

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.865.8

© 2002 г. Кузьмин Д.В.

СТРУКТУРА АЛГОРИТМИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ
АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ
ДИНАМИКИ МЕТОДОМ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

На основе метода связанных графов предложено математическое и алгоритмическое обеспечение автоматизированного вывода уравнений движения сложных голономных механических систем в символьном виде. Приведены результаты сравнительного анализа вычислительной эффективности метода связанных графов и классических методов описания динамики.

В работе [1] изложены теоретические основы метода описания динамики голономных механических систем связными графами. Данный метод, основанный на системном подходе к динамике, позволяет выводить движения сложной механической системы применением закона сохранения к узлам ее связанного графа, а также выявить динамические взаимовлияния приводов звеньев путем визуального анализа структуры связей между элементами. В настоящей статье приводятся математические соотношения и основанные алгоритмы автоматизированного вывода уравнений движения в символьном виде.

Вычислительную эффективность алгоритмов определяли зависимостью числа математических операций, необходимых для вывода уравнений движения разомкнутой механической системы, от числа степеней свободы данной системы. Приведены результаты сравнительного анализа вычислительной эффективности метода связанных графов с аналогичными показателями классических методов Лагранжа и Эйлера.

Задача автоматизации вывода уравнений движения. Пусть задана голономная механическая система, состоящая из $n + 1$ абсолютно твердых звеньев, составляющих между собой поступательные и вращательные соединения. Число степеней свободы системы равно m . Действующие в системе связи полагаются идеальными. Пусть неподвижная система координат O_0, x_0, y_0, z_0 связана с одним из звеньев рассматриваемой механической системы. Массы подвижных звеньев $m_i, i = 1, \dots, n$, а также силы и моменты, действующие на эти звенья со стороны объектов, не входящих в рассматриваемую механическую систему, полагаются заданными. Требуется организовать на ЦЭВМ автоматизированный вывод уравнений движения [1]

$$P_j(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_{C_i}^0}{\partial q_j} (m_j (\ddot{r}_{C_i}^0 - g) - R_i), \quad (1)$$

где $P_j(t)$ – управляющие силы или моменты, развиваемые приводами звеньев; $q_j = q_j(t)$ – обобщенные координаты системы, $j = 1, 2, \dots, m$; $r_{C_i}^0$ – радиус-векторы

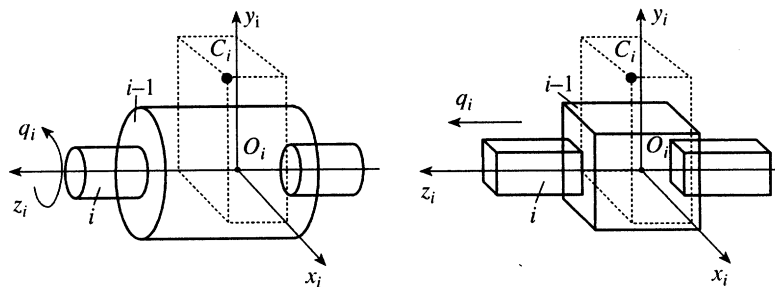


Рис. 1

центров масс C_i звеньев; g – вектор ускорения свободного падения; R_i – векторы внешних сил. Все векторы заданы в неподвижной системе координат O_0, x_0, y_0, z_0 . Математическое обеспечение и разработанные на его основе алгоритмы вывода должны быть ориентированы на использование возможностей современных САД-систем и компьютерной алгебры.

Алгоритм описания кинематики. Для применения метода связанных графов достаточно получить функции положения звеньев в виде

$$r_{C_i}^0 = \begin{bmatrix} x_{C_i}^0(q_1, \dots, q_m) \\ y_{C_i}^0(q_1, \dots, q_m) \\ z_{C_i}^0(q_1, \dots, q_m) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Ввод информации о структуре и геометрии механической системы в ЦЭВМ наиболее удобно осуществлять построением трехмерной геометрической модели в САД-системе. В графической среде можно создать модели вращательных и поступательных соединений (рис. 1), описав их как блоки со следующим набором свойств.

1. Если соединение i вращательное, то соответствующая ему символьная матрица преобразования задается в виде

$$Q_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

для поступательного соединения $Q_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

В дальнейшем, используя готовые блоки, можно строить геометрические модели разомкнутых механических систем. Например, модель исполнительного механизма манипулятора с числом степеней свободы $m = n = 3$, работающего в сферической системе координат, в положении $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ будет выглядеть так, как показано на рис. 2. Координаты центров масс C_i звеньев i в системах координат O_i, x_i, y_i, z_i вводятся пользователем при указании положений центров масс звеньев. Привязку модели к неподвижной системе отсчета O_0, x_0, y_0, z_0 можно проводить автоматически (звено с индексом $i = 0$ учитывается в программе как неподвижное) и прямым указанием пользователя.

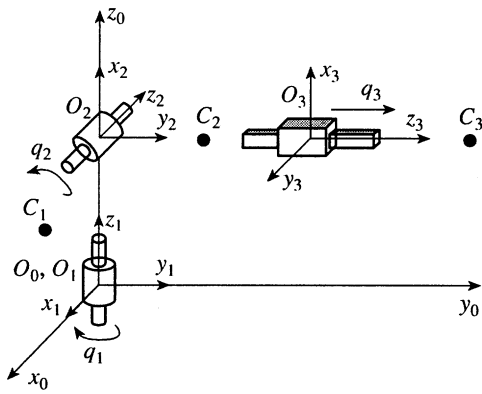


Рис. 2

Положение звеньев механической системы в любой момент времени полностью определяется ее постоянными геометрическими параметрами (длинами звеньев, углами скручивания) и вектором обобщенных координат $q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_m(t)]^T$. Если система не содержит замкнутые контуры, то число обобщенных координат m равно числу степеней свободы n .

Рассмотрим разомкнутую систему без ветвления при $q \equiv 0$ (рис. 2). Тогда положение звеньев в системе координат O_0, x_0, y_0, z_0 будет постоянным и зависящим только от величин геометрических пара-

метров самих звеньев. Матрицы перехода от $i - 1$ системы координат к системе координат i в этом случае будут также постоянными:

$$H_i = \begin{bmatrix} R_i & p_i \\ 0, \dots, 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где

$$R_i = \begin{bmatrix} x_{i-1}x_i & x_{i-1}y_i & x_{i-1}z_i \\ y_{i-1}x_i & y_{i-1}y_i & y_{i-1}z_i \\ z_{i-1}x_i & z_{i-1}y_i & z_{i-1}z_i \end{bmatrix}$$

– постоянные матрицы поворота, определяемые углами скручивания; $p_i = [p_{1i} \ p_{2i} \ p_{3i}]^T$ – постоянные векторы переноса, определяемые длинами звеньев. Матрицы R_i вычисляются по координатам векторов $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ и x_i, y_i, z_i в системе координат O_0, x_0, y_0, z_0 :

$$R_i = B_{i-1}^T B_i, \quad (5)$$

где

$$B_{i-1} = [x_{i-1} \ y_{i-1} \ z_{i-1}] = \begin{bmatrix} x_{1(i-1)} & y_{1(i-1)} & z_{1(i-1)} \\ x_{2(i-1)} & y_{2(i-1)} & z_{2(i-1)} \\ x_{3(i-1)} & y_{3(i-1)} & z_{3(i-1)} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} x_{1i} & y_{1i} & z_{1i} \\ x_{2i} & y_{2i} & z_{2i} \\ x_{3i} & y_{3i} & z_{3i} \end{bmatrix}$$

– матрицы. Векторы переноса в $i - 1$ системах координат можно определить по формуле

$$p_i = \begin{cases} p_i^0, & i = 1, \\ (R_1, \dots, R_{i-1})^T p_i^0, & i > 1, \end{cases} \quad (6)$$

где p_i^0 – векторы переноса, вычисленные в неподвижной системе координат. Полные матрицы перехода от $i - 1$ системы координат к системе координат i есть результат умножений численных матриц H_i , вычисляемых по (4) – (6), на символные матрицы Q_i , описываемые выражениями (2) и (3)

$$A_i = H_i Q_i. \quad (7)$$



Рис. 3

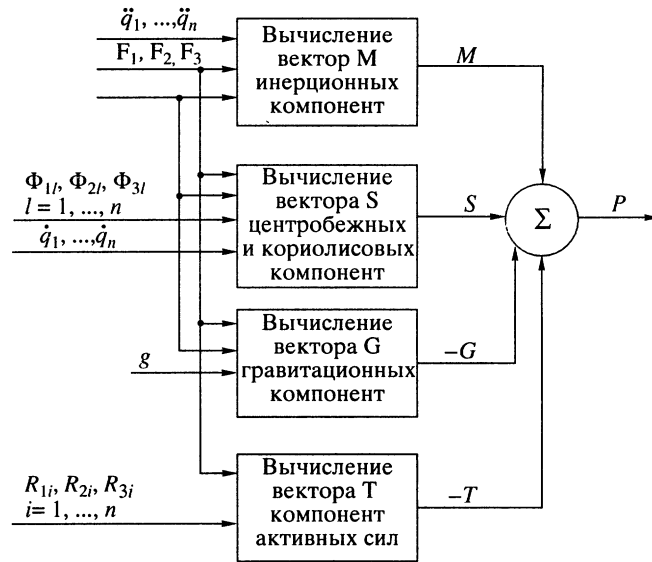


Рис. 4

Вывод функций положения звеньев (2) проводится согласно уравнениям [2]

$$\begin{bmatrix} r_{C_i}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 A_2 \dots A_i \begin{bmatrix} r_{C_i}^i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $r_{C_i}^i$ – радиус-векторы центров масс C_i в системах отсчета, связанных со звеньями i .

Общий алгоритм описания кинематики приведен на рис. 3.

В тех случаях, когда исследуемая механическая система имеет ветвления, порядок присоединения звеньев можно учесть при помощи структурного алгоритма [3]. Если отдельные ветви замыкаются в контуры, то полученные согласно (7) и (8) функции положения разомкнутой системы следует выразить через оставшиеся независимыми перемещения $q_j, j = 1, \dots, m < n$ путем подстановки уравнений связей $q_k = f(q_j)$.

Алгоритм описания динамики. Рассмотрим разомкнутую механическую систему. Обозначив $g = [g_1 \ g_2 \ g_3]^T$ и $R_i = [R_{1i} \ R_{2i} \ R_{3i}]^T$, запишем уравнение (1) в координатной форме

$$P_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_{C_i}^0}{\partial q_j} [m_i(\ddot{x}_{C_i}^0 - g_1) - R_{1i}] + \frac{\partial y_{C_i}^0}{\partial q_j} [m_i(\ddot{y}_{C_i}^0 - g_2) - R_{2i}] + \frac{\partial z_{C_i}^0}{\partial q_j} [m_i(\ddot{z}_{C_i}^0 - g_3) - R_{3i}], \quad (9)$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Вывод уравнений движения удобно организовать в следующем порядке. Собирая координаты x, y и z в столбцы, получим

$$\ddot{x} = F_1 \ddot{q} + \sum_{j=1}^n \Phi_{1j} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad \ddot{y} = F_2 \ddot{q} + \sum_{j=1}^n \Phi_{2j} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad \ddot{z} = F_3 \ddot{q} + \sum_{j=1}^n \Phi_{3j} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad (10)$$

где $\ddot{x} = [\ddot{x}_{C_1}^0, \dots, \ddot{x}_{C_n}^0]^T$, $\ddot{y} = [\ddot{y}_{C_1}^0, \dots, \ddot{y}_{C_n}^0]$, $\ddot{z} = [\ddot{z}_{C_1}^0, \dots, \ddot{z}_{C_n}^0]^T$,

$$F_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{C_1}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{C_1}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_{C_1}^0}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_{C_2}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{C_2}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_{C_2}^0}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_{C_n}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial x_{C_n}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_{C_n}^0}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{C_1}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial y_{C_1}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y_{C_1}^0}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_{C_2}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial y_{C_2}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y_{C_2}^0}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_{C_n}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial y_{C_n}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y_{C_n}^0}{\partial q_n} \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_{C_1}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial z_{C_1}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z_{C_1}^0}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_{C_2}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial z_{C_2}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z_{C_2}^0}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_{C_n}^0}{\partial q_1} & \frac{\partial z_{C_n}^0}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial z_{C_n}^0}{\partial q_n} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{kl} = \frac{\partial F_k}{\partial q_l}, \quad k = 1, 2, 3, \quad l = 1, \dots, n.$$

Представим проекции ускорений точек системы (10) в виде

$$\ddot{x} = \bar{x} + \hat{x}, \quad \ddot{y} = \bar{y} + \hat{y}, \quad \ddot{z} = \bar{z} + \hat{z}, \quad (11)$$

где $\bar{x} = F_1 \ddot{q}$, $\bar{y} = F_2 \ddot{q}$ и $\bar{z} = F_3 \ddot{q}$ – компоненты, обусловленные обобщенными ускорениями; $\hat{x} = \sum_{l=1}^n \Phi_{1l} \dot{q} \dot{q}_l$, $\hat{y} = \sum_{l=1}^n \Phi_{2l} \dot{q} \dot{q}_l$ и $\hat{z} = \sum_{l=1}^n \Phi_{3l} \dot{q} \dot{q}_l$ – компоненты, обусловленные обобщенными скоростями. С учетом (11), уравнение динамики (9) принимает вид $P = M + S - G - T$, где $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]^T$ – вектор управляющих сил и моментов; $M = [M_1, M_2, \dots, M_n]^T$ – вектор сил и моментов сил инерции, обусловленных ускорениями в соединениях; $S = [S_1, S_2, \dots, S_n]^T$ – вектор центробежных, кориолисовых сил и моментов сил инерции; $G = [G_1, G_2, \dots, G_n]^T$ – вектор сил и моментов сил тяжести; $T = [T_1, T_2, \dots, T_n]^T$ – вектор активных сил и моментов. Элементы векторов M , S , G и T в соответствии с (9) и (11) будут равны

$$M_j = \sum_{i=1}^n m_i (f_{1ij} \bar{x}_i + f_{2ij} \bar{y}_i + f_{3ij} \bar{z}_i), \quad S_j = \sum_{i=1}^n m_i (f_{1ij} \hat{x}_i + f_{2ij} \hat{y}_i + f_{3ij} \hat{z}_i),$$

$$G_j = \sum_{i=1}^n m_i (f_{1ij} g_{1i} + f_{2ij} g_{2i} + f_{3ij} g_{3i}), \quad T_j = \sum_{i=1}^n (f_{1ij} R_{1i} + f_{2ij} R_{2i} + f_{3ij} R_{3i}), \quad (12)$$

где f_{kij} – элементы матриц функциональных преобразователей F_k ; $k = 1, 2, 3$; $i, j = 1, \dots, n$. Тогда общий алгоритм описания динамики будет иметь следующую структуру (рис. 4).

Для реализации приведенного алгоритма необходимо предварительно вычислить матрицы функциональных преобразователей F_k и их производных по обобщенным координатам Φ_{kl} . Это достигается при помощи существующих алгоритмов символического дифференцирования функций одного аргумента. Формирование векторов M , S , G и T выполняется согласно (12) по отдельным алгоритмам. На рис. 5 приведен алгоритм вычисления вектора инерционных компонент M .

Алгоритмы вычисления остальных векторов построены аналогичным образом. Их особенностью является наличие операторов условия, исключающих математические операции над нулевыми элементами матриц, что позволяет существенно сократить общее число математических операций при выводе уравнений движения.

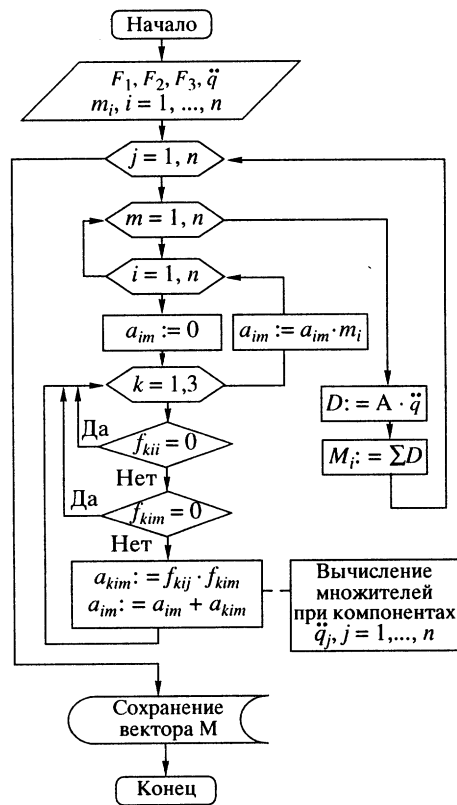


Рис. 5

Данные алгоритмы позволяют выводить уравнения движения механических систем с замкнутыми кинематическими контурами, так как любую подобную систему можно представить в разомкнутом виде с добавлением уравнений замыкающих геометрических связей. В этом случае число обобщенных координат q_j уменьшится и соответствующие элементы вектора управляющих сил и моментов $P(t)$ станут тождественно равны нулю.

Анализ вычислительной эффективности метода связанных графов. Реализация метода связанных графов требует выполнения операций сложения, умножения и символического дифференцирования. В отличие от времени выполнения операций сложения и умножения время, затрачиваемое на операцию символического дифференцирования при формировании матриц F_k и Φ_{kl} , зависит от сложности аналитических выражений (2). Поэтому общее число математических операций не может быть показателем вычислительной эффективности метода. Однако по сравнению с числом операций сложения и умножения число операций дифференцирования невелико и для системы с $m = n = 6$ составляет 5,88% от общего числа математических операций. Этот факт позволяет в сравнительной оценке методов пренебречь временем, затрачиваемым на дифференцирование. На рис. 6 приведены зависимости общего числа математических операций сложения и умножения, требующихся для вывода уравнений движения разомкнутой механической системы без ветвления методом связанных графов, а также классическими методами Лагранжа и Эйлера [4].

Анализ приведенных зависимостей показывает, что общее число элементарных математических операций, необходимых для вывода уравнений движения разомкнутой

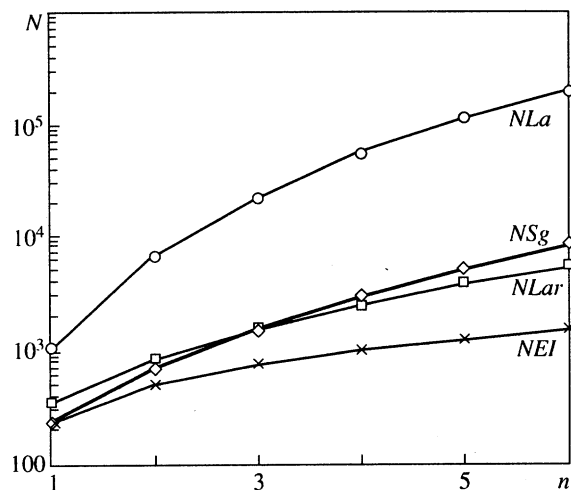


Рис. 6. Общее число операций сложения и умножения при реализации методов: *NSg* – связанных графов; *NLar* – Лагранжа с рекуррентным описанием кинематики; *NLa* – Лагранжа с описанием кинематики матрицами однородных преобразований координат; *NEI* – Эйлера с рекуррентным описанием кинематики и динамики; n – число степеней свободы разомкнутой механической системы

механической системы методом связанных графов, на порядок меньше соответствующего числа операций, требующегося на реализацию метода Лагранжа с описанием кинематики матрицами однородных преобразований координат. По этому показателю метод связанных графов приближается к методу Лагранжа с описанием кинематики рекуррентными уравнениями, который в настоящее время является самым выгодным в вычислительном плане методом, позволяющим получать замкнутые системы дифференциальных уравнений движения.

В заключение отметим, что метод связанных графов является методом прямого составления уравнений Даламбера в обобщенных координатах, осуществляемого без формирования функции Лагранжа или принуждения по Гауссу. Этим объясняется его более высокая вычислительная эффективность при выводе уравнений движения сложных механических систем, которая достигается без применения рекуррентных процедур.

Разработанные на основе метода связанных графов алгоритмы ориентированы на возможности современной компьютерной графики и компьютерной алгебры. Данные алгоритмы позволяют организовать автоматизированный вывод уравнений движения голономных механических систем с наличием ветвления разомкнутых и замкнутых, что обуславливает возможность их использования в задачах автоматизации проектирования машин с различными структурами исполнительных механизмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутько П.Д., Кузьмин Д.В. Метод связанных графов в задачах математического описания динамики голономных механических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 6. С. 63–68.
2. Коловский М.Э., Слоущ А.В. Основы динамики промышленных роботов. М.: Наука, 1988. 239 с.
3. Сланиде П.Б. Конструкции, кинематика и динамика исполнительных механизмов манипуляционных роботов. М.: ЦНТО им. С.И. Вавилова, 1986. 56 с.
4. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М.: Мир, 1989. 620 с.