

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.865.8

© 2007 г. Кузьмин Д.В.

МЕТОД СВЯЗНЫХ ГРАФОВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ ЗВЕНЬЕВ

На основе метода связанных графов получены уравнения динамики голономной системы в обобщенных координатах, массы звеньев которой имеют распределенный характер. Показано, что идентичные уравнения следуют из уравнений динамики данной системы в форме Лагранжа. Полученные уравнения обладают структурой, аналогичной структуре уравнений динамики голономной системы с сосредоточенными массами. Их можно использовать в качестве математической основы алгоритмов формирования уравнений динамики многосвязных механизмов на ЦЭВМ.

Математическое моделирование динамики широко используется в решении задач проектирования, модернизации и управления движением машин, исполнительная часть которых включает многосвязные пространственные механизмы. Наиболее часто требуется математическая модель в виде дифференциальных уравнений динамики в обобщенных координатах, в качестве которых выступают управляемые перемещения звеньев механизмов, электрические заряды, протекающие в силовых обмотках исполнительных электродвигателей, объемы рабочей жидкости в гидроприводах и т.п.

Известно, что формирование уравнений динамики многомерных систем, состоящих из физически разнородных функциональных частей, представляет собой сложную задачу, для успешного решения которой необходимо эффективное использование возможностей современных средств автоматизации вычислений. Этим обусловлено развитие методов динамики, наиболее перспективным из которых является метод связанных графов, основанный на системном подходе и фундаментальных законах сохранения. Теоретические основы метода связанных графов даны в работе [1], где получено общее уравнение динамики голономной системы с сосредоточенными массами звеньев. В работе [2] метод связанных графов применен в случае системы с линейными неголономными связями. До настоящего времени метод связанных графов применялся только к системам с сосредоточенными массами звеньев, так как учет распределенного характера массы путем представления звена в виде системы конечного числа точечных масс не всегда целесообразен. Это обстоятельство существенно ограничивало круг задач, в которых использование метода связанных графов обосновано.

В настоящей статье метод связанных графов применяется к системе твердых тел, образующих между собой вращательные и поступательные кинематические пары. Влияние распределенных масс звеньев на динамику системы учитывается с помощью тензоров инерции, элементы которых являются интегральными массово-геометрическими характеристиками.

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n звеньев, образующих между собой вращательные и поступательные кинематические пары. Каждое звено представляет собой твердое тело, динамические свойства которого характеризуются массой m_i и тензором инерции

$$J_i = \begin{bmatrix} J_x^i & -J_{xy}^i & -J_{xz}^i \\ -J_{xy}^i & J_y^i & -J_{yz}^i \\ -J_{xz}^i & -J_{yz}^i & J_z^i \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $J_x^i = \int_{V_i} (y^2 + z^2) dm_i$, $J_y^i = \int_{V_i} (x^2 + z^2) dm_i$, $J_z^i = \int_{V_i} (y^2 + x^2) dm_i$ – осевые; $J_{xy}^i = \int_{V_i} xy dm_i$,

$J_{xz}^i = \int_{V_i} xz dm_i$, $J_{yz}^i = \int_{V_i} yz dm_i$ – центробежные моменты инерции; V_i – объем звена

($i = 1, 2, \dots, n$). За обобщенные координаты q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) примем независимые вращательные и поступательные перемещения звеньев в кинематических парах. Пусть заданы $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j)$ – радиус-векторы центров масс, $A_i = [a_{\nu\mu}^i(q_k)]$ – матрицы поворота звеньев относительно неподвижной системы координат, $\nu, \mu = 1, 2, 3$, q_k – угловые координаты ($k = 1, 2, \dots, s$, $s \leq m$). Заданы также главные векторы \mathbf{R}_i и главные моменты \mathbf{M}_i активных сил, действующих на звенья системы. Требуется получить дифференциальные уравнения динамики системы $P_j(t) = \Phi_j(\ddot{q}_j, \dot{q}_j, q_j) - Q_j(\dot{q}_j, q_j, t)$ ($j = 1, 2, \dots, m$), где P_j – управляющие силы или моменты, действующие по обобщенным координатам; Φ_j – силы инерции; Q_j – активные силы, приведенные к обобщенным координатам.

Связный граф и уравнения динамики системы с распределенными массами звеньев. Кинематическое состояние звена в неподвижной системе отсчета характеризуется векторами линейной скорости центра масс $\dot{\mathbf{r}}_i$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_i$. Так как звенья образуют кинематические пары, то эти векторы могут принимать лишь те величины и направления, которые допускаются связями в кинематических парах. Соответственно, связный граф рассматриваемой системы в обобщенной векторной форме будет иметь вид, показанный на рис. 1: $\mathbf{1}$ – узлы, где суммируются усилия; треугольник – источник усилия; круг – функциональный преобразователь; эллипс – инерционный накопитель энергии; P_{π} – вектор управляющих сил; P_{ν} – вектор управляющих моментов; \dot{q}_{π} – вектор линейных обобщенных скоростей; \dot{q}_{ν} – вектор угловых обобщенных скоростей. Видно, что в формировании скоростей $\dot{\mathbf{r}}_i$ участвуют скорости линейных и угловых обобщенных координат, тогда как в формировании скоростей $\boldsymbol{\omega}_i$ участвуют только угловые обобщенные скорости.

Получим уравнения, описывающие функциональные преобразователи угловых обобщенных скоростей \dot{q}_k ($k = 1, 2, \dots, s$) в угловые скорости звеньев $\boldsymbol{\omega}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Известно, что вектор угловой скорости звена $\boldsymbol{\omega}_i = [\omega_x^i \ \omega_y^i \ \omega_z^i]^T$ определяется матрицей [3]

$$\boldsymbol{\Omega}_i = A_i A_i^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^i & \omega_y^i \\ \omega_z^i & 0 & -\omega_x^i \\ -\omega_y^i & \omega_x^i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

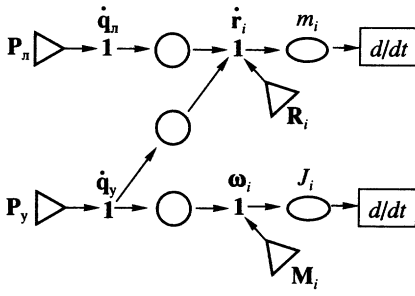


Рис. 1

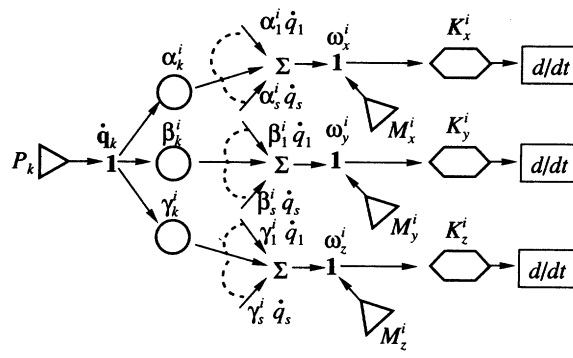


Рис. 2

Так как матрицы A_i ортогональные, то $A_i^{-1} = A_i^T$ и в соответствии с (2) проекции угловых скоростей звеньев на оси неподвижной системы координат будут иметь вид

$$\begin{aligned} \omega_x^i &= \dot{a}_{31}^i a_{21}^i + \dot{a}_{32}^i a_{22}^i + \dot{a}_{33}^i a_{23}^i, & \omega_y^i &= -(\dot{a}_{31}^i a_{11}^i + \dot{a}_{32}^i a_{12}^i + \dot{a}_{33}^i a_{13}^i), \\ \omega_z^i &= \dot{a}_{21}^i a_{11}^i + \dot{a}_{22}^i a_{12}^i + \dot{a}_{23}^i a_{13}^i. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что $\dot{a}_{\nu\mu}^i = \sum_{k=1}^s \frac{\partial a_{\nu\mu}^i}{\partial q_k} \dot{q}_k$, из (3) получим

$$\omega_x^i = \sum_{k=1}^s \alpha_k^i \dot{q}_k, \quad \omega_y^i = \sum_{k=1}^s \beta_k^i \dot{q}_k, \quad \omega_z^i = \sum_{k=1}^s \gamma_k^i \dot{q}_k, \quad (4)$$

где $\alpha_k^i = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial a_{3\mu}^i}{\partial q_k} a_{2\mu}^i$, $\beta_k^i = -\sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial a_{3\mu}^i}{\partial q_k} a_{1\mu}^i$, $\gamma_k^i = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial a_{2\mu}^i}{\partial q_k} a_{1\mu}^i$ – функциональные преобразователи.

Равенства (4) дают структуру участка связного графа системы, которая отображает динамику вращения звеньев вокруг их центров масс (рис. 2). Шестиугольниками на данном графе обозначены проекции кинетических моментов звеньев на оси неподвижной системы координат. Применяя к узлам \dot{q}_k закон сохранения $\sum_i e_i = 0$ (e_i – усилия, сходящиеся в узле), получим уравнения, описывающие динамику вращательных движений звеньев в векторной форме

$$P_k = \sum_{i=1}^n \rho_k^i (\mathbf{K}_i - \mathbf{M}_i), \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

где $\rho_k^i = [\alpha_k^i \ \beta_k^i \ \gamma_k^i]^T$, $\mathbf{K}_i = [\dot{K}_x^i \ \dot{K}_y^i \ \dot{K}_z^i]^T$; $\mathbf{K}_i = J_i \omega_i$ – кинетические моменты звеньев относительно их центров масс; P_k – составляющие приводных моментов, которые обеспе-

чивают вращение звеньев относительно их центров масс. Векторы \mathbf{K}_i вычисляются по

$$\text{формулам } \mathbf{K}_i = J_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (J_i \boldsymbol{\omega}_i), \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x^i & \dot{\omega}_y^i & \dot{\omega}_z^i \end{bmatrix}^T,$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x^i &= \sum_{k=1}^s \alpha_k^i \dot{q}_k + \sum_{l,k}^s \frac{\partial \alpha_k^i}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k, & \dot{\omega}_y^i &= \sum_{k=1}^s \beta_k^i \dot{q}_k + \sum_{l,k}^s \frac{\partial \beta_k^i}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k, \\ \dot{\omega}_z^i &= \sum_{k=1}^s \gamma_k^i \dot{q}_k + \sum_{l,k}^s \frac{\partial \gamma_k^i}{\partial q_l} \dot{q}_l \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения динамики рассматриваемой системы с учетом динамики поступательного движения звеньев будут иметь вид

$$P_j(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{R}_i) + \boldsymbol{\rho}_j^i (\mathbf{K}_i - \mathbf{M}_i) \right], \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Если q_j – линейное перемещение, то матрицы поворота A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не будут зависеть от q_j , $\boldsymbol{\rho}_j^i = 0$ и слагаемое (5) в уравнениях (6) будет равно нулю. С точки зрения механики это означает, что инерция вращений звеньев относительно их центров масс и главные моменты активных сил \mathbf{M}_i не оказывают влияния на динамику приводов, управляющих движением в поступательных кинематических парах. Равенство нулю (5) будет иметь место и в том случае, когда $J_i = 0$, $\mathbf{M}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), что соответствует модели механизма с точечными массами звеньев.

Покажем, что уравнения (5) следуют из уравнений динамики вращательных движений звеньев в форме Лагранжа. Кинетическая энергия вращения звена относительно его центра масс $T_i = 0,5 \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{K}_i = 0,5 (\omega_x^i K_x^i + \omega_y^i K_y^i + \omega_z^i K_z^i)$ с учетом (4) приводится к виду

$$T_i = 0,5 \sum_{k=1}^s (\alpha_k^i K_x^i + \beta_k^i K_y^i + \gamma_k^i K_z^i) \dot{q}_k = 0,5 \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\rho}_k^i \mathbf{K}_i \dot{q}_k. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по \dot{q}_k , получим $\partial T_i / \partial \dot{q}_k = 0,5 \left(\boldsymbol{\rho}_k^i \mathbf{K}_i + (\partial \mathbf{K}_i / \partial \dot{q}_k) \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\rho}_k^i \dot{q}_k \right)$. Так

как $\partial \mathbf{K}_i / \partial \dot{q}_k = J_i (\partial \boldsymbol{\omega}_i / \partial \dot{q}_k) = J_i \boldsymbol{\rho}_k^i$ и $\sum_{k=1}^s \boldsymbol{\rho}_k^i \dot{q}_k = \boldsymbol{\omega}_i$, то $(\partial \mathbf{K}_i / \partial \dot{q}_k) \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\rho}_k^i \dot{q}_k = (J_i \boldsymbol{\rho}_k^i) \boldsymbol{\omega}_i$. Матрица J_i – симметрическая ($J_i^T = J_i$), следовательно $(J_i \boldsymbol{\rho}_k^i) \boldsymbol{\omega}_i = (J_i \boldsymbol{\omega}_i) \boldsymbol{\rho}_k^i = \mathbf{K}_i \boldsymbol{\rho}_k^i$ и $\partial T_i / \partial \dot{q}_k = \boldsymbol{\rho}_k^i \mathbf{K}_i$. Производная по времени

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k} \right) = \boldsymbol{\rho}_k^i \dot{\mathbf{K}}_i + \dot{\boldsymbol{\rho}}_k^i \mathbf{K}_i. \quad (8)$$

Частная производная (7) по q_k

$$\partial T_i / \partial q_k = 0,5 \left[\sum_{k=1}^s (\partial \boldsymbol{\rho}_k^i / \partial q_k) \dot{q}_k \mathbf{K}_i + \sum_{k=1}^s \boldsymbol{\rho}_k^i \dot{q}_k (\partial \mathbf{K}_i / \partial q_k) \right]$$

С учетом $\sum_{k=1}^s (\partial \rho_k^i / \partial q_k) \dot{q}_k = \dot{\rho}_k^i$ и $\partial \mathbf{K}_i / \partial q_k = J_i (\partial \boldsymbol{\omega}_i / \partial q_k) = J_i \dot{\rho}_k^i$ получим

$$\partial T_i / \partial q_k = \dot{\rho}_k^i \mathbf{K}_i. \quad (9)$$

Элементарная работа активных сил на вращательном перемещении звена $dA_i = \mathbf{M}_i \boldsymbol{\omega}_i dt = \mathbf{M}_i \sum_{k=1}^s \rho_k^i dq_k$. Отсюда

$$\partial A_i / \partial q_k = \rho_k^i \mathbf{M}_i. \quad (10)$$

Уравнения динамики в форме Лагранжа

$$P_k + \frac{\partial A}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (11)$$

где $A = \sum_{i=1}^n A_i$, $T = \sum_{i=1}^n T_i$. Просуммировав (8)–(10) по индексу i и подставив результаты суммирования в (11), получим уравнения, идентичные (5)

$$P_k = \sum_{i=1}^n \rho_k^i (\dot{\mathbf{K}}_i - \mathbf{M}_i) + \sum_{i=1}^n \dot{\rho}_k^i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i) = \sum_{i=1}^n \rho_k^i (\dot{\mathbf{K}}_i - \mathbf{M}_i), \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

Выводы. Метод связанных графов можно применять для исследования динамики систем, инерционные свойства которых описываются тензорными характеристиками. Уравнения динамики вращательных движений звеньев в обобщенных координатах, полученные методом связанных графов, имеют структуру, аналогичную структуре уравнений динамики системы с сосредоточенными массами.

Уравнения (6) позволяют организовать поэтапное исследование динамики проектируемой системы. На первом этапе система представляется в виде модели с сосредоточенными массами ($J_i = 0$, $\mathbf{M}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$). По результатам исследования ее динамики можно принять основные проективные решения.

После конструкторской проработки узлов и модулей, математическую модель можно уточнить, добавив в уравнения, полученные на первом этапе, слагаемые, которые учитывают динамическое влияние распределенных масс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутько П.Д., Кузьмин Д.В. Метод связанных графов в задачах математического описания динамики голономных механических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 6. С. 63–68.
2. Кузьмин Д.В. Метод связанных графов в задачах математического описания динамики неголономных систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 78–81.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.