ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН

№ 4, 2005

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.865.8

© 2005 г. Кузьмин Д.В.

МЕТОД СВЯЗНЫХ ГРАФОВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Процедура вывода уравнений динамики методом связных графов рассмотрена на примере механической системы с одной неголономной связью. Получено общее уравнение динамики неголономной системы. Показано, что метод связных графов в задачах математического описания динамики механических систем равносилен принципу Даламбера – Лагранжа.

Автоматизированное проектирование изделий машиностроения основывается на исследовании математических моделей динамики. Поэтому актуальным является дальнейшее совершенствование методов математического моделирования динамики, расширение области применения и адаптация реализации этих методов на компьютерах. Очень перспективным является метод связных графов, основанный на применении системного подхода к динамике исследуемых объектов. Результатом является схема распределения энергии между элементами динамической системы (“связный граф”) и уравнения динамики, получаемые на основе фундаментальные закона сохранения энергии. Проведенные исследования [1, 2] показали эффективность метода связных графов в задачах автоматизации моделирования динамики голономных систем. Открытым остается вопрос о применимости этого метода в случае неголономной системы. Неголономными называют механические системы, на скорости точек которых наложены такие ограничения, которые нельзя свести к ограничениям на положения точек. Этим обусловлены известные трудности исследования неголономных систем. Для исследования таких систем традиционно применяется метод неопределенных множителей Лагранжа, уравнения Аппеля и методы, основанные на переходе к псевдокоординатам [3]. В настоящей работе изучается возможность использования метода связных графов в задачах математического описания динамики систем с неголономными связями.

Связный граф и уравнения динамики системы с одной неголономной связью. Рассмотрим механическую систему: конек, представляющий собой тонкий однородный стержень, скользит по плоскому горизонтальному льду (рис. 1). Обозначим: m – масса; J – момент инерции конька относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс C. Положение конька определяется координатами x, y центра масс и углом ϕ. Скорость V точки C такова, что в любой момент времени движения ее вектор направлен вдоль оси конька:

$$\dot{x}\,\mathrm{tg}\,\varphi - \dot{y} = 0. \qquad (1)$$

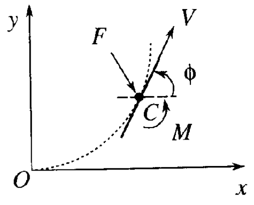

Рис. 1

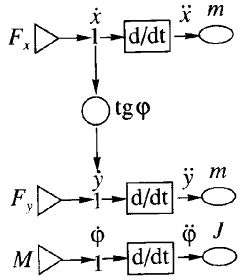

Рис. 2

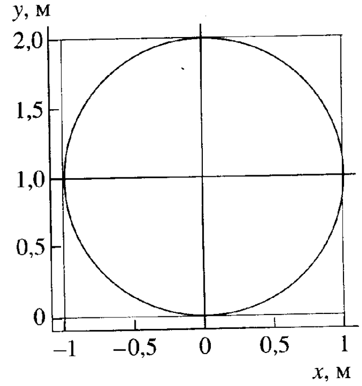

Рис. 3

Уравнение (1) задает дифференциальную неинтегрируемую связь, следовательно, рассматриваемая система является неголономной. Пусть конек движется под действием силы $F = [F_x\ F_y]^T$ и момента M. Тогда связный граф системы будет иметь вид, представленный на рис. 2. Анализ показывает, что перемещение ϕ независимо, а перемещения x и y взаимосвязаны, т.е. система имеет две степени свободы. Уравнения динамики получим, применяя к узлам графа закон

$$\sum_k e_k = 0, \tag{2}$$

где e_k – сходящиеся в узле усилия: $F_x = m\ddot{x} + \mathrm{tg}\,\varphi\,[(F_y - m\ddot{y})/-1]$, $F_y = m\ddot{y} + (-1)[(F_y - m\ddot{x})/\mathrm{tg}\,\varphi]$, $M = J\ddot{\phi}$. Подставляя в эти уравнения формулу (1), имеем

$$\ddot{x} = \frac{F_x + F_y \mathrm{tg}\varphi}{(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)m} - \dot{y}\dot{\phi}, \quad \ddot{y} = \frac{(F_x + F_y \mathrm{tg}\varphi)\cdot \mathrm{tg}\varphi}{(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)m} + \dot{x}\dot{\phi}, \quad \ddot{\phi} = \frac{M}{J}. \tag{3}$$

Дифференциальные уравнения (3) являются уравнениями динамики рассматриваемой системы. Первые два уравнения взаимосвязаны, так как одно уравнение можно получить из другого подстановкой (1). Интегрирование (3) при начальных условиях $x(0) = y(0) = \varphi(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$ м/с, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 2$ рад/с и $F = M = 0$ дает траекторию центра масс конька, изображенную на рис. 3. Аналогичная траектория приводится в [3], где исследование движения конька по льду выполнено методом неопределенных множителей Лагранжа.

Связный граф и уравнения динамики неголономной системы общего вида. Рассмотрим систему материальных точек P_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, движущуюся относительно инерциальной системы отсчета. Пусть на точки системы наложено s стационарных неголономных связей, соответствующих уравнениям

$$\sum_{j=1}^{m} b_{kj}(q)\dot{q}_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

Здесь q_j – обобщенные координаты системы, число которых составляет $m = 3N - r$; r – число независимых геометрических связей. Полагаем, что число степеней свободы системы $n = m - s > 0$. Обозначим $Q_j^* = Q_j^*(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)$ – силы инерции точек, приведенные к обобщенным координатам q_j, $Q_j = Q_j(\dot{q}, q, t)$ – обобщенные силы. Тогда граф голономной системы с r независимыми геометрическими связями будет иметь вид, представленный на рис. 4. Из графа следует, что в любой момент времени движения системы обобщенные силы уравновешиваются силами инерции, приведенны-

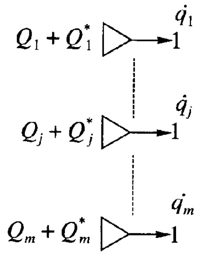

Рис. 4

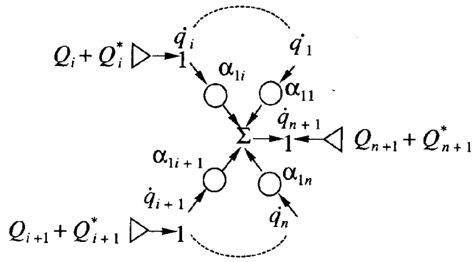

Рис. 5

ми к обобщенным координатам. Получим связный граф неголономной системы, добавив к имеющемуся графу голономной системы связи (4). Предположим, что из всех обобщенных координат независимыми являются $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а остальные q_{n+1}, $q_{n+2}, \ldots, q_{n+s}$ – зависимы. Тогда равенства (4) можно представить в виде

$$\dot q_{n+k} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\dot q_i, \quad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{5}$$

Коэффициенты $\alpha_{ki} = \alpha_{ki}(q)$ уравнений (5) определяются функциональные преобразователи связного графа неголономной системы (рис. 5). Применяя к узлам графа закон (2), получим уравнения

$$Q_i + Q_i^* = -\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki}(Q_{n+k} + Q_{n+k}^*), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

которые совместно с (5) описывают динамику неголономной системы.

Достоверность уравнений динамики (6) покажем, преобразовав их к известным уравнения П.В. Воронца [3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial q_i} - \frac{\partial\theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\left(Q_{n+k} + \frac{\partial\theta}{\partial q_{n+k}}\right) + \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $A_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial\alpha_{ki}}{q_j} + \sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_{n+\mu}}\alpha_{\mu j}\right) - \left(\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}}\alpha_{\mu i}\right)$; $\theta = \theta(q_1, \ldots, q_m, \dot q_1, \ldots, \dot q_n,$ $t)$ – выражение для кинетической энергии системы, не содержащее величин $\dot q_{n+k}$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Запишем силы инерции, приведенные к обобщенным координатам, в виде $Q_j^* =$ $= -(d/dt)(\partial T/\partial \dot q_j) + (\partial T/\partial q_j)$ и подставим их в уравнения (6)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\left(Q_{n+k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} + \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}}\right). \tag{8}$$

Здесь $T = T(q_1, \ldots, q_m, \dot q_1, \ldots, \dot q_m, t)$ – кинетическая энергия системы. Согласно [3] имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial \dot q_i} - \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} - \sum_{k=1}^{s}\frac{d\alpha_{ki}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_l} = \frac{\partial\theta}{\partial q_l} - \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_l}\dot q_l\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad l = 1, 2, \ldots, m.$$

С учетом этих равенств уравнения (8) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\theta}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+k}}\left(\frac{d\alpha_{ki}}{dt} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_j\right) =$$

$$= Q_i + \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\left\{Q_{n+k} + \frac{\partial\theta}{\partial q_{n+k}} - \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+k}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_{n+k}}\dot{q}_j\right)\right\}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\left(Q_{n+k} + \frac{\partial\theta}{\partial q_{n+k}}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{n+k}}\left[\frac{d\alpha_{ki}}{dt} - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}}\alpha_{\mu i}\right)\dot{q}_j\right]. \quad (9)$$

Так как $\frac{d\alpha_{ki}}{dt} - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}}\alpha_{\mu i}\right)\dot{q}_j \equiv \sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot{q}_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, s$, то уравнения (9) тождественны (7).

Покажем, что уравнения динамики неголономной системы (6) следуют из общего уравнения динамики Даламбера – Лагранжа в обобщенных координатах

$$\sum_{j=1}^{m}(Q_j + Q_j^*)\delta q_j = 0. \quad (10)$$

С учетом (5) уравнение (10) перепишем в виде $\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i + Q_i^* + \sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}(Q_{n+k} + Q_{n+k}^*)\right)\delta q_i = 0$,

что в силу независимости δq_i, ($i = 1, 2, \ldots, n$) эквивалентно (6).

Выводы. Применение метода связных графов в задачах динамики механических систем равносильно применению принципа Даламбера – Лагранжа, который является общим утверждением в классической механике.

Уравнения динамики системы, содержащей геометрические и дифференциальные неинтегрируемые связи, можно получить в два этапа.

Наличие связного графа существенно облегчает анализ динамических взаимовлияний в неголономной системе и процедуру вывода уравнений динамики. Уравнения (6) имеют общую структуру, что позволяет использовать их в задачах автоматизации математического описания динамики механических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крутько П.Д., Кузьмин Д.В.* Метод связных графов в задачах математического описания динамики голономных механических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 6. С. 63–68.
2. *Кузьмин Д.В.* Структура алгоритмического обеспечения автоматизированной системы вывода уравнений динамики методом связных графов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 3. С. 86–92.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 416 с.

Северодвинск

Поступила в редакцию 28.XII.2004