

## АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.865.8

© 2006 г. Кузьмин Д.В.

АЛГОРИТМЫ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯТОРА  
В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

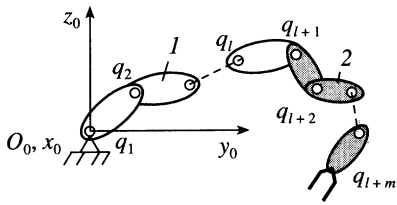
Предложен способ снижения вычислительных затрат при формировании динамической модели манипулятора, разработанный на основе уравнений динамики механической системы в неинерциальной системе отсчета. Получены уравнения динамики манипулятора с геометрическими связями, позволяющие рационально использовать возможности аппаратных и программных средств автоматизации вычислений.

В настоящее время задача математического описания динамики манипуляторов решается с применением пакетов программ, осуществляющих математические операции в символической форме. Это позволяет в автоматизированном режиме получать замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику манипулятора в системе координат, связанной с его основанием

$$A(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) + c(q) = p(t), \quad (1)$$

где  $q = q(t)$  – вектор обобщенных координат манипулятора,  $A(q)$  – матрица инерции,  $b(q, \dot{q})$  – вектор центробежных и кориолисовых компонент,  $c(q)$  – вектор внешней нагрузки,  $p(t)$  – вектор управляющих сил и моментов.

Известно, что вычислительные затраты при формировании уравнений динамики манипулятора, представляющего собой разомкнутую кинематическую цепь без ветвления, характеризуются полиномом четвертой степени от числа степеней свободы цепи. Разработка алгоритмов, требующих меньшего числа элементарных математических операций, является актуальной задачей. Программная реализация таких алгоритмов позволит более рационально использовать ресурсы ЦЭВМ и уменьшит вероятность ошибки при составлении уравнений динамики манипуляторов с кинематической избыточностью. Снижение числа операций сложения и умножения в алгоритмах динамики манипуляторов достигалось исключением операции умножения на ноль [1], а также за счет использования рекуррентных вычислительных процедур [2]. Первый способ не приводит к уменьшению степени полинома, характеризующего вычислительные затраты. Применение рекуррентных уравнений понижает степень полинома до третьей, но встречает трудности в случаях манипуляторов с замкнутыми кинематическими контурами. Анализ показывает, что наибольшие вычислительные затраты имеют место при формировании компонент уравнений, связанных с ускорениями звеньев. Это объясняется структурой аналитических выражений для ускорений



$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j + \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_m)$  – радиус-вектор точки звена в системе отсчета, связанной с неподвижным основанием манипулятора;  $q_j(t)$  – обобщенные координаты.

Структуру (2) нельзя изменить, поэтому существующие алгоритмы динамики, основанные на вычислении скоростей и ускорений в системе отсчета, связанной с основанием, используют примерно равное количество элементарных математических операций. Существенного снижения вычислительных затрат можно достичь в тех случаях, когда заранее известны уравнения динамики некоторой части манипулятора: например, при добавлении модуля к роботу агрегатно-модульного типа или при установке манипулятора на подвижное основание. В настоящей статье разрабатываются алгоритмы, использующие уравнения динамики участков кинематической цепи как основу для формирования динамической модели манипулятора, составленного из этих участков.

**Уравнения динамики манипулятора в неинерциальной системе отсчета.** Рассмотрим манипулятор, динамика которого относительно неподвижного основания описывается уравнением (1). Массы звеньев манипулятора будем полагать сосредоточенными в их центрах масс. Если сообщить основанию ускорение, то уравнение динамики манипулятора представляется в виде [3]

$$m_i \mathbf{w}_{ir} = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i + \mathbf{J}_{ie} + \mathbf{J}_{ic}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $m_i$  – массы;  $\mathbf{w}_{ir} = d^2 \mathbf{r}_{ir} / dt^2$  – относительные ускорения точек в неподвижной системе отсчета;  $\mathbf{F}_i$  – равнодействующие активных сил;  $\mathbf{R}_i$  – равнодействующие реакций связей, приложенных к точкам звеньев;  $\mathbf{J}_{ie}$  – силы инерции переносного движения;  $\mathbf{J}_{ic}$  – кориолисовы силы инерции.

Пусть положение основания манипулятора в неподвижной системе координат задается матрицей перехода  $A_0(q_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, l$ , определяемой геометрическими связями. Это соответствует случаю, когда основание манипулятора ускоряется с помощью механизма (рисунок). Манипулятор на подвижном основании: 1 – ускоряющий механизм, 2 – манипулятор. Тогда радиус-векторы центров масс звеньев в неподвижной системе координат

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_i(q_j) \\ 1 \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i^l(q_k) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$j = 1, 2, \dots, m + l, k = l + 1, l + 2, \dots, l + m$ . Верхний индекс обозначает номер системы координат, в которой задан вектор.

При условии идеальности связей из (3) следует общее уравнение динамики в форме Даламбера – Лагранжа

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i + \mathbf{J}_{ie} + \mathbf{J}_{ic}) \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_{ir} \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (5)$$

где  $\delta \mathbf{r}_i$  – виртуальные перемещения центров масс звеньев.

Так как  $\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{m+l} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ ,  $\delta q_j$  – независимые вариации обобщенных координат, то (5)

равносильно уравнениям

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} (\mathbf{F}_i + \mathbf{J}_{ie} + \mathbf{J}_{ic}) - \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \mathbf{w}_{ir} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l+m. \quad (6)$$

Рассмотрим  $m$  последних уравнений из (6)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} (\mathbf{F}_i + \mathbf{J}_{ie} + \mathbf{J}_{ic}) - \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \mathbf{w}_{ir} = 0, \quad k = l+1, l+2, \dots, l+m, \quad (7)$$

которые описывают динамику манипулятора с подвижным основанием. Покажем, что

слагаемые  $\sum_{i=1}^n m_i (\partial \mathbf{r}_i / \partial q_k) \mathbf{w}_{ir}$  представляют собой инерционные компоненты уравне-

ний (1). Из (4) имеем  $[\partial \mathbf{r}_i / \partial q_k \ 0]^T = A_0 [\partial \mathbf{r}_i^l / \partial q_k \ 0]^T$ ,  $[\mathbf{w}_{ir} \ 0]^T = A_0 [\mathbf{w}_{ir}^l \ 0]^T$ . Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \mathbf{w}_{ir} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{r}_i^l / \partial q_k & 0 \end{bmatrix} A_0^T A_0 \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{ir}^l \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}_{ir}^l}{\partial q_k} \mathbf{w}_{ir}^l, \quad (8)$$

где  $A_0 = \begin{bmatrix} R_0 & \mathbf{p}_0 \\ 000 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R_0^T R_0 = E$ ,  $R_0$  – ортогональная матрица поворота,  $\mathbf{p}_0$  – вектор переноса.

С учетом (8) уравнения (7) будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} (\mathbf{F}_i + \mathbf{J}_{ie} + \mathbf{J}_{ic}) + \Phi_k = 0, \quad k = l+1, l+2, \dots, l+m, \quad (9)$$

где  $\Phi_k = -\sum_{i=1}^n m_i (\partial \mathbf{r}_i^l / \partial q_k) \mathbf{w}_{ir}^l$  – инерционные компоненты уравнений (1), описывающих

динамику манипулятора с неподвижным основанием.

**Уравнения динамики системы ускоряющий механизм – манипулятор.** Динамика ускоряющего механизма, не нагруженного манипулятором, описывается уравнениями

$$Q_s + \Phi_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l, \quad (10)$$

где  $Q_s = \sum_{v=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_s} \mathbf{F}_v$  – обобщенные силы,  $\Phi_s = -\sum_{v=1}^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial q_s} m_v \mathbf{w}_v$  – силы инерции механизма,

приведенные к обобщенным координатам.

В матричной форме уравнения (10) аналогичны (1). Уравнения динамики ускоряющего механизма с установленным на его выходном звене манипулятором представляют сумму уравнений (10) и первых  $l$  уравнений из (6)

$$Q_s + \Phi_s + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l, \quad (11)$$

где  $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{ir} + \mathbf{w}_{ie} + \mathbf{w}_{ic}$  – абсолютные ускорения звеньев манипулятора. Таким образом, уравнения динамики системы ускоряющий механизм – манипулятор будут представлены (9), (11).

В случае, когда известны уравнения динамики манипулятора и ускоряющего механизма, задача формирования уравнений динамики системы ускоряющий механизм – манипулятор сводится к вычислению неизвестных сумм в (9) и (11). Ясно, что это потребует существенно меньших объемов вычислений, чем вывод уравнений динамики манипулятора с  $t + l$  степенями свободы.

Применение (9) и (11) в качестве математического обеспечения программного модуля, осуществляющего вывод уравнений динамики, позволит использовать накопленные промежуточные результаты в задачах моделирования динамики сложных манипуляторов и увеличить эффективность САПР роботов.

Отметим, что (9) и (11) можно использовать как основу алгоритма динамики манипулятора в общем случае, когда  $\Phi_k$ ,  $Q_s$  и  $\Phi_s$  неизвестны. Для этого вначале следует вычислить инерционную компоненту  $\Phi_m$  конечного неподвижного участка кинематической цепи. Затем последовательно сформировать уравнения динамики для степеней свободы от  $t$  до 2 в соответствии с (9); уравнение динамики для первой степени свободы формируется согласно (11).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев В.М., Арайс Л.А., Шутенков А.В.* Автоматизация моделирования промышленных роботов. М.: Машиностроение, 1995. 304 с.
2. *Фу К., Гонсалес Р., Ли К.* Робототехника. М.: Мир, 1989. 620 с.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.

Северодвинск

Поступила в редакцию 5.VI.2006