 u'/c_0$, тогда

$$E = \rho_0 u'^2.$$

Выделим в жидкости произвольный объем. Плотность потока энергии через замкнутую поверхность, ограничивающую выделенный объем, равна

$$\rho\vec{U}(H + U^2/2).$$

Полагая $H = H_0 + H'$, получим $\rho\vec{U}H = \rho_0\vec{U}H_0 + \rho_0\vec{U}H' + \rho'\vec{U}H_0 + \dots$,

где $\vec{U} = \vec{u}'$ в неподвижной жидкости. Так как $H' = (\partial H/\partial P)_s p' = p'/\rho$, а

первый и третий члены связаны с изменением массы (источниками массы), поток акустической энергии равен

$$A = \oint p' \vec{u}' d\vec{f}.$$

Для плоской звуковой волны $\vec{u}' d\vec{f} = u' df$, $p' = \rho_0 c u'$, тогда $A = c_0 E$.

2.8. Поглощение звука

Наличие вязкости и теплопроводности приводит к диссипации энергии звуковых волн. Волна, распространяясь в среде, ослабевает, причем амплитуда колебаний убывает по закону $\exp(-\gamma x)$, где γ – коэффициент поглощения, который вычисляется по формуле

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right].$$

Волновое число с учетом затухания равно

$$\beta = \gamma + i\omega/c_0 = \gamma + ik.$$

Это «пространственное» затухание, которое заметно, если волна распространяется на расстояние порядка нескольких длин волн.

Если газ расположен в трубе, длина которой меньше длины волны, пространственное затухание несущественно. Однако, в этом случае диссипация энергии происходит за счет вязкости пристеночной части потока. Это значит, что $\tilde{\omega} = -\alpha + i\omega$. Так как звуковые волны описываются функциями, пропорциональными $\exp(\tilde{\omega}t \pm \beta x)$, амплитуда колебаний в каждом сечении трубы убывает по закону $\exp(-\alpha t)$. Чтобы получить такое решение, необходимо учесть трение газа о стенки, то есть ввести в уравнение движения дополнительный член. Газ в бесконечно тонком слое можно считать несжимаемым, движущимся как твердое тело. Из механики известно, что в первом приближении сила трения пропорциональна скорости движения тела. Вводя коэффициент трения r средний за период колебаний и средний по длине трубы, уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + ru' + (1/\rho_0) \frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \quad (2.20)$$

второй член вводится из формальных соображений и имеет смысл средней за период и по длине трубы силы трения, действующей на единицу массы колеблющейся жидкости.

Коэффициент трения при условии $R\sqrt{\omega/\nu} > 10$, что соответствует диапазону звуковых частот, равен

$$r = \sqrt{2\omega\nu}/R.$$

Второе уравнение – это линеаризованное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \quad (2.21)$$

Продифференцировав уравнение (2.20) по t , а уравнение (2.21) по x и вычтя одно из другого, получим

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + r \frac{\partial u'}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0.$$

Решение уравнения будем искать в виде $u' = \nu(x)\exp\tilde{\omega}t$. После подстановки получим

$$\frac{d^2 \nu}{dx^2} - [(\tilde{\omega} + r)\tilde{\omega}/c_0^2] \nu = 0.$$

Решение этого уравнения ищется в виде $\nu(x) = C \exp(\beta x)$, где

$$\beta_{1,2} = \pm\beta = \pm\sqrt{(\tilde{\omega} + r)\tilde{\omega}/c_0^2} = \pm(\tilde{\omega}/c_0)\sqrt{1 + r/\tilde{\omega}} \approx \pm(\tilde{\omega}/c_0)(1 + r/2\tilde{\omega}).$$

Учитывалось, что $r/\tilde{\omega} \ll 1$. Тогда

$$u'(x, t) = [C_1 \exp(-\beta x) + C_2 \exp(\beta x)] \exp(\tilde{\omega}t).$$

Из уравнения (2.21) следует

$$\begin{aligned} p'(x, t) &= -\rho_0 c_0^2 \int \frac{\partial u'}{\partial x} dt + \text{const} = \\ &= \rho_0 c_0 \sqrt{1 + r/\tilde{\omega}} [C_1 \exp(-\beta x) - C_2 \exp(\beta x)] \exp(\tilde{\omega}t). \end{aligned}$$

Положим $\text{const} = 0$, потому что, если волны отсутствуют, $p' = 0$. Так как C_1 и C_2 имеют первый порядок малости, а $r/\tilde{\omega} \ll 1$, то в линейном приближении получим

$$p'(x, t) = \rho_0 c_0 [C_1 \exp(-\beta x) - C_2 \exp(\beta x)] \exp(\tilde{\omega}t),$$

$$\text{где } \beta = \frac{\tilde{\omega}}{c_0} \left(1 + \frac{r}{2\tilde{\omega}} \right). \quad (2.22)$$

Выражения для пульсаций скорости и давления можно представить в виде

$$\begin{aligned} u'(x,t) &= A \cdot \text{ch}(\beta x + \varphi) \exp \tilde{\omega} t, \\ p'(x,t) &= -\rho_0 c_0 A \cdot \text{sh}(\beta x + \varphi) \exp \tilde{\omega} t. \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $2C_1 = A \exp(-\varphi)$, $2C_2 = A \exp \varphi$.

2.9. Колебания газа в трубе с учетом потерь акустической энергии

В этом случае необходимо учитывать два источника потерь акустической энергии – вязкость газа и излучение энергии на выходе из трубы.

В качестве примера рассмотрим колебания в трубе, открытой на обоих концах. Реально на открытом конце $p' \neq 0$. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, инерционность частиц газа, выходящих или входящих в трубу приводит к увеличению колеблющейся массы газа. В то же время поток из трубы взаимодействует с окружающим воздухом, передавая ему часть энергии, наблюдается излучение акустической энергии в окружающее пространство.

Исследования показали, что для колебаний с небольшой амплитудой импеданс открытого конца трубы равен

$$Z = \frac{\rho_0 \omega^2 S^2}{4\pi c_0} + i\omega M^*,$$

где S – площадь сечения трубы, первый член связан с излучением акустической энергии, второй – с увеличением колеблющейся массы газа на величину $M^* = 2\rho_0 R^3$. В безразмерном виде

$$\bar{Z} = \frac{Z}{\rho_0 c_0 S} = \left(\frac{\omega R}{2c_0} \right)^2 + i \frac{2\omega R}{\pi c_0} = \mu + i\eta. \quad (2.24)$$

Тогда для рассматриваемого случая граничные условия имеют вид

$$Sp'(0,t) = -Zu'(0,t); Sp'(l,t) = Zu'(l,t).$$

Из первого граничного условия с учетом выражений (2.23) следует $\text{th } \varphi = \bar{Z}$. Для сравнительно узких труб ($R \ll \lambda$) и средних звуковых частот $|\bar{Z}| \ll 1$. Тогда $\varphi \approx \bar{Z} \pm i\pi n$.

Второе граничное условие дает

$$\text{th}(\beta l + \bar{Z}) = -\bar{Z} \text{ или } \beta l = -2\bar{Z} \pm i\pi n.$$

С учетом выражений (2.22), (2.24) для β и \bar{Z} , полагая $\tilde{\omega} = \alpha + i\omega$, имеем

$$\alpha = -\frac{2\mu c_0}{l} - \frac{r}{2}, \quad \frac{\omega l}{c_0} = \pi n - 2\eta.$$

Подставляя выражение для η во второе соотношение, получим

$$\omega = \frac{\pi n c_0}{l + \frac{4}{\pi} R}.$$

Если сравнить это выражение с аналогичной формулой, полученной для идеального случая: $p'(0, t) = p'(l, t) = 0$ (см. Задачу 2.1), то видно, что происходит уменьшение частоты колебаний, причем уменьшение эквивалентно удлинению трубы на $1.28R$. То есть если вместо реальной длины трубы взять эффективную $l^* = l + 1.28R$, то для расчета частот можно пользоваться формулой, полученной для идеального случая

$$f_n = \frac{c_0 n}{2l^*}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Определяя частоту колебаний, можно вычислить декремент затухания колебаний α .

Например, для трубы длиной 1 м, радиусом 3 см $l^* = l + 0.64R$ и

$$f_n = \frac{c_0(2n-1)}{4l^*}.$$

Исследования последних лет показали, что более точной является поправка $0.613R$.

2.10. Распространение звука в канале переменного сечения

Пусть сечение канала изменяется вдоль его длины по форме и по площади, но достаточно медленно на расстоянии порядка ширины канала, пусть ширина канала мала по сравнению с длиной волны. При этих условиях параметры течения одинаковы вдоль каждого сечения канала, а волна распространяется по оси трубы. В единицу времени через сечение канала проходит масса жидкости $S\rho U$. В объеме между двумя близкими сечениями поток массы изменяется на величину

$$(\rho US)_{x+dx} - (\rho US)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\rho US)dx.$$

При постоянном объеме изменение массы может произойти только за счет переменной плотности. В объеме Sdx уменьшение массы равно $S(\partial\rho/\partial t)dx$. Тогда

$$S \frac{\partial\rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho US)}{\partial x}.$$

Это уравнение непрерывности. Линеаризованное уравнение движения – это уравнение (2.8), так как форма выделенного объема не имеет значения.

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}.$$

Дифференцируем уравнение непрерывности по времени

$$S \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(S \left((U_0 + u') \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial t} \right) \right).$$

При $M_0 = U_0/c_0 \ll 1$, члены, содержащие $(U_0 + u')$ и ρ' являются величинами второго порядка малости. Тогда

$$S \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 S \frac{\partial u'}{\partial t} \right).$$

Применяя уравнение движения, учитывая, что $\rho' = p'/c_0^2$, получим

$$\frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0.$$

Пусть в канале возбуждаются звуковые колебания с частотой ω . Решение уравнения ищем в виде

$$p'(x, t) = F(x) \exp(i\omega t).$$

Тогда для функции F получим уравнение

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{dF}{dx} + k^2 F = 0, \quad k = \omega / c_0. \quad (2.25)$$

Чтобы определить вид функции F , рассмотрим поток акустической энергии, который пропорционален квадрату амплитуды звуковой волны и площади поперечного сечения канала. В коротком канале затухание волны можно не учитывать, тогда $E_a \sim A^2 S = \text{const}$, то есть $A \sim 1/\sqrt{S}$. Пусть канал имеет форму конуса. Тогда $A(x) \sim \frac{1}{R(x)}$ и решение уравнения (2.25) будем

искать в виде

$$\frac{C}{R(x)} \exp(\alpha x) = F(x).$$

Для конического канала

$$S(x) = \pi R^2(x), \quad dS / dx = 2\pi R dR / dx, \quad R(x) = x \cdot \text{tg } \theta, \quad dR / dx = \text{tg } \theta,$$

$$\frac{dF}{dx} = \left(-\frac{1}{R^2} \frac{dR}{dx} + \frac{\alpha}{R} \right) C \exp(\alpha x) = \left(\frac{\alpha}{x \cdot \text{tg } \theta} - \frac{1}{x^2 \text{tg } \theta} \right) C \exp(\alpha x),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx^2} &= \left[\frac{2}{R^3} \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 R}{dx^2} \right) - \frac{\alpha}{R^2} \frac{dR}{dx} + \alpha \left(\frac{\alpha}{R} - \frac{1}{R^2} \frac{dR}{dx} \right) \right] C \exp(\alpha x) = \\ &= \left(\frac{2}{x^3 \text{tg } \theta} - \frac{2\alpha}{x^2 \text{tg } \theta} + \frac{\alpha^2}{x \text{tg } \theta} \right) C \exp(\alpha x). \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{2}{x}$, из (2.25) следует

$$\frac{2}{x^3 \text{tg } \theta} - \frac{2\alpha}{x^2 \text{tg } \theta} + \frac{\alpha^2}{x \text{tg } \theta} + \frac{2\alpha}{x^2 \text{tg } \theta} - \frac{2}{x^3 \text{tg } \theta} + \frac{k^2}{x \text{tg } \theta} = 0,$$

$$\alpha^2 + k^2 = 0, \quad \alpha = \pm ik.$$

Если источник звука расположен в сечении x_0 , которое является начальным, получаем устройство, называемое коническим рупором. В этом случае удобно заменить x на $x' = x - x_0$, где x' отсчитывается от x_0 . Так как

для данного рупора $\exp(\pm ikx_0) = \text{const}$, заменяя x на x' , опуская штрих, получим

$$p'(x, t) = \frac{\rho_0 c_0 \exp(i\omega t)}{x + x_0} [A \exp(-ikx) - B \exp(ikx)],$$

где x отсчитывается от входного сечения – горла рупора, x_0 – расстояние до вершины конуса.

Для пульсаций скорости газа имеем

$$u'(x, t) = \frac{\exp(i\omega t)}{x + x_0} \left\{ \left[1 + \frac{1/(ik)}{x + x_0} \right] A \exp(-ikx) + \left[1 - \frac{1/(ik)}{x + x_0} \right] B \exp(ikx) \right\}.$$

Это выражение получается после интегрирования по времени уравнения движения.

ЗАДАЧИ

2.1. Описать колебания газа, возникающие при распространении звуковых волн в трубе с идеально открытыми концами.

Решение. Граничные условия в рассматриваемом случае означают равенство нулю звукового давления на концах трубы, то есть $p'(0, t) = 0 = p'(l, t)$. Из этих условий с учетом выражения для звукового давления следует $\sin(kl) = 0$. Следовательно, в трубе возможны колебания газа с нечетными и четными гармониками с частотами

$$f_n = \frac{c_0 n}{2l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Эпюры стоячих волн определяются выражениями, полученными ранее для трубы, закрытой на входе и открытой на выходе (см. раздел 2.3), в которые необходимо подставить волновое число $k_n = \pi n / l$.

2.2. Получить соотношения, связывающие акустические пульсации скорости и давления на стыке двух труб с поперечными сечениями S_1, S_2 .

Решение. Согласно закону сохранения массы

$$\rho_1 U_1 S_1 = \rho_2 U_2 S_2 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{1,2}} \rho dV.$$

Интеграл в правой части берется по объему переходного участка на стыке труб. Поперечное сечение этого участка порядка S_1 (пусть $S_1 > S_2$), длина $l_{1,2}$ намного меньше длины звуковой волны для средних звуковых частот, изменения плотности газа порядка ρ'_1 . Поделим обе части уравнения на $\rho_{1,0} c_0 S_1$. То есть $\partial \rho'_1 / \partial t = i \omega \rho'_1$, $\omega / c_0 = 2\pi / \lambda$, интеграл в правой части уравнения – величина порядка $\bar{\rho}_1 l_{1,2} / \lambda$, то есть величина второго порядка малости, которой можно пренебречь. Оставшаяся часть уравнения имеет вид

$$\bar{u}_1 + M_1 \bar{\rho}_1 = \rho_{2,0} S_2 (\bar{u}_2 + M_2 \bar{\rho}_2) / (\rho_{1,0} S_1).$$

Вторые слагаемые в круглых скобках – тоже величины второго порядка малости. Следовательно, в первом приближении имеем

$$\rho_{1,0} S_1 u'_1 = \rho_{2,0} S_2 u'_2.$$

Для установившегося течения в отсутствие звуковых волн из закона сохранения импульса имеем

$$P_{1,0} + \rho_{1,0} U_{1,0}^2 = P_{2,0} + \rho_{2,0} U_{2,0}^2.$$

Так как $c_0^2 = \gamma P_0 / \rho_0$, получим

$$P_{1,0} (1 + \gamma M_1^2) = P_{2,0} (1 + \gamma M_2^2),$$

Поэтому можно положить $P_{1,0} = P_{2,0} = P_0$. Температура газа в трубах одинакова, поэтому $c_1 = c_2 = c_0$, $\rho_{1,0} = \rho_{2,0} = \rho_0$. При наличии звуковых волн закон сохранения импульса имеет вид

$$\oint (P + \rho U^2) df = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{1,2}} \rho U dV.$$

Можно показать, что интеграл в правой части – величина второго порядка малости. Тогда $P + \rho U^2 = \text{const}$, то есть $P_1 + \rho_1 U_1^2 = P_2 + \rho_2 U_2^2$.

Вводя безразмерные параметры, линеаризуя это равенство так же, как в разделе 2, получим

$$p'_1 = p'_2.$$

Второе условие на стыке труб с учетом равенства средней плотности газа в трубах принимает вид

$$S_1 u'_1 = S_2 u'_2.$$

2.3. Найти уравнение частот колебаний газа в системе, состоящей из двух труб, имеющих поперечные сечения S_1, S_2 , с произвольными импедансами Z_0, Z_l на концах.

Решение. Воспользуемся соотношениями (2.14), (2.15). На частоту колебаний влияет мнимая часть импеданса, поэтому граничное условие на входе в систему имеет вид $S_1 p'_1(0, t) = -iY_0 u'_1(0, t)$. Следовательно

$$\varphi_1 = \text{arctg } \bar{Y}_0, \quad \bar{Y}_0 = \frac{Y_0}{\rho_0 c_0 S_1}.$$

На выходе из системы имеем $S_2 p'_2(l_2, t) = iY_l u'_2(l_2, t)$, тогда $-\varphi_2 = \text{arctg } \bar{Y}_l + kl_2$.

Граничные условия на стыке труб (см. Задачу 2.2) имеют вид

$$p'_1(l_1, t) = p'_2(0, t), \quad S_1 u'_1(l_1, t) = S_2 u'_2(0, t).$$

Из этих соотношений получается уравнение

$$\text{tg}(kl_1 + \varphi_1) = -(S_1/S_2) \text{tg } \varphi_2,$$

которое с учетом найденных выражений для φ_1 и φ_2 позволяет находить частоты колебаний газа в рассматриваемой системе.

2.4. Вывести уравнение собственных колебаний газа в резонаторе Гельмгольца, определить частоту колебаний.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из емкости объемом V и узкой, короткой трубы – резонатор Гельмгольца. Колебательное движение совершает газ в трубе – «горле» резонатора. Так как длина горла намного меньше длины звуковой волны, газ колеблется как твердое тело. Благодаря упругости, происходит сжатие и разрежение газа в емкости, чем обеспечивается восстанавливающая сила, без которой невозможен колебательный процесс. Пусть x – смещение газа в горле, и начало отсчета находится во входном сечении. Заменим реальную длину горла на эффективную, тогда при $x = l^*$

пульсации давления равны нулю. Смещение газа в горле приводит к изменению плотности и давления газа в емкости, то есть

$$p'_V = c_0^2 \Delta \rho = -\frac{\rho_0 S x c_0^2}{V}.$$

Равнодействующая сила, вызывающая колебания газа, складывается из силы давления Sp'_V и силы трения газа о стенки горла, которую, как было показано в разделе 2.8, можно записать в виде $-r_f \dot{x}$. Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\ddot{x} = Sp'_V - r_f \dot{x}.$$

Поделив это выражение на массу газа в горле ($m = \rho_0 l S$), получим уравнение колебаний газа в резонаторе Гельмгольца

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $r = r_f / m$ – удельный коэффициент трения, $\omega_0 = c_0 \sqrt{S / l^* V}$ – есть собственная частота колебаний газа.

2.5. Найти коэффициент отражения звуковой волны и количество излучаемой акустической энергии на открытом конце трубы радиусом 0.05 м, если частота колебаний газа 150 Гц, амплитуда пульсаций скорости на конце трубы $u_0 = 1$ м/с, плотность газа $\rho_0 = 1.23$ кг/м³, скорость звука $\tilde{n}_0 = 343$ м/с.

Решение. Коэффициент отражения связан с импедансом соотношением, полученным в разделе 2.5.

$$r_p = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1}.$$

После подстановки безразмерного импеданса открытого конца (см. раздел 2.9), разделения действительной и мнимой части, с учетом членов первого порядка малости получим

$$r_p = re^{i2\delta} = \frac{-1 + i2\eta}{1 + 2\xi}, \quad \xi = 0.005, \quad \eta = 0.087.$$

Следовательно, модуль и фаза коэффициента отражения равны

$$r = \frac{1}{1 + 2\xi} = 0.99,$$

$$2\delta = \pi - \arctg(2\eta) = 2.97.$$

Поток акустической энергии, излучаемой из трубы, согласно формуле, приведенной в конце раздела (2.7) равен

$$A = S \langle \text{Re}(p'_l) \text{Re}(u'_l) \rangle_t.$$

Пульсации скорости газа на конце трубы представим в виде $\text{Re}(u'_l) = u_0 \cos \omega t$. Пульсации давления находятся из выражения $S \text{Re}(p'_l) = \text{Re}(Z_l) \text{Re}(u'_l)$. С учетом выражения для действительной части импеданса открытого конца, после усреднения за период колебаний находим количество излучаемой за единицу времени акустической энергии

$$A = \frac{\pi \rho_0 (\omega u_0 R^2)^2}{8c_0} = 7.8 \cdot 10^{-3} \text{ Вт.}$$

Задачи для самостоятельного решения

2.6. Определить коэффициент отражения звуковой волны на закрытом и идеально открытом конце трубы.

Ответ: закрытый конец: $r = 1$, $2\delta = 0$; открытый конец: $r = 1$, $2\delta = \pi$.

2.7. Найти импеданс и коэффициент отражения звуковой волны на конце трубы, переходящей в емкость объемом V .

$$\text{Ответ: } \bar{Z}_l = -i\bar{Y}_l = -i \frac{c_0 S}{\omega V}, \quad r = 1, \quad 2\delta = \pi - \arctg\left(\frac{2\bar{Y}_l}{\bar{Y}_l^2 - 1}\right).$$

2.8. Какова частота и декремент затухания первой гармоники колебаний газа в трубе, открытой на концах длиной 1 м, радиусом 0.03 м, если температура газа 293 К, молярная масса $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, коэффициент кинематической вязкости $1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, показатель адиабаты 1.4.

Ответ: $f_1 = 165$ Гц, $\mu = -4.31$ с⁻¹.

2.9. В трубе сечением $3 \cdot 10^{-3}$ м² распространяется прямая бегущая волна. Вычислить поток акустической энергии в сечении, где пульсации

скорости газа $u' = u_0 \cos \omega t$, $u_0 = 0.5$ м/с, плотность газа 1.23 кг/м³, скорость звука 343 м/с.

Ответ: $A = \rho_0 c_0 S u_0^2 / 2 = 0.316$ Вт.

2.10. Решить задачу 2.3, используя обобщенное уравнение (2.19), в случае, когда первая труба закрыта на входе, а вторая труба открыта на выходе.

Указание: ввести эффективную длину второй трубы.

Ответ: $\operatorname{ctg}(kl_1) = \frac{S_1}{S_2} \operatorname{tg}(kl_2^*)$.

Глава 3. Вязкая жидкость

3.1. Уравнение движения вязкой жидкости

При выводе уравнения непрерывности, ограничений на состояние среды не делалось, поэтому оно описывает любую жидкость, в том числе вязкую. Уравнение же Эйлера должно быть изменено. Это уравнение можно записать в тензорном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho U_i = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

где $\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho U_i U_k$ – тензор плотности потока импульса для идеальной жидкости, который описывает обратимый перенос импульса из-за механического перемещения участков жидкости из одного места в другое и за счет сил давления. Наличие вязкости (внутреннего трения) приводит к дополнительному необратимому переносу импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью. Поэтому к потоку импульса идеальной жидкости необходимо прибавить σ'_{ik} – так называемый вязкий тензор напряжений. Тогда

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho U_i U_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho U_i U_k,$$

где $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ называется тензором напряжений.

Анализ показывает, что σ'_{ik} должен удовлетворять требованиям:

1. Известно, что внутреннее трение сказывается, если имеет место движение участков жидкости относительно друг друга, то есть их скорости различны. Тогда σ'_{ik} зависит от производных скорости по координатам. Обычно градиенты скорости невелики, поэтому σ'_{ik} будет определяться первыми производными скорости, а саму зависимость можно считать линейной.

2. Тензор σ'_{ik} должен обращаться в нуль, если жидкость совершает равномерное вращение как единое целое. В этом случае $\vec{U} = [\vec{\Omega}\vec{r}]$, где $\vec{\Omega}$ – угловая скорость. Линейными комбинациями производных, которые обращаются в нуль при $\vec{U} = [\vec{\Omega}\vec{r}]$, являются суммы $\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$.

3. Кроме того, σ'_{ik} должен равняться нулю при $\vec{U} = \text{const}$.

Всем этим условиям удовлетворяет тензор второго ранга следующего вида

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial U_l}{\partial x_l},$$

где коэффициенты η и ξ не зависят от скорости, являются положительными величинами и называются коэффициентами вязкости, η – коэффициент сдвиговой, ξ – объемной (второй) вязкости. В выражении третий член в скобках и последний отражают сжимаемость среды. Если слой сжимается, то его скорость уменьшается, что понижает силу трения. В то же время увеличивается давление внутри слоя и сила, с которой этот слой «прижимается» к соседнему, что увеличивает силу трения.

Добавляя в правую часть уравнения Эйлера выражение $\partial \sigma'_{ik} / \partial x_k$, получим уравнение движения вязкой жидкости

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi \frac{\partial U_l}{\partial x_l} \right). \quad (3.1)$$

Коэффициенты вязкости в общем случае зависят от давления и температуры. В ряде случаев эту зависимость можно не учитывать, тогда получается так называемое уравнение Навье–Стокса, которое обычно записывают в векторной форме

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} \right] = -\nabla P + \eta \Delta \vec{U} + (\xi + \eta/3) \nabla (\nabla \vec{U}).$$

Если жидкость несжимаема, то $\nabla \vec{U} = 0$, и уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{U}, \quad (3.2)$$

где $\nu = \eta / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости, η – коэффициент динамической или сдвиговой вязкости.

Тензор напряжений для несжимаемой жидкости равен

$$\sigma_{ik} = -P \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) = -P \delta_{ik} + \sigma'_{ik}. \quad (3.3)$$

Если к уравнению (3.2) применить операцию div , получается уравнение для определения давления по известному распределению скоростей в несжимаемой жидкости

$$\Delta P = -\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_i}.$$

При решении уравнения движения жидкости необходимо учитывать тот факт, что между поверхностью твердого тела, например, стенками трубы, и вязкой жидкостью всегда существуют силы межмолекулярного сцепления, так что пристеночный слой жидкости тормозится, как бы прилипая к поверхности. Это приводит к граничному условию на неподвижной твердой поверхности $\vec{U} = 0$, то есть отсутствуют и нормальная, и касательная компоненты скорости. Для идеальной жидкости равна нулю только нормальная компонента.

Сила, действующая на некоторый элемент поверхности со стороны жидкости – это поток импульса через элемент $d\vec{f}$, то есть

$$\Pi_{ik} df_k = (\rho U_i U_k - \sigma_{ik}) df_k = (P \delta_{ik} + \rho U_i U_k - \sigma'_{ik}) df_k.$$

Тогда напряжение – это сила, действующая на единицу поверхности жидкости.

Положив $df_k = n_k df$, \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности, учтя что на поверхности $\vec{U} = 0$, получим

$$F_i = -\sigma_{ik} n_k = P n_i - \sigma'_{ik} n_k, \quad (3.4)$$

где \vec{F} – сила, действующая на единицу площади поверхности.

Первый член – обычное давление в жидкости, второй – сила трения, обусловленная вязкостью.

В случае границы раздела двух несмешивающихся жидкостей или жидкости и газа условие на поверхности раздела состоит в равенстве скоростей обеих сред на границе раздела. Силы, с которыми они действуют друг на друга, равны по модулю и противоположно направлены, то есть

$$(n_k \sigma_{ik})_1 + (n_k \sigma_{ik})_2 = 0.$$

Векторы \vec{n}_1 и \vec{n}_2 имеют противоположные направления, то есть $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2 = \vec{n}$, тогда $n_k \sigma_{ik}^{(1)} = n_k \sigma_{ik}^{(2)}$.

3.2. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости

Полная кинетическая энергия несжимаемой жидкости равна

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int U^2 dV.$$

Определим изменение энергии с течением времени – \dot{E}_k , полагая

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{U^2}{2} \right) = \rho U_i \frac{\partial U_i}{\partial t}.$$

Из уравнений Навье–Стокса (3.1) следует

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{U^2}{2} \right) &= -\rho \vec{U} (\vec{U} \nabla) \vec{U} - \vec{U} \nabla P + U_i \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \\ &= -\rho (\vec{U} \nabla) \left(\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) + \text{div}(\vec{U} \sigma') - \sigma'_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

где $\vec{U} \sigma'$ – вектор с компонентами $U_i \sigma'_{ik}$.

Для несжимаемой жидкости $\text{div} \vec{U} = 0$, то есть первый член справа можно записать в виде div , тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{U^2}{2} \right) = -\text{div} \left[\rho \vec{U} \left(\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) - (\vec{U} \sigma') \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}.$$

Под знаком div плотность потока энергии, где первый член связан с переносом массы и совпадает с выражением для идеальной жидкости. Второй член $(\vec{U} \sigma')$ – поток энергии, связанный с внутренним трением, так как σ'_{ik} – поток импульса, который после умножения на скорость дает поток энергии.

После интегрирования по всему объему жидкости получим

$$\dot{E}_k = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \frac{U^2}{2} dV = -\oint \left[\rho \vec{U} \left(\frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) - (\vec{U} \sigma') \right] d\vec{f} - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} dV.$$

В этом выражении первый член справа определяет изменение кинетической энергии жидкости, связанное с потоком энергии через поверхность рассматриваемого объема. Второй член соответствует уменьшению кинетической энергии в единицу времени за счет внутреннего трения

$$(\dot{E}_k)_d = -\int \sigma'_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} dV = -\frac{1}{2} \int \sigma'_{ik} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) dV,$$

где σ'_{ik} – симметричный тензор. С учетом его выражения для несжимаемой жидкости (3.3) получим формулу

$$(\dot{E}_k)_d = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2 dV,$$

которая и определяет диссипацию энергии за счет вязкости.

3.3. Установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости

Исходными являются уравнения Навье–Стокса, которые являются следствием уравнения (3.2)

$$\begin{aligned} U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U_x, \\ U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta U_y, \\ U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta U_z, \end{aligned} \quad (3.5)$$

а также уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0.$$

3.3.1. Движение между параллельными плоскостями

Рассмотрим первый случай, когда нижняя плоскость неподвижна, а верхняя движется с постоянной скоростью \vec{U}_0 . В отсутствие градиента давления течение жидкости возникает благодаря тому, что частицы,

находящиеся на верхней плоскости, перемещаются вместе с ней и за счет внутреннего трения передают движение нижним слоям. Так как силы, действующие в поперечном направлении отсутствуют, $U_y = 0$, а из уравнения непрерывности следует $\partial U_x / \partial x = \partial U / \partial x = 0$. Тогда из первого уравнения

системы (3.5) при условии $P = \text{const}$ имеем $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $U = ay + b$.

Так как $U = 0$ при $y = 0$, $U = U_0$ при $y = h$, получим

$$U = U_0 y / h,$$

то есть распределение скорости – линейное. (Рис. 3.1). Сила трения между плоскостями и жидкостью в расчете на единицу площади согласно формулам (3.3), (3.4) равна

$$|\sigma'_{xy}| = \eta \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial U_x}{\partial y} = \eta \frac{\partial U}{\partial y} = \eta U_0 / h.$$

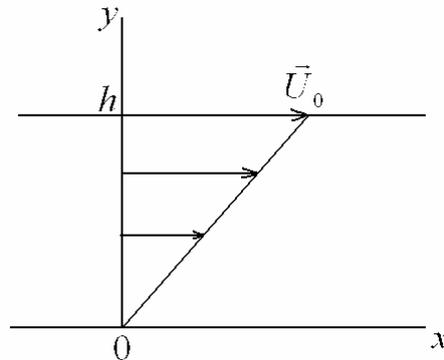


Рис. 3.1. Течение Куэтта

Второй случай – движение жидкости между параллельными неподвижными плоскостями при наличии градиента давления по оси x , то есть

$$P = P(x), \quad \partial P / \partial y = 0.$$

Так как поперечные градиенты давления отсутствуют, можно предположить, что течение – плоскопараллельное – ламинарное, то есть $U_y = 0$, а линии тока и траектории частиц – прямые линии. Тогда из уравнения непрерывности $\partial U / \partial x = 0$, $U = U(y)$, а из системы (3.5) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial P}{\partial x},$$

в котором слева – функция от y , а справа – от x , что возможно лишь при условии $dP/dx = \text{const}$, то есть давление изменяется вдоль течения по линейному закону.

Тогда

$$U = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dx} y^2 + ay + b.$$

Из граничных условий: $U = 0$ при $y = 0$ и h определяются a и b .

В итоге

$$U = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dx} y(y-h), \quad b = 0, \quad a = -\frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dP}{dx} h.$$

То есть скорость распределяется поперек слоя по параболическому закону (Рис. 3.2), имея максимальное значение в середине слоя при $y = h/2$

$$U_m = -\frac{h^2}{8\eta} \cdot \frac{dP}{dx}; \quad \left(\frac{dP}{dx} < 0 \right).$$

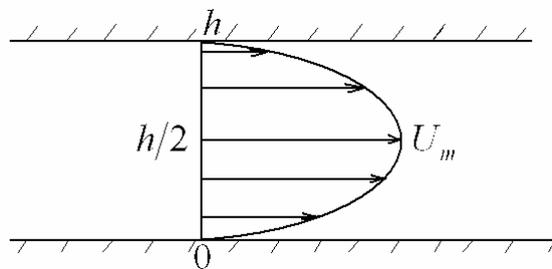


Рис. 3.2. Движение жидкости между параллельными неподвижными пластинами

Сила трения, действующая на стенку, равна

$$|\sigma'_{xy}| = \eta \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{h}{2} \cdot \frac{dP}{dx}.$$

3.3.2. Ламинарное движение жидкости в трубе

Также как в предыдущем случае $\partial U / \partial x = 0$, то есть $U = U(y, z)$. Из уравнений Навье–Стокса следует $\partial P / \partial y = \partial P / \partial z = 0$, а для x – компоненты скорости получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dP}{dx}.$$

В рассматриваемом случае $dP / dx = \text{const} = -\Delta P / l = -[P(0) - P(l)] / l$, l – длина трубы. Распределение скорости находится из уравнения $\Delta U = \text{const}$ с граничным условием $U = 0$ на стенках трубы.

Пусть труба имеет круглое сечение. Переходя к полярным координатам с началом, лежащим на оси трубы, получим

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{\eta l}.$$

После интегрирования

$$U = -\frac{\Delta P}{4\eta l} r^2 + a \ln r + b.$$

На оси трубы ($r = 0$) скорость – конечная величина, тогда $a = 0$. Значит $b = \frac{\Delta P}{4\eta l} R^2$, так как $U(R) = 0$, R – радиус трубы. Получается параболический профиль скорости

$$U = \frac{\Delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Скорость имеет максимальное значение на оси трубы и равна

$$U_m = \frac{\Delta P}{4\eta l} R^2.$$

Расход жидкости в трубе (масса, проходящая через поперечное сечение трубы в единицу времени) определяется по формуле

$$G = \int \rho U dS = 2\pi\rho \int_0^R r U dr = \frac{\pi\Delta P}{8\eta l} R^4. \quad (3.6)$$

3.3.3. Течение газа в длинной трубе

На коротком участке можно считать, что изменение давления происходит по линейному закону, то есть справедлива формула (3.6), где

$$\frac{\Delta P}{l} = -\frac{dP}{dx}.$$

Отсюда следует

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{8\eta G}{\pi \rho R^4}.$$

На больших расстояниях от входа в трубу плотность жидкости меняется, то есть давление не будет линейной функцией от x . Рассмотрим изотермическое течение газа, для которого из уравнения состояния следует

$$\rho = \frac{P\mu}{R^*T}.$$

Тогда

$$-\frac{dP}{dx} = \left(\frac{8\eta GTR^*}{\pi\mu R^4} \right) \frac{1}{P}.$$

В силу закона сохранения массы G не зависит от x . Коэффициент вязкости от давления зависит слабо. Тогда интегрируя от 0 до l , получим

$$P_0^2 - P_l^2 = \frac{16\eta GTR^*l}{\pi\mu R^4};$$

где P_0, P_l – давления газа на концах трубы. По этой формуле можно рассчитать давления на концах для заданного расхода или определить расход при известных давлениях на концах трубы.

3.4. Подобные течения

С учетом силы тяжести уравнения, описывающие движение вязкой несжимаемой жидкости имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta U_i + g,$$

то есть уравнение Навье–Стокса (3.2) в тензорной форме с добавлением g , и уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0.$$

Перейдем к безразмерной форме уравнений. Для этого введем масштабы величин, которые при описании конкретного случая считаются постоянными T, L, U^*, P^* .

Например, масштабом времени может быть период колебаний тела, погруженного в жидкость, период звуковой волны, распространяющейся в жидкости. За масштаб длины может быть принят линейный размер тела, находящегося в жидкости, радиус трубы, длина волны для нестационарных течений. Для скорости потока U^* – это скорость на бесконечности, среднемаассовая скорость на входе в трубу, скорость звука. Масштабом давления, например, может быть величина $\rho(U^*)^2$, среднее давление в колеблющейся жидкости.

Рассмотрим безразмерные величины

$$\bar{t} = t/T, \quad \bar{x}_i = x_i/L, \quad \bar{U}_i = U_i/U^*, \quad \bar{P} = P/P^*, \quad \bar{x}_k = x_k/L.$$

Исходные уравнения принимают вид

$$\frac{U^*}{T} \cdot \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{t}} + \frac{(U^*)^2}{L} \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} = -\frac{P^*}{\rho L} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\nu U^*}{L^2} \cdot \Delta \bar{U}_i + g,$$

$$\sum_i \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0.$$

Умножим первое уравнение на $L/(U^*)^2$. Получаем уравнение движения в безразмерной форме

$$Sh \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{U}_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_k} = -Eu \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \bar{U}_i + \frac{1}{Fr}.$$

В этом выражении введены следующие обозначения:

$$Sh = \frac{L}{U^* T} \text{ – число Струхалия,}$$

$$Eu = P^* / \rho (U^*)^2 \text{ – число Эйлера,}$$

$Re = U^* L / \nu$ – число Рейнольдса,

$Fr = (U^*)^2 / gL$ – число Фруда.

В уравнении Навье–Стокса второй член в левой части уравнений соответствует конвективному ускорению, связанному с перемещением частиц жидкости из одной точки пространства в другую. Тогда число Sh устанавливает соотношение локального и конвективного ускорений, число Eu – соотношение ускорения, вызванного силой давления, и конвективного ускорения, Re – соотношение ускорения, создаваемого силой трения, и конвективного ускорения, Fr – соотношение ускорения силы тяжести и конвективного ускорения. Например, если $Sh \ll 1$, течение жидкости можно считать стационарным, а если $Fr \gg 1$, можно пренебречь силой тяжести.

Потоки жидкости, у которых числа Sh , Re , Eu , Fr , безразмерные начальные и граничные условия одинаковы, называются подобными. В этом случае свойства одного течения могут быть определены из свойств другого, подобного течения путем простого изменения масштабов. Например, решена задача по обтеканию цилиндра установившимся потоком газа, то есть $Sh=0=1/Fr$.

Тогда обтекание цилиндра с другим диаметром будет таким же, если в обоих случаях

$$P^* = \rho U_\infty^2, \quad Eu_1 = Eu_2 = 1 \quad \text{и} \quad Re_1 = (U_\infty)_1 d_1 / \nu_1 = (U_\infty)_2 d_2 / \nu_2.$$

Числа (критерии) подобия ценны также тем, что позволяют получать обобщенные результаты движения жидкостей с различной вязкостью и условиями течения.

3.5. Течение при малых числах Рейнольдса

Для установившегося течения несжимаемой жидкости уравнение (3.2) имеет вид

$$(\vec{U}\nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{U}.$$

Первый член порядка $(U^*)^2/L$, третий $\sim \nu U^*/L^2$. То есть отношение первого члена к третьему – величина $\sim \text{Re}$. Следовательно, при $\text{Re} \ll 1$ первым членом можно пренебречь. Тогда

$$\eta \Delta \vec{U} - \nabla P = 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим задачу о прямолинейном равномерном движении шара в вязкой жидкости. Отметим, что эта задача эквивалентна случаю обтекания неподвижного шара жидкостью, имеющей на бесконечности заданную скорость \vec{v} . Решая эту задачу и вычитая скорость \vec{v} , получим распределение скорости, соответствующее неподвижной на бесконечности жидкости, в которой движется шар со скоростью $-\vec{v}$. Чтобы течение считалось установившимся, необходимо рассматривать именно задачу об обтекании неподвижного шара, так как при движущемся шаре скорость жидкости в каждой точке пространства изменяется во времени.

Положим

$$\vec{U} - \vec{v} = \text{rot } \vec{A},$$

причем $\text{rot } \vec{A}$ должен обращаться в нуль на бесконечности. В силу линейности уравнения (3.7) и граничных условий \vec{A} – линейная функция \vec{v} .

Анализ показал, что если начало координат поместить в центр шара, всем этим условиям удовлетворяет функция

$$\vec{A}(r) = f'(r)[\vec{n}\vec{v}],$$

где \vec{n} – единичный вектор в направлении радиус-вектора, $f'(r)$ – скалярная функция. Положим $f'(r)\vec{r} = \nabla f$, тогда при условии $\vec{v} = \text{const}$,

$$\vec{A} = [\nabla f \vec{v}].$$

$$\vec{U} = \vec{v} + \text{rot}[\nabla f \vec{v}] = \vec{v} + \text{rot rot}(f\vec{v}). \quad (3.8)$$

Если к уравнению (3.7) применить операцию rot , получим

$$\Delta \text{rot } \vec{U} = 0.$$

Так как $\vec{v} = \text{const}$, имеем

$$\text{rot } \vec{U} = \text{rot rot rot}(f\vec{v}) = (\text{grad div} - \Delta)\text{rot}(f\vec{v}) = -\Delta \text{rot}(f\vec{v}),$$

$$\Delta^2 \text{rot}(f\vec{v}) = \Delta^2 [\nabla f \vec{v}] = [\Delta^2 \nabla f \vec{v}] = 0.$$

Следовательно, уравнение для функции f имеет вид

$$\Delta^2 \nabla f = 0.$$

После первого интегрирования $\Delta^2 f = \text{const}$. Эту постоянную следует положить равной нулю, иначе разница $\vec{U} - \vec{v}$ не обращается в нуль на бесконечности. Тогда

$$\Delta^2 f = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d(\Delta f)}{dr} \right] = 0, \quad \Delta f = 2a/r + c. \quad (3.9)$$

Постоянную c нужно положить равной нулю, чтобы $U - v$ исчезала на бесконечности. Следовательно

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d(f)}{dr} \right] = \frac{2a}{r}, \quad f = ar + \frac{b}{r} + \text{const},$$

где const можно положить равной нулю, так как ее величина не имеет значения – скорость $\vec{U} - \vec{v}$ зависит от производных функции f . Итак

$$f = ar + \frac{b}{r}.$$

Подставляя эту функцию в (3.8), получим

$$\vec{U} = \vec{v} - a \frac{\vec{v} + \vec{n}(\vec{v}\vec{n})}{r} + b \frac{3\vec{n}(\vec{v}\vec{n}) - \vec{v}}{r^3}.$$

Граничное условие $\vec{U} = 0$ при $r = R$ имеет вид

$$\vec{v} \left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} \right) + \vec{n}(\vec{v}\vec{n}) \left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3} \right) = 0.$$

Это равенство должно выполняться при любых \vec{n} , то есть коэффициенты при \vec{v} и $\vec{n}(\vec{v}\vec{n})$ должны обращаться в нуль каждый по отдельности. Тогда

$$a = 3R/4, \quad b = R^3/4,$$

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r}$$

$$\vec{U} = -\frac{3R}{4} \cdot \frac{\vec{v} + \vec{n}(\vec{v}\vec{n})}{r} - \frac{R^3}{4} \cdot \frac{\vec{v} - 3\vec{n}(\vec{v}\vec{n})}{r^3} + \vec{v}.$$

В сферических координатах (Рис. 3.3), направив ось x по скорости \vec{v} , получим выражения для определения компонент скорости

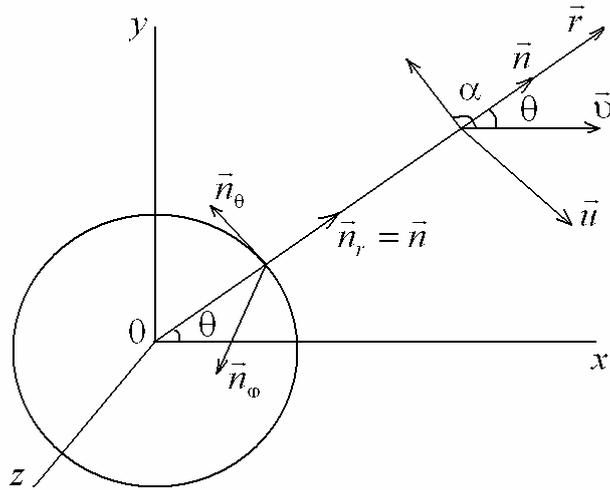


Рис. 3.3. Пояснение к выводу формул (3.10)

$$U_r = v \cos \theta \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right], \quad U_\theta = -v \sin \theta \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right]. \quad (3.10)$$

Компонента $U_\varphi = 0$, так как $\vec{U} \cdot \vec{n}_\varphi = 0$ ($\vec{v} \perp \vec{n}_\varphi$, $\vec{n} \perp \vec{n}_\varphi$). Подставляем (3.8) в уравнение (3.7) имеем

$$\text{grad } P = \eta \Delta \vec{U} = \eta \Delta \text{rot rot}(f\vec{v}) = \eta \Delta (\text{grad div}(f\vec{v}) - \vec{v} \Delta f).$$

Так как $\Delta^2 f = 0$, $v = \text{const}$, получаем

$$\text{grad } P = \text{grad}(\eta \Delta \text{div}(f\vec{v})) = \text{grad}(\eta \vec{v} \text{ grad } \Delta f),$$

$$P = P_0 + \eta \vec{v} \text{ grad } \Delta f,$$

где P_0 – давление жидкости на бесконечности. С учетом выражения (3.9) имеем

$$P = P_0 - \frac{3}{2} \eta \frac{\vec{v} \vec{n}}{r^2} R. \quad (3.11)$$

Определим силу давления движущейся жидкости на шар (или что, то же самое, силу сопротивления, испытываемую движущимся шаром). В сферических координатах с полярной осью вдоль скорости \vec{v} все величины в силу симметрии будут зависеть от r и θ . Очевидно, что эта сила \vec{F} будет направлена по скорости \vec{v} , так как шар движется по направлению равнодействующей силы.

Сила, действующая на единицу поверхности шара, согласно формуле (3.4) имеет вид

$$F_i = -\sigma_{ik} N_k,$$

где вектор нормали \vec{N}_k направлен внутрь шара, то есть противоположен \vec{n}_r . В сферической системе координат, с учетом того, что в силу симметрии ($U_\varphi = 0$) тензор напряжений имеет две не равных нулю компоненты

$$\sigma_{rr} = -P + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} = -P + \sigma'_{rr}$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right) = \sigma'_{r\theta}.$$

Следовательно

$$\sigma_{rr} \vec{n}_r = \vec{G}_n, \quad \sigma_{r\theta} \vec{n}_\theta = \vec{G}_t.$$

Сила давления и трения σ'_{rr} действуют по нормали, а сила трения $\sigma'_{r\theta}$ по касательной к поверхности шара. Равнодействующая состоит из проекций этих сил на направление \vec{v} . Проекции, перпендикулярные направлению движения шара, компенсируют друг друга.

Используем следующие соотношения:

$$\sigma_{rr} \vec{n}_r \cdot \vec{n}_v = \sigma_{rr} \vec{n}_r \cdot \vec{v} / v = \sigma_{rr} \cos \theta; \quad \sigma_{r\theta} \vec{n}_\theta \cdot \vec{n}_v = -\sigma_{r\theta} \sin \theta.$$

Тогда сила, действующая на всю поверхность шара, равна

$$F = \int (-P \cos \theta + \sigma'_{rr} \cdot \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \cdot \sin \theta)_{r=R} df.$$

На поверхности шара, согласно выражениям (3.10), имеем

$$(\sigma'_{rr})_{r=R} = 0; \quad (\sigma'_{r\theta})_{r=R} = -\frac{3\eta v}{2R} \sin \theta.$$

Из формулы (3.11) получаем

$$P|_{r=R} = P_0 - \frac{3\eta v}{2R} \cos \theta.$$

$$F = \int \left(-P_0 \cos \theta + \frac{3\eta v}{2R} \cos^2 \theta + \frac{3\eta v}{2R} \sin^2 \theta \right) df.$$

Силы давления компенсируются, так как $-P_0 \int \cos \theta df = 0$.

Поверхность шара равна $4\pi R^2$, следовательно на медленно движущийся в жидкости шар действует сила

$$F = 6\pi R \eta v.$$

Это выражение – известная формула Стокса.

Полученное выше распределение скоростей при обтекании шара дает неточные результаты на больших расстояниях от его центра, где скорость жидкости близка к скорости шара.

Для этой области условие $Re \ll 1$ не выполняется. В этом случае необходимо в уравнении Навье–Стокса учитывать член $(\vec{U}\nabla)\vec{U}$, который с учетом того, что $\vec{U} \approx \vec{v}$ можно записать в виде $(\vec{v}\nabla)\vec{U}$. Получим линейное уравнение, так как $\vec{v} = \text{const}$

$$(\vec{v}\nabla)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{U}.$$

Это уравнение было решено Осеем (C.W.Oseen). С учетом полученного распределения скоростей было определена уточненная формула для силы сопротивления, которую испытывает шар

$$F = 6\pi\eta\nu R\left(1 + \frac{3}{8}\cdot\frac{Rv}{\nu}\right).$$

Это выражение отличается от полученного ранее поправочным членом в круглых скобках. Эта поправка невелика, так как $Rv/\nu = Re \ll 1$ по условию задачи.

3.6. Ламинарный пограничный слой

С увеличением числа Рейнольдса вязкие члены в уравнении движения играют все менее заметную роль, и течение жидкости можно считать идеальным. Однако, при любых числах Рейнольдса скорость жидкости на твердой границе должна быть равна нулю (нормальная и касательная компоненты). Следовательно, вблизи твердой границы существует область течения, в которой происходит уменьшение скорости жидкости до нуля – пограничный слой, который может быть как ламинарным, так и турбулентным. В пограничном слое нельзя пренебрегать вязкостью даже при $Re \gg 1$, так как вязкие члены содержат производные от скорости по координатам, которые принимают большие значения из-за больших градиентов скорости в пограничном слое, имеющего очень малую толщину.

Рассмотрим плоскую задачу обтекания несжимаемой жидкостью твердой, неподвижной стенки.

Очевидно, что $U_y \ll U_x$, так как основное движение жидкости происходит по оси x . Используем уравнения Навье–Стокса

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right), \quad (3.12)$$

$$U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0. \quad (3.14)$$

Введем масштабы величин

$$U_x \sim U_\infty, \quad U_y \sim \varepsilon U_\infty, \quad P \sim \rho U_\infty, \quad \frac{1}{\text{Re}} \sim \varepsilon \ll 1, \quad \text{Re} = U_\infty L / \nu.$$

Изменения этих параметров на величины их масштабов происходят на расстояниях порядка длины стенки L по оси x и порядка толщины пограничного слоя δ по оси y , причем $\delta / L \sim \varepsilon$.

Оценим порядок членов в уравнении (3.12). Первый член порядка U_∞^2 / L , так как $\partial U_x / \partial x \sim \Delta U_x / \Delta x \sim U_\infty / L$, то есть максимальное изменение U_x не может быть больше U_∞ . Умножим первое уравнение на L / U_∞^2 . Тогда первый, второй и третий члены порядка единицы, четвертый $\sim \varepsilon$, пятый намного больше 1.

Таким образом, четвертый член можно отбросить и

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}.$$

Умножим уравнение (3.13) на $\varepsilon L / U_\infty^2$. Порядок членов будет таким: первый $\sim \varepsilon^2$, второй $\sim \varepsilon^2$, третий ~ 1 , четвертый $\sim \varepsilon^3$, пятый $\sim \varepsilon$.

В первом приближении можно пренебречь всеми членами кроме одного, тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Это значит, что поперечного градиента давления в пограничном слое нет. Тогда $P = P(x)$, $\partial P / \partial x = dP / dx$, а само давление равно давлению в основном потоке вдали от стенки, где движение – потенциальное и справедливо уравнение Бернулли

$$P + \rho U_{\infty}^2 / 2 = \text{const} \text{ или } \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = -U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx}.$$

Тогда движение в пограничном слое описывается соотношением

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \quad (3.15)$$

и уравнением (3.14), в котором оба члена имеют один порядок. Граничные условия имеют вид

$$U_x = U_y = 0 \text{ при } y = 0, U_x = U_{\infty} \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Эти уравнения впервые получил Прандтль.

3.7. Обтекание пластины

Рассмотрим задачу по обтеканию бесконечно тонкой полубесконечной пластины ($0 \leq x < +\infty$) плоскопараллельным потоком жидкости, решенную Блазиусом в 1908 г. (Рис. 3.4).

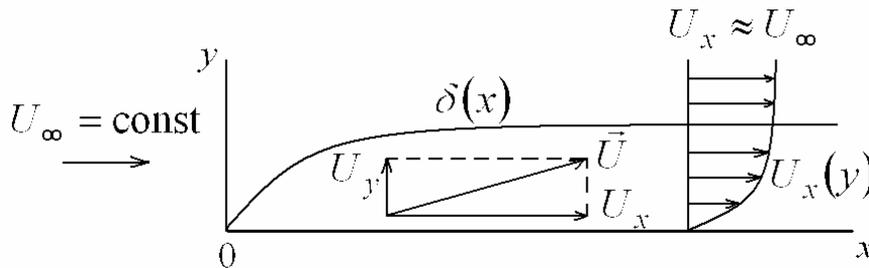


Рис. 3.4. Пограничный слой на пластине

Так как $U_{\infty} = \text{const}$, уравнение (3.15) принимает вид

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}.$$

Введем безразмерную координату ξ , полагая

$$\xi = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (3.17)$$

и функцию тока

$$\psi = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\xi).$$

Так как компоненты скорости связаны с функцией тока соотношениями

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

уравнение (3.14) удовлетворяется тождественно.

Тогда

$$U_x = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = U_\infty f'(\xi), \quad (3.18)$$

$$U_y = -\frac{\sqrt{\nu U_\infty} f}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \sqrt{\nu x U_\infty} f' \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} (\xi f' - f).$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим после преобразований обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2f''' + f \cdot f'' = 0,$$

с граничными условиями, которые следуют из соотношений (3.16)

$$f = 0 = f' \text{ при } \xi = 0; \quad f' = 1 \text{ при } \xi = \infty.$$

Уравнение решается приближенными методами. Для $\xi \gg 1$ имеем

$$f(\xi) = \xi - \beta, \quad \beta = 1.72. \quad (3.19)$$

Распределение продольной составляющей скорости определяется выражением (3.18). Из Таблицы 3.1 следует, что U_x быстро возрастает до значения близкого к U_∞ .

Табл. 3.1. Распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое

ξ	U_x/U_∞
2	0.65
3	0.85
4	0.97
5	0.99
6	0.999

Поперечная компонента оказывается не равной нулю даже при $\xi \rightarrow \infty$

$$U_y|_{\xi \rightarrow \infty} = 0.86U_\infty \sqrt{\frac{\nu}{xU_\infty}}.$$

Это связано с тем, что жидкость, встречаясь с пластиной, оттесняется от нее, линии тока искривляются.

Один из способов оценки толщины пограничного слоя заключается в определении расстояния от пластины, на котором скорость потока U_x становится равной U_∞ . Однако, этот подход зависит от задаваемой степени точности, так как решение носит асимптотический характер и $U_x \rightarrow U_\infty$ только при $y \rightarrow \infty$. Если, например, за толщину пограничного слоя взять расстояние, на котором $U_x = 0.99U_\infty$, то согласно Таблице 1 и формуле (3.17) получается

$$\delta = 5\sqrt{\nu x/U_\infty}.$$

В настоящее время принято за толщину пограничного слоя принимать толщину вытеснения – расстояние, на которое потенциальное течение вытесняется из-за уменьшения скорости в пограничном слое (Рис. 3.5). Уменьшение скорости приводит к уменьшению расхода жидкости на величину, пропорциональную

$$\int_0^\infty (U_\infty - U_x) dy.$$

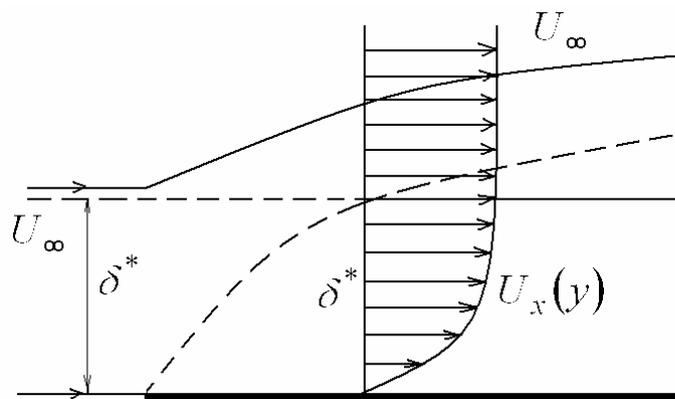


Рис. 3.5. Вытеснение потенциального течения пограничным слоем

С другой стороны, уменьшение расхода $\sim U_\infty \delta^*$ за счет сокращения области потенциального течения, следовательно,

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{U_x}{U_{\infty}}\right) dy.$$

Подставляя выражения (3.17), (3.18), получим

$$\delta^* = \sqrt{\nu x/U_{\infty}} \int_0^{\infty} (1 - f') d\xi = \sqrt{\nu x/U_{\infty}} [\xi - f(\xi)]_{\xi \rightarrow \infty}.$$

С учетом предельного значения (3.19) имеем

$$\delta^* = 1.72 \sqrt{\nu x/U_{\infty}}.$$

Сила трения, действующая на единицу площади поверхности пластины, равна

$$\sigma'_{xy} = \eta \frac{\partial U_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \eta \sqrt{\frac{U_{\infty}^3}{x\nu}} f''(0).$$

При $\xi \ll 1$ $f(\xi) \approx a\xi^2/2$; $a = 0.332$. Тогда

$$\sigma'_{xy} = 0.332 \sqrt{\frac{\eta\rho U_{\infty}^3}{x}}.$$

Для пластины длиной L с учетом обеих сторон сила трения в расчете на единицу ширины равна

$$F = 2 \int_0^L \sigma'_{xy} dx = 1.328 \sqrt{\eta\rho L U_{\infty}^3}.$$

Если ввести коэффициент сопротивления $C = F/(2L\rho U_{\infty}^2/2)$, то окажется, что он обратно пропорционален корню квадратному из числа Рейнольдса

$$C = 1.328/\sqrt{\text{Re}}.$$

3.8. Влияние пограничного слоя на характер течения жидкости

3.8.1. Отрыв пограничного слоя

На Рис. 3.6 показана схема обтекания цилиндра, полученная по результатам визуальных наблюдений. Вблизи передней критической точки K

линии тока искривляются, то есть вытесняются пограничным слоем. В области за цилиндром образуются вихри, которые показывают, что здесь существует область обратных токов, то есть со скоростью, противоположной скорости в пограничном слое и в потенциальном течении при удалении от тела. Измерения показывают, что давление имеет максимальное значение в передней критической точке, после чего уменьшается, затем изменяется незначительно, после чего начинает увеличиваться по мере приближения к области позади обтекаемого тела (Рис. 3.7).

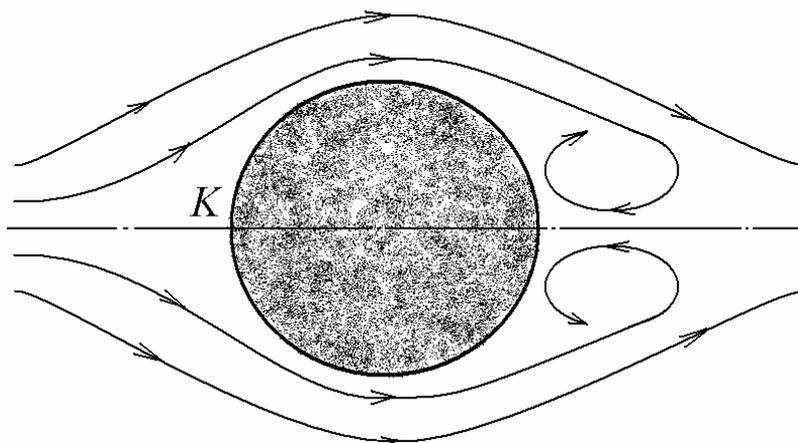


Рис. 3.6. Обтекание цилиндра

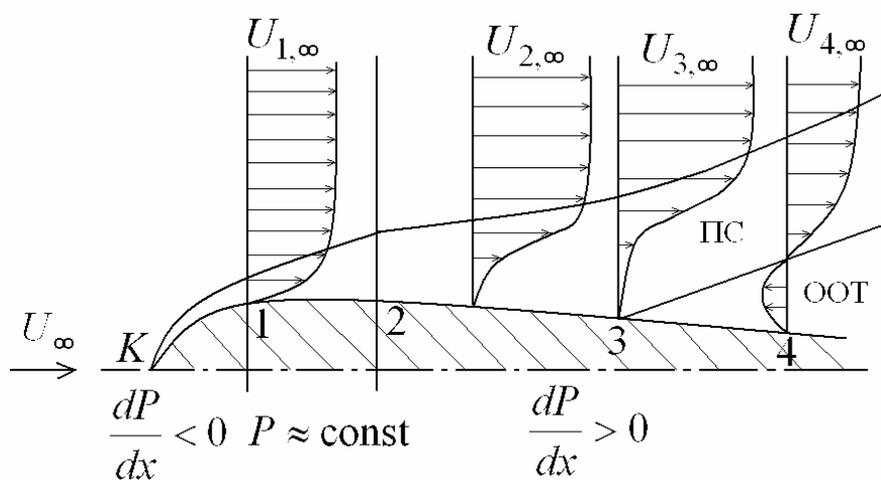


Рис. 3.7. Течение жидкости вдоль твердой поверхности:
 ПС – пограничный слой, ООТ – область обратного течения

Для внешней границы пограничного слоя, где движение жидкости – потенциальное, имеем

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = -U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx}.$$

Это значит, что скорость на внешней границе уменьшается в области за точкой 2, после которой $dP/dx > 0$. Тогда для любой точки в пограничном слое это уменьшение происходит более быстро, так как наряду с градиентом давления здесь действует сила трения. На стенке эта сила максимальна. Значит, при движении вдоль стенки появится вторая точка в распределении скорости, где эта скорость равна нулю и эта точка будет перемещаться в направлении от стенки (профиль 4). Поскольку тормозящие силы продолжают действовать, между стенкой и внутренней границей пограничного слоя жидкость будет двигаться в обратном направлении, появляется область обратных токов. Произошло отделение пограничного слоя от поверхности – отрыв пограничного слоя. Рассмотрим механизм этого явления. Уравнение Прандтля на стенке имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} = \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right)_{y=0}.$$

На участке 0–1, где $dP/dx < 0$, а значит и $(\partial^2 U_x / \partial y^2)_{y=0} < 0$ кривизна распределения $U_x(y)$ соответствует пограничному слою при любых y . Участок 1–2 переходной. После, при условии $dP/dx > 0$, кривизна кривой $U_x(y)$ изменится на противоположную (профиль 2).

Следовательно, должна существовать точка, в которой $(\partial U_x / \partial y)_{y=0} = 0$ (точка 3), после которой появляется область обратных токов – это точка отрыва пограничного слоя.

3.8.2. Течение в начальном участке трубы

Обычно жидкость поступает в трубу из какого–то резервуара 1, размеры которого велики по сравнению с диаметром трубы 2 (Рис. 3.8). Тогда во входном сечении скорость одинакова во всех точках, то есть движение начинается одновременно и под действием одинаковых сил. По мере продвижения слои, близкие к стенкам трубы, тормозятся и образуются

пограничный слой. В средней же части движение потенциальное с плоским профилем скорости, однако по мере удаления от входа скорость в средней части потока увеличивается в силу закона сохранения массы, так как расход жидкости вблизи стенок уменьшается из-за торможения. Пограничный слой расширяется и вскоре заполняет все сечение трубы, распределение скоростей становится параболическим. Решение этой задачи методами теории пограничного слоя показало, что параболический профиль устанавливается на расстоянии от входа в трубу

$$x_0 = 0.0575 r_0 \text{ Re},$$

где r_0 – радиус трубы, $\text{Re} = 2U_0 r_0 / \nu$ – число Рейнольдса.

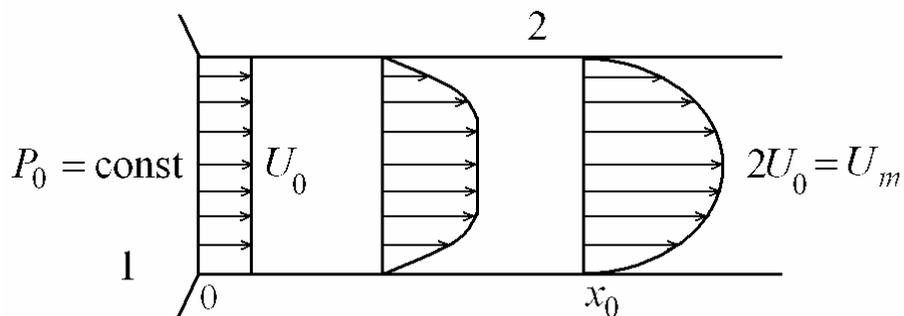


Рис. 3.8. Движение жидкости на начальном участке трубы

ЗАДАЧИ

3.1. В некотором сечении трубы радиусом R давление равно P_0 . Расход жидкости G и коэффициент кинематической вязкости ν известен. Определить длину участка, на котором давление уменьшается в 2 раза.

Решение. Расход жидкости, имеющей параболический профиль скорости в трубе, (см. раздел 3.3) находится по формуле

$$G = 2\pi\rho \int_0^R U(r)rdr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\nu l}.$$

Давление – линейно убывающая функция, зависящая от перепада давления на концах трубы ΔP .

$$P(x) = P_0 - x\Delta P/l.$$

Согласно условию задачи $P(x) = P_0/2$. Находя градиент давления из формулы для расхода жидкости, получим

$$x = \frac{\pi R^4 P_0}{16\nu G}.$$

3.2. Между двумя параллельными пластинами длиной l , шириной d , расстояние между которыми h , движется вязкая несжимаемая жидкость. Градиент давления $dP/dx = -a$, коэффициент динамической вязкости η . Определить количество диссипируемой энергии.

Решение. Используем распределение скорости, полученное в разделе 3.3, из которого следует

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{a}{2\eta}(h - 2y).$$

Количество диссипируемой энергии находим по формуле, полученной в разделе 3.2, согласно которой

$$E_d = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 dV = -\frac{a^2 l d h^3}{24\eta}.$$

3.3. Определить расход газа в трубе длиной l , радиусом R , если давление на входе равно P_0 , на выходе P_l , начальная плотность газа ρ_0 , показатель адиабаты γ , коэффициент динамической вязкости η .

Решение. В разделе 3.3 было показано, что градиент давления газа связан с его расходом соотношением

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{8\eta G}{\pi \rho R^4}.$$

Для адиабатических условий плотность газа в трубе определяется выражением

$$\rho = \rho_0 (P / P_0)^{1/\gamma}.$$

После подстановки плотности в исходное равенство получим

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{8\eta G}{\pi \rho_0 R^4} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{1/\gamma}.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до l , находим формулу для расхода газа

$$G = \frac{\pi\gamma\rho_0 R^4 P_0^{1/\gamma}}{8(\gamma+1)l\eta} \left[1 - \left(\frac{P_l}{P_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right].$$

3.4. Найти коэффициент сопротивления, которое испытывает вязкая несжимаемая жидкость, движущаяся в круглой трубе.

Решение. Коэффициент сопротивления определяется по следующей формуле

$$C = \frac{8\sigma}{\rho\bar{U}^2}.$$

Для установившегося течения сила давления $S\Delta P$ уравновешивается силой трения $2\pi Rl\sigma$, следовательно

$$\sigma = \frac{R\Delta P}{2l}.$$

Перепад давления на концах трубы можно выразить через расход жидкости, используя формулу, приведенную в задаче 3.1. Расход жидкости определим, используя среднюю скорость жидкости, то есть $G = \rho S\bar{U}$. В результате, для силы трения получаем выражение

$$\sigma = \frac{4\rho\nu\bar{U}}{R}.$$

Следовательно, коэффициент сопротивления находится по формуле

$$C = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{2\bar{U}R}{\nu}.$$

3.5. На входе в трубу давление P_0 , плотность жидкости ρ_0 , скорость течения U_0 . Найти давление в сечении, где профиль скорости становится параболическим.

Решение. На начальном участке вязкость играет роль в пристеночной области, где образуется пограничный слой. В средней части жидкость можно считать идеальной. Рассмотрим линию тока на оси трубы. Из уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости следует

$$P_1 = P_0 - \frac{\rho U_0^2}{2} \left[\left(\frac{U_1}{U_0} \right)^2 - 1 \right].$$

Согласно закону сохранения массы расход жидкости во всех сечениях трубы одинаков: $\rho US = \text{const}$. Тогда средняя скорость жидкости в сечении, где распределение скорости – параболическое, равна U_0 . На оси трубы скорость максимальна и в два раза больше средней, (см. Задачу 3.8.), то есть $U_1 = 2U_0$. Следовательно, давление в рассматриваемом сечении находится по формуле

$$P_1 = P_0 - 3\rho U_0^2 / 2.$$

Задачи для самостоятельного решения.

3.6. Найти силу трения, действующую на единицу поверхности вязкой несжимаемой жидкости, движущейся в трубе длиной l , радиусом R , если давление на ее концах P_0, P_l .

$$\text{Ответ: } \sigma'_{rz} = -\frac{(P_0 - P_l)R}{2l}.$$

3.7. Получить выражения для компонент скорости жидкости U_r, U_θ , считая решение задачи Стокса для скорости \vec{U} известным (см. раздел 3.5).

3.8. Чему равна средняя по сечению трубы скорость вязкой несжимаемой жидкости в трубе, если скорость течения на оси трубы U_m ?

$$\text{Ответ: } \bar{U} = U_m / 2.$$

3.9. Вычислить коэффициент сопротивления пластины длиной 0.06 м и толщину пограничного слоя на расстоянии 0.05 м от ее переднего края при обтекании потоком воздуха ($\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$) со скоростью 0.4 м/с.

$$\text{Ответ: } C = 0.033, \delta_* = 2.4 \text{ мм}.$$

3.10. Вывести формулу для коэффициента сопротивления шара, обтекаемого вязкой несжимаемой жидкостью.

Ответ: $C = \frac{34}{\text{Re}}$.

Глава 4. Турбулентное движение несжимаемой вязкой жидкости

4.1. Общие положения

В 1883 г. Осборн Рейнольдс, изучая движение воды в круглой трубе, обнаружил, что с увеличением скорости потока устойчивый ламинарный характер движения нарушается. Появляются возмущения, которые выражаются в том, что ранее прямолинейное движение частиц жидкости, ламинарное на некоторых участках становится беспорядочным, сохраняя вместе с тем общую направленность движения. Дальнейшее увеличение скорости приводит к хаотическому движению во всем потоке. Как принято говорить в настоящее время, течение из устойчивого – ламинарного превратилось в неустойчивое, возмущенное – турбулентное.

Экспериментально установлено, что ламинарное движение жидкости существует до критического значения числа Рейнольдса $Re_{\epsilon\delta} = U_{\bar{n}\delta} d / \nu \approx 2 \cdot 10^3$, где $U_{\bar{n}\delta}$ – среднемассовая скорость, d – диаметр трубы. При $Re \approx Re_{\epsilon\delta}$ наблюдается явление перемежаемости – чередование ламинарного и турбулентного режимов с течением времени, но в одном и том же месте. Доля времени существования турбулентного режима называется коэффициентом перемежаемости, который изменяется от 0 (полностью ламинарное движение) до 1 (полностью турбулентное движение). Установлено, что в сечениях трубы, более удаленных от входа, при одном и том же числе Рейнольдса коэффициент перемежаемости становится равным единице раньше. Это говорит о том, что турбулентность развивается не только с течением времени на данном участке, но и по мере перемещения частиц жидкости по трубе, пока она не охватывает все сечение трубы и все последующее течение жидкости.

Многочисленные экспериментальные исследования по определению критического числа Рейнольдса при обтекании пластины показали, что оно близко к $Re_{\epsilon\delta}$, для трубы, то есть $Re_{\epsilon\delta} = U_{\infty} \delta^* / \nu \approx 2000$. Однако, это значение сильно зависит от степени турбулентности основного потока. В пограничном слое начальный участок – ламинарный. Далее идет переходной участок с наличием перемежаемости, а затем течение в слое становится

полностью турбулентным. Такое же значение может служить оценкой и в случаях обтекания цилиндра, шара, крыльев и других профилей.

При достаточно больших числах Рейнольдса течение жидкости становится полностью турбулентным, как говорят наступает развитая турбулентность. В каждой точке совершаются нерегулярные изменения (пульсации) скорости потока относительно некоторого среднего значения, кроме того, аналогичные изменения происходят при переходе от точки к точке в фиксированный момент времени. Полной количественной теории этого движения пока нет. Рассмотрим некоторые качественные результаты, дающие представление о характере развитого турбулентного движения.

Введем среднюю скорость турбулентного движения \bar{U} – результат усреднения истинной скорости U в данной точке за большой промежуток времени. За счет сглаживания пульсаций \bar{U} будет плавно меняющейся вдоль потока величиной. Введем понятие масштаба турбулентных пульсаций – порядок величины расстояния, на котором существенно изменяется скорость пульсационного движения U' . При больших числах Рейнольдса в потоке присутствуют турбулентные пульсации всех масштабов. Основную роль играют крупномасштабные пульсации, масштаб которых порядка размеров области, в которой происходит турбулентное движение ($\sim l$). Эти пульсации имеют наибольшую амплитуду \sim изменения средней скорости $\Delta\bar{U}$ на расстоянии l . Частота крупномасштабных пульсаций $\sim \bar{U}/l$, то есть обратно пропорциональна времени повторяемости картины движения относительно неподвижной системы отсчета. У мелкомасштабных пульсаций амплитуды небольшие, высокие частоты и в них сосредоточена лишь малая доля кинетической энергии движения жидкости.

Введем число $Re_\lambda = v\lambda/\nu$ – число Рейнольдса турбулентных пульсаций, ν – порядок пульсаций скорости, λ – масштаб пульсаций. При больших Re велико Re_λ крупномасштабных пульсаций, то есть движение жидкости не зависит от вязкости и, следовательно, диссипация энергии практически отсутствует. Для мелкомасштабных пульсаций $Re_\lambda \sim 1$ и хотя они слабо влияют на общий характер движения, именно в них происходит диссипация энергии. От крупномасштабных пульсаций энергия без потерь передается пульсациям с меньшим масштабом после чего энергия переходит в

теплоту за счет трения в мелкомасштабных пульсациях. Значит, для поддержания турбулентного движения требуется постоянно сообщать энергию внешних источников крупномасштабным пульсациям.

Пусть ε – среднее количество диссипируемой энергии в единицу времени в единице массы жидкости. Первоначально эта энергия содержится в крупномасштабных пульсациях, которые характеризуются порядком пульсаций скорости ΔU и масштабом l . Тогда из соображений размерности

$$\varepsilon \sim \frac{(\Delta U)^3}{l}, \quad [\varepsilon] = \frac{\ddot{A}\alpha}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \tilde{n}} = \frac{\dot{i}^2}{\tilde{n}^3}; \quad \Delta U \sim \Delta \bar{U}. \quad (4.1)$$

Введем величину $\nu_T \sim \Delta U \cdot l$, которая имеет размерность кинематической вязкости ($\text{м}^2/\text{с}$) и называется коэффициентом турбулентной вязкости, который связан с обычной вязкостью соотношением

$$\nu_T \sim \nu \text{Re}, \quad \text{где } \text{Re} \sim \frac{\Delta U l}{\nu} \sim \frac{\bar{U} l}{\nu}.$$

Диссипация энергии определится по формуле

$$\varepsilon \sim \nu_T (\Delta U / l)^2,$$

то есть диссипация энергии зависит от градиента средней скорости потока и коэффициента турбулентной вязкости.

На характер турбулентного движения, кроме отмеченных величин $\Delta U, l$ влияет еще одна – плотность. Единственная комбинация этих величин, имеющая размерность давления

$$\rho (\Delta U)^2 \sim \Delta P.$$

Эта величина оценивает порядок изменения давления в области турбулентного движения.

Рассмотрим движение в участках, размеры которых λ малы по сравнению с l , но велики в сравнении с λ_0 , расстоянием, на котором начинает играть роль вязкость. Параметры, определяющие это движение – плотность жидкости ρ и диссипируемая энергия ε , передаваемая от крупномасштабных пульсаций без потерь. Порядок величины изменения скорости турбулентного движения с учетом требований размерности

$$v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3}, \quad (4.2)$$

то есть изменение скорости турбулентных пульсаций на малых расстояниях пропорционально корню кубическому из этого расстояния – закон Колмогорова–Обухова.

Теперь определим порядок величины изменения скорости турбулентного движения v_λ в фиксированной точке за промежуток времени $\tau \ll T \sim l/\bar{U}$. Спустя τ в выбранную точку попадает участок, находившийся на расстоянии $\sim \tau\bar{U}$. Полагая $\lambda = \tau\bar{U}$, получим

$$v_\tau \sim (\varepsilon\tau\bar{U})^{1/3}.$$

Если рассматривать участок, перемещающийся из точки в другую точку со скоростью \bar{U} , то она исключается из определяющих величин и

$$v_\tau^* \sim (\varepsilon\tau)^{1/2}.$$

Определим расстояние λ_0 , начиная с которого влиянием вязкости пренебречь нельзя, которое является масштабом турбулентных пульсаций малой амплитуды. Имеем

$$\text{Re}_\lambda \sim \frac{v\lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta U \lambda^{4/3}}{\nu^{1/3}} \sim \text{Re} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{4/3}, \text{ так как } \begin{cases} v \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3} \\ \varepsilon \sim (\Delta U)^3 / l \end{cases}.$$

С учетом (4.1), (4.2) при условии $\text{Re}_\lambda \sim 1$, получим

$$\lambda_0 \sim l / \text{Re}^{3/4}.$$

То же самое можно получить, составляя комбинацию из ε, ν – параметров, определяющих мелкомасштабные пульсации

$$\lambda_0 \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}.$$

То есть масштаб λ_0 и скорость мелкомасштабных пульсаций уменьшается с увеличением числа Рейнольдса осредненного потока.

4.2. Логарифмический профиль скоростей

Рассмотрим плоско-параллельное турбулентное течение вдоль неограниченной плоской поверхности. Такой характер движения – идеализация, получающаяся после усреднения параметров течения по времени. Система координат такова, что $U_x = U$, $U_y = U_z = 0$, ось y перпендикулярна

поверхности, перепад давления отсутствует. Тогда все параметры течения зависят только от y . Рассмотрим силу трения σ , действующую на единицу поверхности стенки, которая направлена по оси x . В то же время σ является x -компонентой потока импульса, непрерывно передаваемого от слоя к слою в отрицательном направлении оси y и в конечном итоге передаваемого стенке ($\Pi_{ik} = \rho U_i U_k - \sigma_{ik}$, на стенке $U_i = U_k = 0$). Если бы жидкость двигалась во всех точках с одинаковой скоростью, то передачи импульса не было бы. Значит необходим градиент средней скорости потока.

Пусть задано определенное значение σ и требуется установить, каково должно быть движение жидкости с известной плотностью ρ . При турбулентном движении $Re \gg 1$, то есть вязкие члены можно не учитывать, за исключением течения на малых расстояниях от стенки. Тогда значение градиента скорости для фиксированного расстояния от стенки будет зависеть от ρ, σ и y . Единственно возможная комбинация этих величин из соображений размерности

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{dU}{dy}, \quad [\sigma] = \text{Па} = \text{Н} / \text{м}^2.$$

Или, полагая $\sigma = \rho v_*^2$,

$$\frac{dU}{dy} = \frac{v_*}{\kappa y}, \quad (4.3)$$

где κ – постоянная Кармана, равная 0.4, определенная экспериментальным путем.

Интегрируя уравнение (4.3), получим

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + c. \quad (4.4)$$

Для определения постоянной c нельзя использовать граничное условие при $y = 0$, так как первый член в (4.4) стремится к бесконечности. Дело в том, что это выражение при малых y несправедливо (не учитывалась вязкость). Положим это расстояние $\sim y_0$. Масштаб турбулентного движения на таких расстояниях $\sim y_0$, а скорость $\sim v_*$, как это следует из (4.4), то есть $Re \sim y_0 v_* / \nu$. Так как вязкость имеет значение при $Re \sim 1$, то $y_0 \sim \nu / v_*$.

На расстояниях $y \ll y_0$ имеет место обычное движение вязкой жидкости, тогда согласно формуле (3.3) сила трения равна

$$\sigma = \rho\nu \frac{dU}{dy}, \text{ откуда } U = \frac{\sigma}{\rho\nu} y = \frac{v_*^2}{\nu} y.$$

Следовательно, вблизи стенки расположена область, где средняя скорость меняется по линейному закону – вязкий подслоя. Постоянную c необходимо взять из расчета, чтобы при $y = y_0$ было $U = U_c$, где $U_c = v_*^2 y_0 / \nu$, то есть скорость на внешней границе подслоя. Положим $y_0 = \alpha\nu / v_*$, тогда $U_c = \alpha v_*$ и

$$c = \alpha v_* - \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{\alpha\nu}{v_*} = v_* \left(\alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha \right) - \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{\nu}{v_*}.$$

Тогда получим

$$\frac{U}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{yv_*}{\nu} \right) + \alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \left(\frac{yv_*}{\nu} \right) - \ln \beta \right].$$

Постоянная β определяется эмпирически. Для гладкой трубы (нешероховатые стенки) распределение скорости имеет вид

$$\frac{U}{v_*} = 2.5 \ln \left(\frac{yv_*}{0.13\nu} \right) \text{ при } y \geq y_0. \quad (4.5)$$

Это и есть логарифмическое распределение (профиль) скорости в турбулентном потоке. Используется и другая форма записи

$$\frac{U}{v_*} = 5.75 \log \left(\frac{yv_*}{\nu} \right) + 5.1.$$

Если построить эту зависимость, используя логарифмическую координату, получается прямая, которая с высокой точностью согласуется с экспериментальными данными в диапазоне чисел Рейнольдса от $4 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^6$.

Часто вместо универсального логарифмического распределения скорости применяют более простые эмпирические степенные зависимости, справедливые внутри определенных интервалов значений числа Рейнольдса

$$\frac{U}{U_m} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n} = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/n},$$

U_m – скорость на оси трубы, r – отсчитывается от оси трубы.

$$n = 6 \text{ при } \text{Re} = 4 \cdot 10^3,$$

$$n = 7 \text{ при } \text{Re} = 10^5,$$

$$n = 10 \text{ при } \text{Re} = 3 \cdot 10^6.$$

4.3. Турбулентное течение в трубе

Рассмотрим участок трубы длиной l , радиусом r_0 , по которому движется жидкость под действием перепада давления $\Delta P = P_1 - P_2$, P_1 и P_2 – давления в сечениях, ограничивающих рассматриваемый участок. Движущая сила равна $\pi r_0^2 \Delta P$, сила трения $2\pi r_0 l \sigma$, где $\sigma = \rho v_*^2$. При установившемся движении эти силы равны, то есть

$$v_* = \sqrt{\frac{\Delta P r_0}{2\rho l}}.$$

Зная скорость v_* из формулы (4.5), изменяя y от y_0 до r_0 можно найти распределение скорости.

Введем так называемый коэффициент сопротивления трубы

$$C = 4 \frac{\sigma}{\bar{U}^2} = \frac{4r_0 P}{\rho \bar{U}^2 l},$$

который показывает, какая часть динамического давления в газовом потоке теряется вследствие трения газа в стенке трубы.

Средняя скорость потока определяется по формуле

$$\bar{U} = \left(2\pi \int_0^{r_0} U r dr\right) / \pi r_0^2. \quad (4.6)$$

Из формулы для коэффициента сопротивления следует $\sigma = C\rho\bar{U}^2/8$, а поскольку $\sigma = \rho v_*^2$, получим

$$2\sqrt{2}v_* = \bar{U}\sqrt{C}. \quad (4.7)$$

Тогда из логарифмического распределения (4.5) с учетом (4.6), (4.7) можно получить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = 2\log(\text{Re}\sqrt{C}) - 0.8, \text{ где } \text{Re} = \frac{\bar{U}2r_0}{\nu}.$$

Эта равенство содержит C в неявном виде, поэтому на практике часто используют более простые эмпирические формулы. Одно из таких выражений было получено Блазиусом

$$C = 0.3164(\text{Re})^{-1/4},$$

которое справедливо при условии $\text{Re} \ll 10^5$.

Для сравнения, коэффициент сопротивления при ламинарном течении жидкости в трубе изменяется обратнопропорционально числу Рейнольдса (см. Задачу 3.4)

$$C = 64/\text{Re}.$$

4.4. Турбулентный пограничный слой

Структура турбулентного пограничного слоя следующая: в непосредственной близости от стенки, как было показано раньше, располагается вязкий подслой с линейным распределением скоростей и область с логарифмическим распределением. Начиная с внешней границы подслоя, происходит переход к турбулентному движению. Причем на расстояниях ~20% от общей толщины пограничного слоя сосредоточено ~75% энергии турбулентного движения в пограничном слое, а оставшаяся четверть приходится на более широкую внешнюю часть пограничного слоя ~80% его толщины.

Рассмотрим турбулентный пограничный слой на бесконечно тонкой пластине. На границе слоя справедливо распределение (4.5) из которого при $y = \delta$ следует

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln\left(\frac{v_*\delta}{a\nu}\right), \quad (4.8)$$

где $U = \bar{U}$ основного потока, a – постоянная.

Рассмотрим изменение толщины пограничного слоя вдоль пластины, то есть производную $d\delta/dx$. По аналогии с ламинарным слоем можно предположить, что угол наклона касательный к границе турбулентного слоя в некоторой точке будет того же порядка, что и угол наклона касательной к линии тока, проходящей через эту точку (Рис. 4.1). Это связано с искривлением линий тока за счет вытеснения потока пограничным слоем. Касательная к линии тока совпадает с направлением скорости течения, так как тангенс угла наклона касательной $\sim U_y/U_x \sim v_*/U$, из-за того, что поперечная компонента обязана пульсациям скорости, которые $\sim v_*$, являющейся масштабом малых скоростей (см. вязкий подслой, где $U \sim U_c \sim v_*$). Тогда

$$\frac{d\delta}{dx} \sim \frac{v_*}{U} \text{ или } \delta \sim \frac{v_*x}{U}.$$

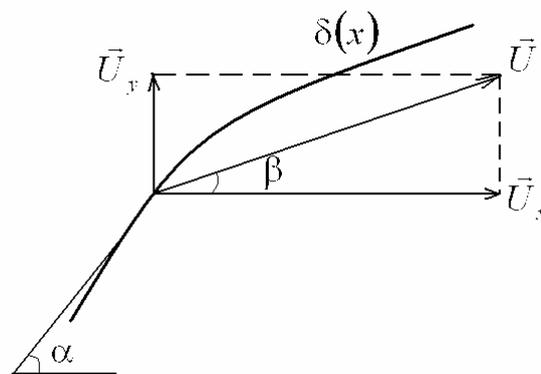


Рис. 4.1. Оценка толщины турбулентного пограничного слоя на пластине

Подставляя эту величину в выражение (4.8), получим

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_*^2 x}{bUv}. \quad (4.9)$$

Введем коэффициент сопротивления

$$C_x = \frac{2\sigma}{\rho U^2} = \frac{2\rho v_*^2}{\rho U^2} = 2 \left(\frac{v_*}{U} \right)^2.$$

Тогда

$$\frac{v_*}{U} = \sqrt{\frac{C_x}{2}}.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.9), получим

$$\kappa \sqrt{\frac{2}{C_x}} = \ln\left(\frac{C_x \text{Re}_x}{2b}\right), \text{ где } \text{Re}_x = Ux/\nu.$$

Это уравнение решается численными методами. Г. Шлихтинг с учетом результатов измерений, предложил следующую формулу для локального коэффициента сопротивления (в произвольной точке на одной из сторон пластины)

$$C_x = 0.0576(\text{Re}_x)^{-1/2}$$

и толщины пограничного слоя

$$\delta(x) = 0.37(\text{Re}_x)^{-1/2} x.$$

Следовательно, толщина турбулентного пограничного слоя нарастает почти прямопропорционально расстоянию от края пластины, тогда как при ламинарном течении – прямопропорционально \sqrt{x} .

Коэффициент сопротивления всей пластины

$$C = 0.148(\text{Re})^{-1/2}, \quad \text{Re} = UL/\nu,$$

и учитывает обе стороны пластины.

4.5. Кризис сопротивления

Рассмотрим экспериментальную зависимость (Рис. 4.2) коэффициента сопротивления шара от $\text{Re} = Ud/\nu$, d – диаметр шара. При малых числах Рейнольдса коэффициент сопротивления уменьшается в соответствии с формулой $C = 24/\text{Re}$ до $\text{Re} \approx 5 \cdot 10^3$. Затем турбулентность потока несколько повышает C . В диапазоне $2 \cdot 10^4 - 1.5 \cdot 10^5$ коэффициент сопротивления практически не изменяется. При $\text{Re} \gg 1$ вязкость не влияет на сопротивление тела. Тогда остаются три параметра U, ρ, d . Из соображений размерности $F \sim \rho U^2 d^2$ или $F = \text{const} \rho U^2 S_\phi$, где S_ϕ – площадь поперечного (по отношению к направлению потока) сечения тела. Постоянная зависит только от формы тела. Для коэффициента сопротивления имеем

$$C = \frac{4F}{\rho U^2 S} = \text{const}.$$

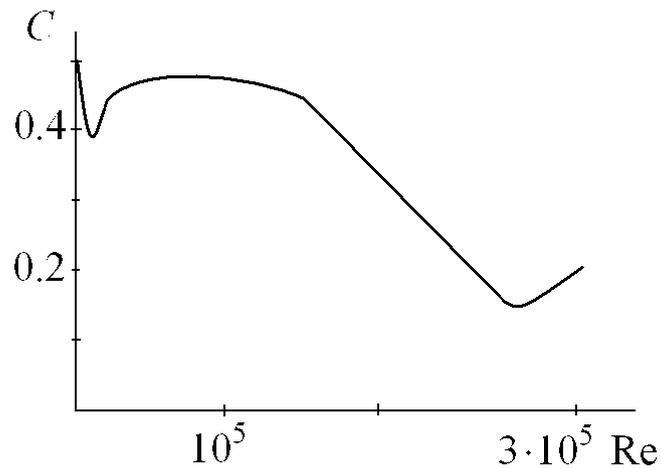


Рис. 4.2. Зависимость коэффициента сопротивления шара от числа Рейнольдса

При достаточно больших числах Рейнольдса на поверхности тела имеется ламинарный пограничный слой в начальном участке, турбулентный слой и область за линией отрыва. С увеличением числа Рейнольдса линия отрыва смещается вниз по течению и турбулентный «след» сужается, то есть сокращается область возвратных течений, что приводит к уменьшению силы сопротивления и коэффициента C . Для шара это происходит при числах Рейнольдса от $1.5 \cdot 10^5$ до $2.5 \cdot 10^5$. Это явление получило название – кризис сопротивления, когда коэффициент сопротивления уменьшается в 4–5 раз. При очень высоких скоростях потока начинает играть роль сжимаемость жидкости, падение C прекращается и сопротивление начинает слегка увеличиваться. Однако для объяснения этой зависимости полученные выше результаты неприменимы, так как они не учитывали сжимаемость жидкости.

4.6. Турбулентная струя

Рассматривается истечение жидкости в пространство, заполненное неподвижной жидкостью. Течение такого типа называют струей.

В качестве вспомогательного примера возьмем турбулентную область, возникающую при отрыве потока от края угла, образованного двумя полубесконечными плоскостями.

При ламинарном обтекании (Рис. 4.3, а) поток, движущийся в направлении АО, плавно поворачивается, переходя в поток, движущийся в направлении ОВ.

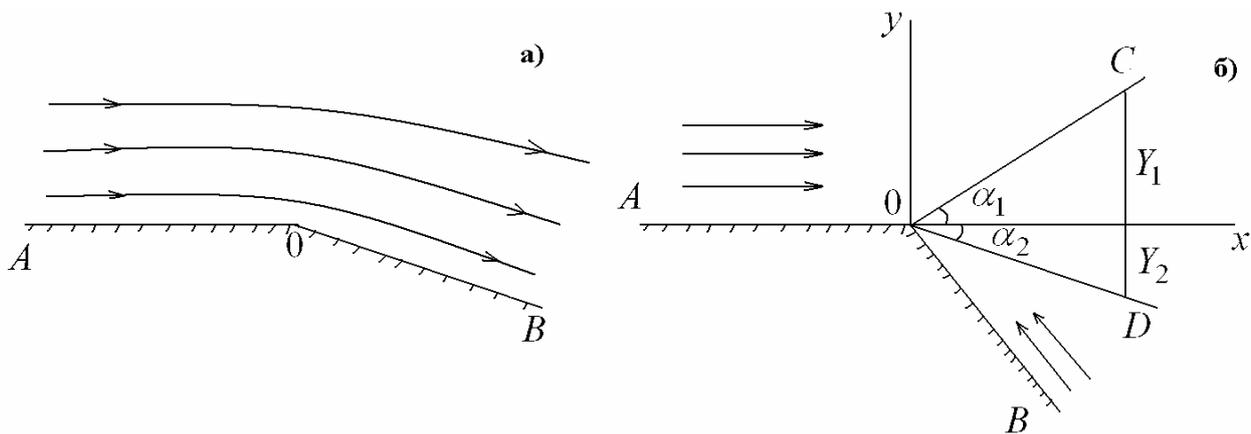


Рис. 4.3. Обтекание угла, образованного двумя плоскостями:

а – ламинарное течение;

б – турбулентный поток

В турбулентном режиме (Рис. 4.3, б) поток АО, дойдя до края угла не поворачивается, а продолжает двигаться в прежнем направлении. В направлении ВО возникает течение, которое затем смешивается с основным потоком. Турбулентные пульсации основного потока, движущиеся по линии Ох, вовлекают в движение частицы неподвижной жидкости, расположенной ниже линии Ох. Взамен ушедших частиц подходят другие и тоже сносятся основным потоком. Образуется область COD турбулентного смешения, появление которой связано с неустойчивостью границы раздела Ох между основным потоком и первоначально неподвижной жидкостью. Если основной осредненный поток является безвихревым, то движение жидкости в области турбулентного смешения носит ярко выраженный вихревой характер.

Введем Y_1 и Y_2 – расстояния от плоскости ХZ до верхней ОС и нижней OD границ области турбулентного смешения. Размеры плоскостей АО и ОВ бесконечны, то есть нет характерных постоянных параметров с размерностью длины. Тогда единственная возможность

$$Y_1 = x \operatorname{tg} \alpha_1, \quad Y_2 = x \operatorname{tg} \alpha_2,$$

то есть прямопропорциональная зависимость.

Углы α_1 и α_2 зависят только от величины обтекаемого угла и не зависят от скорости основного потока, из тех же соображений размерности. Теоретически они не вычисляются.

Для прямого угла, например, эксперимент дает значения $\alpha_1 = 5^\circ$, $\alpha_2 = 10^\circ$, которые получены на основании обработки эмпирических профилей скорости для сечения турбулентной струи, обработанных с помощью полуэмпирических теорий турбулентности.

При малых углах скорость основного потока намного больше дополнительного. При обтекании прямого угла скорость вдоль плоскости АО в 30 раз больше скорости в направлении ВО. Разница давлений при этом

$$P_1 - P_2 = 0.003\rho U_1^2,$$

где U_1 – скорость набегающего потока, P_1 – давление в основном, P_2 – в дополнительном потоках.

Если угол АОВ тупой, то при некотором его значении нижняя граница области смешения совпадает с плоскостью ОВ и будет наблюдаться явление отрыва.

Далее рассмотрим струю, выходящую из трубки в пространство, заполненное той же жидкостью (затопленная струя) (Рис. 4.4). Аналогично задаче по обтеканию угла

$$R(x) = x \operatorname{tg} \alpha. \tag{4.10}$$

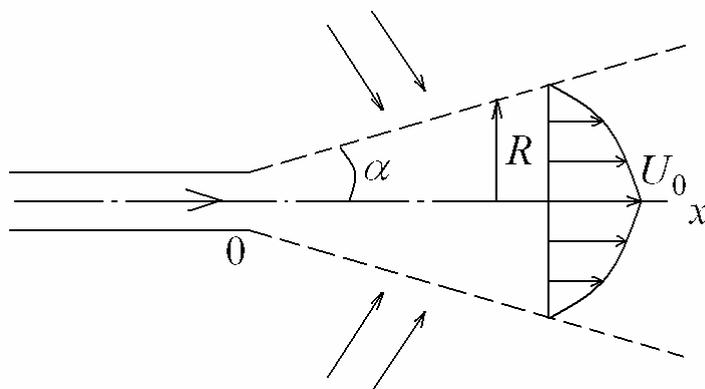


Рис. 4.4. Турбулентная струя, образующаяся при истечении жидкости из небольшого отверстия

Так как диаметр выходного отверстия мал по сравнению с областью струйного течения, то можно считать, что жидкость выходит из точечного источника, расположенного на выходе из трубки. Экспериментальное значение $2\alpha \approx 25^\circ$.

Распределение продольной скорости имеет вид

$$U_x(r, x) = U_0(x) f\left(\frac{r}{R(x)}\right),$$

где U_0 – скорость на оси, r – расстояние от оси струи. Функция $f = 0.5$ при $r/R = 0.4$, затем быстро убывает и на границе области смешения равна 0.01. Поперечная составляющая скорости (осредненная по времени, как и U_x) на границе струи равна $0.025U_0$ и направлена внутрь струи, чем обеспечивается поступление жидкости из окружающего пространства.

Полный поток импульса в струе через сферическую поверхность с центром в точке выхода струи остается постоянным в любом сечении струи. Плотность потока импульса $\sim \rho U_0^2$, площадь $\sim R^2$, полный поток импульса $\Pi \sim \rho U_0^2 R^2$. После подстановки (4.10) получим

$$U_0 \sim \sqrt{\frac{\Pi}{\rho}} \cdot \frac{1}{x}, \quad (4.11)$$

то есть скорость потока падает обратно пропорционально расстоянию от выхода.

Массовый расход жидкости через поперечное сечение струи $G_m \sim \rho U_0 R^2$, а с учетом (4.10), (4.11) имеем $G_m = \text{const} \cdot x$. На расстояниях порядка размеров отверстия $G_m \sim G_0$ (расход жидкости в трубке), тогда $\text{const} \sim G_0 / r_0$ и следовательно

$$G_m = \beta G_0 x / r_0,$$

где β – эмпирический коэффициент, зависящий от формы отверстия. Для круглого отверстия радиусом r_0 , $\beta \approx 1.5$. Расход жидкости при удалении от выхода струи увеличивается, что объясняется поступлением жидкости из окружающего пространства.

ЗАДАЧИ

4.1. Оценить толщину вязкого подслоя и скорость газа на его границе в трубе радиусом 0.01 м, если на участке длиной 1 м давление уменьшается на 370 Па, плотность газа 1.23 кг/м^3 , коэффициент кинематической вязкости $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Решение. При выводе логарифмического распределения скорости были использованы две константы, связанные соотношением

$$\ln \beta = \ln \alpha - \kappa \alpha,$$

где $\beta = 0.13$, $\kappa = 0.4$. Численное решение этого уравнения дает значение $\alpha = 0.14$. Следовательно, искомые величины находятся по следующим формулам

$$y_c = 0.14\nu / v_*, \quad U_c = 0.14v_*.$$

Эффективная скорость рассчитывается по формуле, полученной в разделе 4.3,

$$v_* = \sqrt{\frac{R\Delta P}{2\rho l}} = 1.5 \text{ м/с}.$$

Тогда толщина вязкого подслоя и скорость течения на его границе, соответственно, равны

$$y_c = 1.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \quad U_c = 0.21 \text{ м/с}.$$

4.2. Измерения показали, что скорость газа ($\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 1.23 \text{ кг/м}^3$) на оси трубы радиусом 0.01 м равна 15 м/с и на участке длиной 1.3 м статическое давление уменьшается на 140 Па. Вычислить коэффициент сопротивления.

Решение. Согласно степенному распределению средняя по сечению трубы скорость газа определяется по формуле

$$\langle U \rangle = \frac{2U_m}{R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} r dr = mU_m, \quad m = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

Средняя скорость не намного отличается от максимальной, поэтому для приближенной оценки числа Рейнольдса можно взять величину $\text{Re}_m = 2RU_m / \nu = 2 \cdot 10^4$. В этом случае $n = 6$, $\langle U \rangle = 0.79 U_m = 11.85 \text{ м/с}$.

Эффективная скорость v_* находится по той же формуле, что и в задаче 4.1 и равна 0.66 м/с. Коэффициент сопротивления вычисляется из соотношения

$$C = 8(v_* / \langle U \rangle)^2 = 0.025.$$

4.3. Расход газа ($\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\rho = 1.23$ кг/м³) в трубе радиусом 0.02 м, длиной 5 м равен 0.03 кг/с. Воспользовавшись степенным распределением и формулой Блазиуса, определить скорость газа на оси трубы и уменьшение статического давления.

Решение. Находим число Рейнольдса, исходя из соотношений

$$\langle U \rangle = \frac{G}{\rho \pi R^2}, \quad \text{Re} = \frac{2R \langle U \rangle}{\nu} = 51784.$$

В этом случае $n = 6$, $m = 0.79$

$$U_m = \langle U \rangle / 0.79 = 24.6 \text{ м/с.}$$

Коэффициент сопротивления определяем по формуле Блазиуса

$$C = 0.3164(\text{Re})^{-1/4} = 0.021.$$

Из соотношений, определяющих коэффициент сопротивления, приведенных в разделе 4.2, следует

$$\Delta P = \frac{\rho l C \langle U \rangle^2}{4R} = 609 \text{ Па.}$$

4.4. Определить толщину турбулентного пограничного слоя на расстоянии 0.1 м от переднего края пластины длиной 0.2 м и ее коэффициент сопротивления при обтекании потоком воздуха ($\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с), имеющего скорость 30 м/с.

Решение. Толщину пограничного слоя оцениваем по формуле, приведенной в разделе 4.3

$$\delta(x) = 0.37(\text{Re}_x)^{-1/5} x = 5.6 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Согласно определению локального коэффициента сопротивления (см. раздел 4.3) сила трения для единицы площади пластины на расстоянии x от ее начала определяется соотношением

$$\sigma_x = c_x \rho \bar{U}^2 / 2.$$

С учетом обеих сторон пластины, для единицы ее длины и ширины сила трения равна

$$F_f = \frac{2}{L_0} \int \sigma_x dx.$$

Коэффициент сопротивления всей пластины определяется соотношением

$$C = \frac{2F_f}{\rho \bar{U}^2} = \frac{2}{L_0} \int c_x dx.$$

Воспользовавшись формулой $C = 0.0576(\text{Re}_x)^{-1/2}$, после интегрирования получим

$$C = 0.144(\text{Re})^{-1/2}, \quad \text{Re} = 2\bar{U}L/\nu.$$

Для условий задачи вычисления дают значение $C = 0.0095$.

Список литературы

1. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 731 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг; пер. Г.А. Вольперт. – М.: Наука, 1974. – 711 с.
4. Акустика в задачах / под ред. С.Н. Гурбатова, О.В. Руденко – М.: Наука–ФИЗМАТЛИТ, 1996. – 336 с.
5. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика: В 2-х ч.: учебное руководство / Г.Н. Абрамович. – 5-е изд., перераб.и доп. – Москва: Наука, 1991. – 597с.
6. Ларионов В.М. Автоколебания газа в энергетических установках. Учебное пособие: курс лекций, решение задач. / В.М. Ларионов. – Казань, 2006. – 164 с.