УДК 539.374

В.Я. Молотников, А.А. Молотникова

Задача Чикала для материалов со структурным разупрочнением

1. Исходные соотношения. При нагружении элемента тела за предел упругости с конечной скоростью в теле еще до наступления текучести происходят [1,2] диффузионные процессы, которые обнаруживают себя в весьма разнообразных явлениях (щелчки, зуб текучести и др.). Указанные диффузионные процессы приводят к существенному изменению взаимного расположения облаков Коттрелла [1] по отношению к дислокациям и, следовательно, изменению прочностных характеристик материала (возникновение скольжений, появление и объединение микротрещин и т. п.).

Обозначим через T_1 промежуток времени от момента $(t_{\text{у}})$ достижения предела упругости до момента (t_0) наступления текучести. За время T_1 в материале произойдут диффузионные процессы, которые вызовут структурное разупрочнение. Изотропную составляющую структурного разупрочнения представим в виде

$$\Sigma = \int_{t_{\text{у}}}^{t_0} F\left[\tau_m(t)\right]dt\,, \tag{1}$$

где F – известная [3] функция максимального касательного напряжения τ_m.

Предположим также, что в результате структурной перестройки происходит разупрочнение материала в некотором направлении λ и равное по величине, но противоположного знака разупрочнение в противоположном направлении $(-\lambda)$. Такое разупрочнение назовем антиизотропным. В опытах на малоцикловую усталость подобное упрочнение (разупрочнение) обнаруживается в виде эффекта Баушингера.

Составляющую антиизотропного разупрочнения будем считать пропорциональной следующей величине:

$$\Sigma_{\nu\lambda} = \frac{\gamma_{\nu\lambda}}{\gamma_m}\Sigma\,, \tag{2}$$

где Σ определено формулой (1), а γ_m и $\gamma_{\nu\lambda}$ – соответственно максимальный пластический сдвиг и компонента пластической деформации в осях ν,λ.

Деформацию при достижении предела текучести будем представлять как быстрый переход от одного состояния микроструктуры к другому (устойчивому) в окрестности наиболее напряженной точки тела [4]. За пределом текучести неупругая деформация происходит путем локальных скольжений по множеству (R) систем скольжения, состоящего из плоскостей с нормалями $n(\alpha,\beta)$, и направлений $l(\omega)$ в каждой такой плоскости. Множество (R) будем называть также областью скольжений. Представим [3] сопротивление пластическому сдвигу в виде некоторого оператора $(S_{\nu\lambda})$ от интенсивности скольжений (φ_{nl}):

$$S_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = \phi + (a\varphi_{\nu\lambda} + c\gamma_{\nu\lambda})\Psi - A\Sigma_{\nu\lambda} - B\Sigma\,, \tag{3}$$

где ν – фиксированная нормаль к некоторой плоскости внутри области скольжений, λ – направление скольжения в этой плоскости; $\phi = \phi(\tau_0, \tau_m)$, $\Psi = \Psi(\tau_0)$ – некоторые функции октаэдрического (τ_0) и максимального (τ_m) касательных напряжений, $a, c, A, B \sim \mathrm{const}$.

Внутри области скольжений сопротивление сдвигу равно соответствующей компоненте касательного напряжения:

$$S_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = \tau_{\nu\lambda} \quad \text{при } (\nu,\lambda)\in R\,, \tag{4}$$

вне этой области

$$S_{\nu\lambda}\varphi_{nl} > \tau_{\nu\lambda}\,, \quad \text{при} \quad (\nu,\lambda)\notin R \tag{5}$$

а на границе (Γ) области скольжений интенсивность скольжений (φ_{nl}) должна оставаться неизменной во времени (t), т. е.

$$\left.\frac{\partial \varphi_{nl}}{\partial t}\right|_{\Gamma} = 0 . \quad (6)$$

2. Постановка задачи. В исследованиях поведения материалов при сложном нагружении за пределом текучести особое место занимает задача определения связи между приращениями напряжений и деформаций в окрестности излома траектории нагружения (угловой точки). Указанная связь является своего рода тестом на применимость определяющих соотношений того или иного варианта теории пластичности при непропорциональных нагружениях [5]. Она необходима также для исследования некоторых задач потери устойчивости элементов конструкций в области неупругих деформаций.

Простейший вид угловой точки представляет так называемое ортогональное нагружение, частным случаем которого является кручение тонкостенной трубки при постоянном значении предварительно приложенного растягивающего напряжения, превосходящего предел текучести материала. Здесь исследователя интересует [6] величина мгновенного модуля сдвига $G_i = \Delta\tau / \Delta\gamma$, где $\Delta\tau$ и $\Delta\gamma$ – приращения касательного напряжения τ и деформации сдвига γ в момент, непосредственно следующий за угловой точкой.

3. Определение интенсивности дополнительных скольжений. Пусть к элементу, растянутому за предел текучести, приложено бесконечно малое касательное напряжение $\Delta\tau_{xz}$ при постоянном значении растягивающего напряжения σ_z, $(\Delta\sigma_z = 0)$. Определим составляющую пластической деформации $\Delta\gamma_{xz}$, вызванную действием компоненты $\Delta\tau_{xz}$.

Приложение напряжения $\Delta\tau_{xz}$ при постоянном σ_z вызовет приращение касательного напряжения $\Delta\tau_{\nu\lambda}$ в осях ν и λ, которое определяется известным образом:

$$\Delta\tau_{\nu\lambda} = (\lambda_x \nu_z + \lambda_z \nu_x)\Delta\tau_{xz}. \tag{7}$$

При этом октаэдрическое (τ_0) и максимальное (τ_m) касательное напряжение не получат приращения (с точностью до бесконечно малых второго порядка): $\Delta\tau_0 = \Delta\tau_m = 0$. С учетом последнего, приращение сопротивления сдвигу (3) в момент излома траектории нагружения будет:

$$\Delta S_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = (a\Delta\varphi_{\nu\lambda} + c\Delta\gamma_{\nu\lambda})\Psi - A\Sigma\left(\frac{\Delta\gamma_{\nu\lambda}}{\gamma_m} - \frac{\gamma_{\nu\lambda}\Delta\varepsilon_z}{\gamma_m^2}\right), \tag{8}$$

Обозначая через $\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, \Delta\varepsilon_z, \Delta\gamma_{xz}$, $(\Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yz} = 0)$ приращения компонент пластической деформации, найдем:

$$\Delta\gamma_{\nu\lambda} = 2(\lambda_x \nu_x \Delta\varepsilon_x + \lambda_y \nu_y \Delta\varepsilon_y + \lambda_z \nu_z \Delta\varepsilon_z) + (\lambda_x \nu_z + \lambda_z \nu_x)\Delta\gamma_{xz}. \tag{9}$$

В момент, предшествующий излому траектории нагружения, скольжения имеют место в плоскостях, задаваемых известным [7] углом v, и (в каждой из этих плоскостей) в направлениях, определяемых углом ω_0, причем [7] эти углы удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &-v^* \le v \le v^*, && \cos 2v^* = \lambda_0 / \lambda_1; \\ &-\Omega \le \omega_0 \le \Omega, && \cos 2v \cos\Omega = \lambda_0 / \lambda_1, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\phi - B\Sigma}{\Psi}, \quad \lambda_1 = \frac{\sigma_z + 2A\Sigma}{2\Psi} - \frac{3}{2}c\varepsilon_z.$$

После излома траектории нагружения дополнительные скольжения не могут произойти вне тех плоскостей и направлений, в которых имели место пластические сдвиги в момент, предшествующий излому траектории нагружения. Это утверждение вытекает из того, что вне этих плоскостей и направлений сопротивление сдвигу больше соответствующей компоненты касательного напряжения. На основании равенства (4) дополнительные пластические сдвиги произойдут в той части области (5), где

$$\Delta S_{\nu\lambda}\varphi_{nl} = \Delta\tau_{\nu\lambda}\,. \tag{11}$$

Из равенства (11) при операторе (3) найдем интенсивность дополнительных скольжений:

$$\Delta\varphi_{\nu\lambda} = \frac{\Delta\tau_{\nu\lambda}}{a\Psi} - \left(\frac{c}{a} - \frac{A\Sigma}{a\gamma_m\Psi}\right)\Delta\gamma_{\nu\lambda} - \frac{2A\Sigma}{a\gamma_m\Psi}\nu_z\lambda_z\Delta\varepsilon_z\,. \tag{12}$$

Граница области дополнительных скольжений находится из условия равенства нулю функции (12) на этой границе, т.е.

$$\Delta\varphi_{\nu\lambda} = 0\,. \tag{13}$$

При известном приращении интенсивности скольжений (12) приращения компонент пластической деформации определяются по формулам:

$$\begin{aligned} &\Delta\gamma_{ij} = \iint\limits_{\Omega'} d\Omega \int\limits_{\Omega_1(\alpha_0,\beta_0)}^{\Omega_2(\alpha_0,\beta_0)} \Delta\varphi_{nl}\left(n_i l_j + n_j l_i\right)d\omega_0\,, \qquad (i, j = x, y, z), \\ &\Delta\varepsilon_x = \frac{1}{2}\Delta\gamma_{xx}\,, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\Omega', \Omega_1, \Omega_2$ – границы области дополнительных скольжений, определяемые из условия (13).

4. Вычисление приращений пластических деформаций и модуля догрузки. Положим, что $c\gamma_m << \tau_m$, $A\Sigma << \tau_m$ и квадратами отношений $c\gamma_m/\tau_m$, $A\Sigma/\tau_m$ можно пренебречь. При этих условиях значения приращений компонент пластической деформации по формулам (12)–(14) можно вычислить в замкнутом виде. В самом деле, поскольку в выражении (12) компоненты $\Delta\gamma_{\nu\lambda}$ и $\Delta\varepsilon_z$ имеют множители c и $A\Sigma$, то $\Delta\gamma_{\nu\lambda}$ и $\Delta\varepsilon_z$ можно заменить их значениями при $c = A = 0$. Эти значения вычислены в работе [8]. Выполнив их подстановку в выражения (12) и (9), получим новое значение $\Delta\gamma_{\nu\lambda}$. Далее из условия (13) найдутся границы области дополнительных скольжений, после чего по формулам (14) определим новое значение $\Delta\gamma_{\nu\lambda}$. Опуская промежуточные выкладки, приведем только окончательный результат:

$$\Delta\gamma_{xz} = \frac{1}{a\Psi}\left[\eta_{xz} + \left(\frac{2c}{a} - \frac{A\Sigma}{a\gamma_m\Psi}\right)\left(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \frac{\eta_{xz}^2}{2}\right)\right]\Delta\tau_{xz}, \tag{15}$$

где обозначено:

$$\eta_{xz} = \frac{2\sqrt{2}\pi\delta}{5\cos v^*}\left[\Pi(e_1, e_2) - \left(1 - 2\cos^4 v^*\right)K(e_2) - 2\cos^2 v^* E(e_2)\right];$$

$$\eta_x = \frac{1}{15}\left[\frac{J\left(5 + 3\delta - 10\delta^2 - 4\delta^3\right)}{(1+\delta)\operatorname{tg} v^*}K + \frac{2\operatorname{tg} v^*}{J}\Pi_1 + \frac{15\delta^2 - 3}{J\operatorname{tg} v^*}\Pi_2 - 5JE(1+\delta)\operatorname{tg} v^*\right];$$

$$\eta_y = \frac{1}{15}\left[\frac{2\delta J\left(3 - \delta^2\right)}{(1+\delta)\operatorname{tg} v^*}K - \frac{4\operatorname{tg} v^*}{J}\Pi_1 - \frac{4}{J\operatorname{tg} v^*}\Pi_2\right]; \tag{16}$$

$$K(e_2) = \int_0^{\pi/2}\left(2 - e_2^2\sin^2 x\right)^{-1/2}dx; \quad E(e_2) = \int_0^{\pi/2}\left(1 - e_2^2\sin^2 x\right)dx;$$

$$\Pi(e_1, e_2) = \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\left(1 + e_1\sin^2 x\right)\left(1 - e_2^2\sin^2 x\right)^{1/2}}; \quad \delta = \cos 2v^*;$$

$$J = \sqrt{2\delta}; \quad e_1 = -\sin^2 v^*; \quad e_2 = \operatorname{tg} v^*,$$

K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $1/\sqrt{2}$, а Π_1, Π_2– эллиптические интегралы третьего рода, определяемые формулами [9]:

$$\Pi_1 = \int_0^1\left(1 - \frac{\cos^2 v^*}{\delta}y^2\right)^{-1}\left(1 - y^2\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2}y^2\right)^{-1/2}dy,$$

$$\Pi_2 = \int_0^1\left(1 + \frac{\sin^2 v^*}{\delta}x^2\right)^{-1}\left(1 - x^2\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^{-1/2}dx.$$

Используя результаты работ [3,7], связь между напряжением σ_z и пластической деформацией ε_z в момент, предшествующий излому траектории нагружения, при представлении оператора сопротивления сдвигу в форме (3) можно записать в виде

$$\frac{\sigma_z}{\varepsilon_z\Psi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{(a + 2c\eta_{xz})}{(1 + 2A\Sigma/\sigma_z)\eta_{xz}}.$$

Из этой зависимости и формулы (15) следует:

$$\Delta\gamma_{xz} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z}\cdot\frac{\left[1 - D\left(v^*\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{A\Sigma}{a\Psi\gamma_m}\right)\right]\Delta\tau_{xz}}{1 + \frac{2A\Sigma}{\sigma_z}}, \tag{17}$$

где

$$D\left(v^*\right) = 3\eta_{xz} + 2\frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{\eta_{xz}}.$$

Запишем компоненты пластической деформации $\Delta\gamma_{xz}$ и $\Delta\varepsilon_z$ в виде разности полной и упругой составляющих деформации. Приписывая компонентам полной деформации верхние индексы «п», а упругим деформациям индексы «у», приводим формулу (17) к виду:

$$\frac{\Delta\gamma_{xz}^{\text{п}}}{\Delta\tau_{xz}} - \frac{\Delta\gamma_{xz}^{\text{у}}}{\Delta\tau_{xz}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon_z^{\text{п}}}{\sigma_z} - \frac{\varepsilon_z^{\text{у}}}{\sigma_z}\right)\cdot\frac{\left[1 - D\left(v^*\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{A\Sigma}{a\Psi\gamma_m}\right)\right]}{1 + 1A\Sigma/\sigma_z},$$

или

$$\frac{1}{G_i} - \frac{1}{G_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\left[1 - D\left(v^*\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{A\Sigma}{a\Psi\gamma_m}\right)\right]\left(1 + \frac{2A\Sigma}{\sigma_z}\right)^{-1},$$

где G_i – модуль догрузки, G_0 – модуль сдвига, E – модуль Юнга, E_s – секущий модуль при растяжении. Из последней формулы находим:

$$G_i = \frac{G_0}{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E}\right)\left[1 - D\left(v^*\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{A\Sigma}{a\Psi\gamma_m}\right)\right]\left(1 + \frac{2A\Sigma}{\sigma_z}\right)^{-1}}. \tag{18}$$

5. Анализ результатов и выводы. Формула (18) выражает искомый модуль сдвига при ортогональной догрузке. При $c = A = 0$ этот результат совпадает с формулой Чикала [10], полученной на основе модели Батдорфа и Будянского [11].

Известно [6,12,13], что формула Чикала дает значительно меньшее значение модуля ортогональной догрузки, чем наблюдаемое в экспериментах. Это послужило одной из причин смены этапа надежд, связанных с учётом физического механизма явления пластичности в концепции скольжений, к периоду разочарований и “пессимистических выводов в отношении возможного прогресса теории пластичности”, [12, с. 104].

Однако анализ формулы (18) показывает, что введение в сопротивление сдвигу слагаемого $c\gamma_{\nu\lambda}$ и составляющих структурного разупрочнения увеличивают значение модуля ортогональной догрузки, если только выполняется условие

$$D\left(v^{*}\right)\left[\frac{c}{a}+\left(3a\Psi\left(\frac{1}{E_{s}}-\frac{1}{E}\right)\right)^{-1}\right]<1\,. \tag{19}$$

Таким образом, путем соответствующего задания коэффициентов c, A и B в принципе можно в необходимых пределах регулировать величину модуля догрузки, чем устраняется указанный недостаток теории Батдорфа и Будянского и реабилитируется концепция скольжения в теории пластичности (по крайней мере для материалов со структурным разупрочнением).

Если же из опытов известно значение модуля ортогональной догрузки, то результаты (18)–(19) могут быть использованы для определения параметров модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Екобори Т.* Физика и механика разрушения и прочности твердых тел. М., 1971. 264 с.
2. *Слядников Е.Е.* Спонтанное возникновение дислокаций в кристалле под воздействием высоких напряжений // Физ. мезомеханика. 1999. Т. 2, № 5. С. 57–69.
3. *Леонов М.Я., Молотников В.Я., Рычков Б.А.* Некоторые обобщения концепции скольжения в теории пластичности // Ползучесть твердого тела. Фрунзе, 1974. С. 12–35.
4. *Молотников В.Я., Молотникова А.А.* Развитие неупругой деформации при стандартных испытаниях стальных образцов // V Поляховские чтения: тезисы докл. междунар. конф. по механике. Санкт-Петербург, 3–6 февраля 2009 г. СПб., 2009. С. 177.
5. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. 2. М., 2002. 448 с.
6. *Иосимару Иосимура*. Замечания к теории скольжения Батдорфа и Будянского// Механика. Периодич. сб. перев. иностр. статей. М., 1960. № 2 (60). С. 109–116.
7. *Леонов М.Я., Молотников В.Я., Рычков Б.А.* Растяжение и сжатие пластических стержней // Развитие концепции скольжения в теории пластичности. Фрунзе, 1974. С. 28–47.
8. *Русинко К.Н.* Обобщение формулы Чикала // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 6. С. 37–44.
9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М., 1971. 1108 с.
10. *Cicala P*. On the plastic deformation. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis. e. nature. Vol. 8, 1950, p. 583–586.

11. *Батдорф С., Будянский Б*. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика. Периодич. сб. перев. иностр. статей. № 1 (71). М., 1962. С. 135–155.

12. *Работнов Ю.Н*. Ползучесть элементов конструкций. М., 1966. 752 с.

13. *Свешникова В.А*. О пластическом деформировании пластических металлов // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 1. С. 155–162.