

**Академия Наук Молдовы  
Институт Прикладной Физики**

**На правах рукописи  
УДК 538.94; 537.632/.636**

**Думанов Евгений Викторович**

**Коллективные свойства двумерных магнитоэкситонов,  
взаимодействующих с плазмонами**

**01.04.02 – теоретическая и математическая физика**

**Диссертация, представленная на соискание учёной степени доктора  
физико-математических наук**

**Научный Руководитель:  
Москаленко С.А., академик АНМ,  
доктор хабилитат физ.-мат. наук,  
профессор\_\_\_\_\_**

**Автор: Думанов Е.В.\_\_\_\_\_**

**Кишинев – 2008**

## Содержание:

Введение	3
Глава 1 Гамильтониан взаимодействия двумерных электронов и дырок в сильном магнитном поле с учетом возбужденных уровней Ландау:	
1. Матричные элементы кулоновского взаимодействия на волновых функциях электронов в сильном магнитном поле.	19
2. Исключение матричных элементов перехода на возбужденные уровни Ландау с помощью унитарного преобразования во втором порядке теории возмущения.	26
3. Эффективный гамильтониан взаимодействия двумерных электронов и дырок находящихся на нижайших уровнях Ландау.	30
4. Влияние возбужденных уровней Ландау на химический потенциал бозе-конденсированных двумерных магнитоэкситонов и основное состояние ЭДЖ.	36
Глава 2 Плазменные колебания двумерной электронно-дырочной жидкости в пределах нижайших уровней Ландау:	
1. Уравнения движения для операторов флуктуации плотности электронов и дырок.	45
2. Цепочки уравнения для функции Грина и их расщепление по методу Д.Н.Зубарева.	51
3. Энергетический спектр двумерных акустических и оптических плазмонов в присутствии сильного магнитного поля.	55
Глава 3 Элементарные коллективные возбуждения двумерных магнитоэкситонов в условиях бозе-эйнштейновской конденсации и образования метастабильной диэлектрической жидкости:	
1. Нарушения калибровочной симметрии исходного гамильтониана по методу квазисредних Н.Н.Боголюбова.	60
2. Уравнения движения для операторов и функции Грина в присутствии бозе-эйнштейновского конденсата магнитоэкситонов на одночастичные состояния с произвольным значением волнового вектора.	68
3. Случай больших волновых векторов бозе-конденсата в условиях образования метастабильной диэлектрической жидкости.	80
4. Спектр элементарных возбуждений.	89
Основные результаты, выводы, рекомендации	93
Список литературы	97

## Введение

За прошедшие три десятилетия множество экспериментальных [1-4] и теоретических [5-12] работ были посвящены изучению двумерных (2D) систем в сильном магнитном поле. Лернером, Лозовиком и Дзюбенко [5-7] впервые было изучено когерентное спаривание электронов и дырок, в процессе формирования Бозе-Эйнштейновского конденсата (БЭК) экситонов на одночастичное состояние с волновым вектором  $k = 0$ . Если корреляционной энергией, связанной с возбужденными уровнями Ландау, можно пренебречь, то точное решение задачи об основном состоянии системы можно получить даже за пределами Хартри-Фоковской аппроксимации. В этом случае магнитоэкситоны при  $T=0$  представляют собой идеальный экситонный газ. Несмотря на то, что кулоновское взаимодействие между электронами, между дырками, и электронами и дырками не ноль, результирующее взаимодействие между двумя магнитоэкситонами точно равняется нулю. Этот удивительный результат появляется вследствие того, что циклотронные орбиты электрона и дырки, входящие в состав экситона с  $k = 0$ , точно накладываются одна на другую и полностью совпадают, имея одинаковый радиус, несмотря на то, что их циклотронные частоты отличаются друг от друга, если массы электрона и дырки  $m_e, m_h$  не равны друг другу. Радиус циклотронной орбиты равен  $l\sqrt{2}$ , где  $l$  - магнитная длина, независимая от масс  $m_i$ , где  $i = e, h$ . Квадрат магнитной длины равен:

$$l^2 = \frac{\hbar c}{eH}$$

где  $H$  - сила магнитного поля. Она предполагается настолько большой, что расстояние между уровнями Ландау для электронов и дырок  $\hbar\omega_{c,i} = \frac{\hbar eH}{m_i c}$  намного больше, чем энергия связи 2D экситона, а магнитная длина  $l$  - меньше, чем радиус  $a_{ex}$  2D экситона. Критическое значение магнитного поля, которое удовлетворяет этим условиям:

$$H_{er} = \frac{4ce^3 \mu^2}{\hbar^3 \epsilon_0^2}; \quad \mu = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}$$

Для типичных значений кристалла GaAs  $\epsilon_0 = 12,56$ ;  $\mu \leq m_e = 0,067m_0$ ;  $a_{ex} = 100 \text{ \AA}$  мы можем найти  $H_{er} = 6,57T$ . Другой удивительный результат это то, что капельки металлического типа электронно-дырочной жидкости (ЭДЖ) имеют минимальную энергию, приходящуюся на одну электронно-дырочную пару, когда фактор заполнения  $\nu$  нижайшего уровня Ландау (НУЛ) максимален, то есть  $\nu = 1$ . Электронно-дырочные капли можно рассматривать как совокупность экситонов, слипшихся вместе [5, 6, 8, 9]. Учет более высоких уровней Ландау

делает систему слабо неидеальной [5, 6], что приводит к топологическому фазовому переходу типа Березинского-Костерлица-Таулеса [13-15] при конечных температурах [5, 6, 8, 9]. Результаты, полученные в [5-7] были воспроизведены в [8] на основе более простого и прозрачного подхода, используя волновую функцию типа BCS для БЭК экситонов, а энергия основного состояния была рассчитана в Хартри-Фок-Боголюбовском приближении (ХФБП). Но дополнительно в [8] авторы приняли во внимание косвенное взаимодействие между частицами, лежащими на НУЛ из-за их одновременного виртуального перехода в течение кулоновского взаимодействия на более высокие уровни Ландау и их возвращение назад к начальным состояниям. Это косвенное взаимодействие, принятое во внимание в рамках ПХФБ эквивалентно вычислению корреляционной энергии БЭК экситонов, когда их поляризуемость обусловлена переходом заряженных частиц от НУЛ к более высоким уровням Ландау.

Начальные волновые функции электронов и дырок в 2D структуре полупроводников в сильном перпендикулярном магнитном поле в калибровке Ландау характеризуются номерами уровней Ландау и одномерным волновым вектором.

Магнитное поле преобразовывает кинетическую энергию движения в одном направлении лежащим в плоскости структуры в потенциальную энергию одномерного гармонического осциллятора в другом направлении в плоскости и перемещает центр тяжести осциллятора, как это показано на Рис.1. Положение в плоскости центра квантования электрона определено его волновым вектором. Есть возможные  $N$  положения центра вращения в плоскости с площадью  $S$ , и это число равняется

$$N = \frac{S}{2\pi l^2}$$

где  $2\pi l^2$  - площадь циклотронной орбиты. Теперь отметим, что поток магнитного поля через квантовую орбиту определяет квант магнитного потока  $\phi_0$ , который определяется как:

$$\phi_0 = H 2\pi l^2 = \frac{hc}{e}; \quad h = 2\pi\hbar$$

Общее количество квантов магнитного потока через площадь  $S$  равняется кратности вырождения  $N$  данного уровня Ландау. Эти детали играют главную роль тогда, когда имеются пространственно-разделенные состояния электронов и дырок в двойной квантовой яме. Разделение происходит под действием перпендикулярного электрического поля. Чтобы визуализировать поведение 2D e-h пары в сильном магнитном поле, можно рассмотреть Рис.1, где показанно трансляционное движение электрона и дырки в направлении оси  $x$  и их смещение под действием силы Лоренца в направлении оси  $y$ . Если электрон и дырка вместе принимают участие в движении экситонного центра масс, каждый из них несет некоторую

часть волнового вектора  $\vec{k} \neq 0$ , в этом случае их центры квантования перемещаются под действием силы Лоренца в противоположном направлении по оси  $y$ .

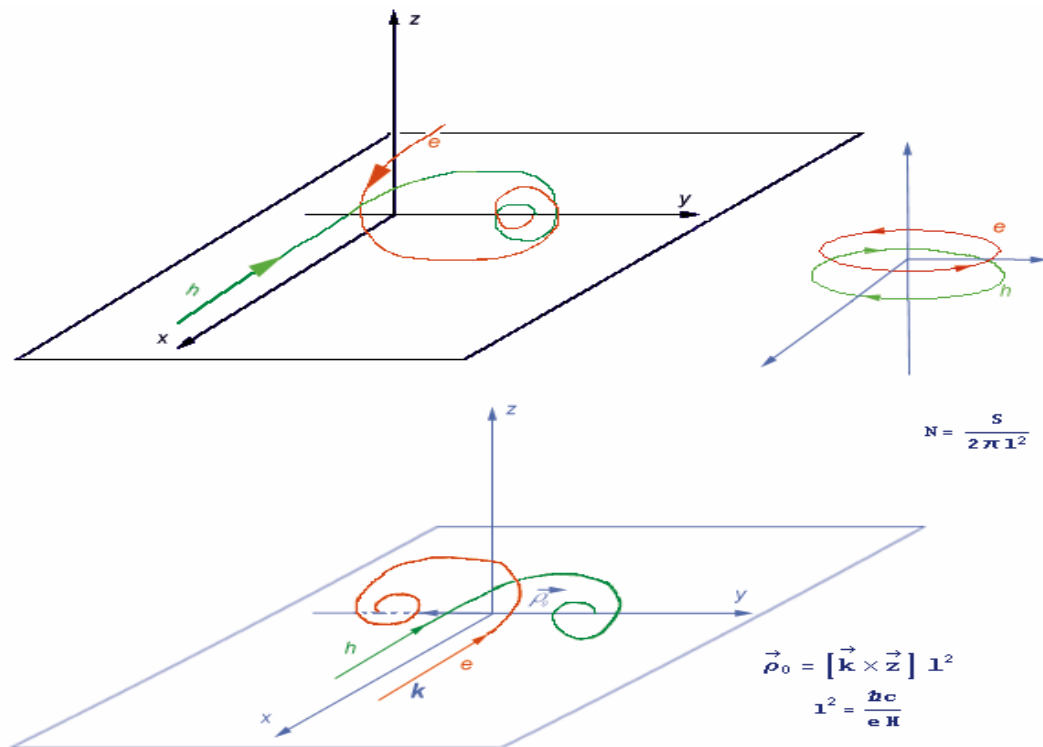


Рис 1. Перемещение пары электрон-дырка в перпендикулярном магнитном поле. Действие силы Лоренца состоит в смещении центров квантования e-h пар. Они совпадают если электрон и дырка движутся с противоположными волновыми векторами и разведены при движении с одинаковыми волновыми векторами.

При движении с одинаковыми волновыми векторами появляется расстояние между центрами квантования, которое определяет трансляционный дипольный момент  $\vec{\rho}_0$

$$\vec{\rho}_0 = \frac{[\vec{H} \times \vec{k}]}{H} l^2; \quad \rho_0 = kl^2$$

В плоскости структуры вектор  $\vec{\rho}_0$  перпендикулярен к волновому вектору трансляционного движения  $\vec{k}$ , что показано на Рис. 1. Квантовые орбиты электрона и дырки вокруг их центров вращения имеют радиусы  $l\sqrt{2}$  и площадь  $2\pi l^2$ , которые не зависят от изменения трансляционного дипольного момента  $\rho_0$ .

Радиусы квантовых орбит  $l\sqrt{2}$  и расстояния между ними  $\rho_0$  полностью определяются сильным магнитным полем и вектором  $\vec{k}$ . Формирование экситона, происходит под влиянием кулоновского взаимодействия e-h пары. Структура магнитоэкситона представлена на Рис.2. Поскольку расстояние  $\rho_0$  может непрерывно изменяться, изменяя волновой вектор  $k$ , энергия связи магнитоэкситона также изменяется непрерывно, и можно говорить о

непрерывном энергетическом спектре относительного движения  $e$ - $h$  пары в зависимости от вектора  $k$ .

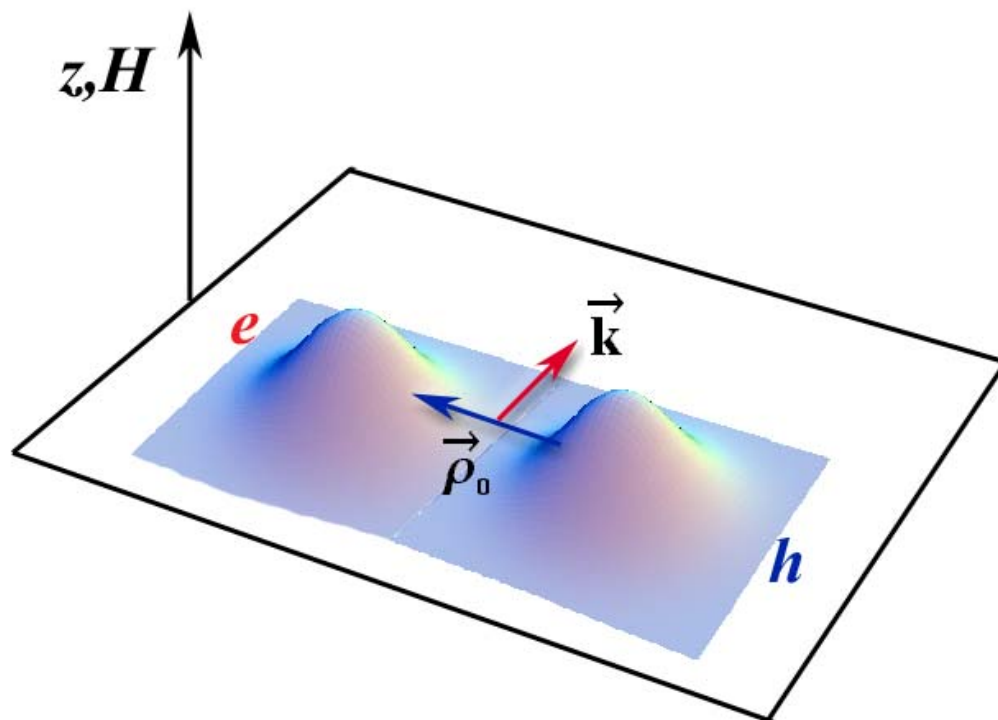


Рис.2 Электрон-дырочная структура магнитоэкситона

Коллективные свойства электронно-дырочных пар большой плотности были изучены в двух аспектах. Один из них касается Бозе-Эйнштейновской конденсации (БЭК) магнитоэкситонов на одночастичное состояние с данным волновым вектором  $\vec{k}$ , тогда как другой связан с конденсацией типа газ-жидкость с образованием металлического типа электронно-дырочной жидкости и электронно-дырочных капель (ЭДК). Много вычислений было сделано в приближении нижайшего уровня Ландау (НУЛ), когда для электронов и дырок учитывались лишь нижайшие уровни Ландау. Попытки избежать эти ограничения были предприняты в [5, 6, 8, 10-12]. В этих работах было частично принято во внимание влияние возбужденных уровней Ландау (ВУЛ), однако не в полном объеме. Так, например, в работах [9-12] было рассмотрено влияние лишь первого возбужденного уровня Ландау. Более полное исследование этого вопроса выполнено в настоящей диссертации. Поляризуемость БЭК, с учетом когерентных возбужденных состояний была изучена в [9, 10]. Она не зависит от малого параметра равного отношению потенциала ионизации экситона  $I_i$  к расстоянию между уровнями Ландау  $\hbar\omega_{c\mu}$  где циклотронная частота  $\omega_{c\mu}$  рассчитана для приведенной массы экситона  $\mu$ . Когерентные возбуждения состояния БЭК описывают случай, когда один из экситонов, принадлежащих БЭК становится свободным и образует

свободную e-h пару. Энергия возбуждения равна  $I_{ex}(k)$ , где  $I_{ex}(k)$  - ионизационный потенциал магнитоэкситона с волновым вектором  $k$ . Существует другой случай, когда один экситон, входящий в БЭК с волновым вектором  $k$  может перейти в другой экситон с волновым вектором  $\vec{k}' \neq k$ . В этом случае энергия возбуждения будет  $I_{ex}(k) - I_{ex}(k')$ . Но такой способ был принят во внимание только в случае не конденсированных экситонов [9]. Когерентные возбужденные состояния определяют поляризуемость БЭК когда первым ВУЛ и другими внутриэкситонными возбуждениями пренебрегают. Поляризуемость  $4\pi\alpha_0^{HF}(\vec{Q}_0, \omega)$  была вычислена как линейный отклик БЭК на слабое продольное возбуждение с волновым вектором  $\vec{Q}$  и частотой  $\omega$  и имеет следующий вид [9-12]

$$4\pi\alpha_0^{HF}(\vec{Q}, \omega) = -4u^2v^2 \frac{e^2}{\epsilon_0 l^2 |\vec{Q}|} e^{-Q^2 l^2 / 2} \\ \times \text{Sin}^2\left(\frac{k_y Q_x - k_x Q_y}{2} l^2\right) \\ \times \left[ \frac{1}{\hbar\omega - I_{ex}(k) + i\delta} - \frac{1}{\hbar\omega + I_{ex}(k) + i\delta} \right]$$

Где  $u, v$  - коэффициенты канонического преобразования Боголюбова,  $\text{Sin}^2\left(\frac{k_x Q_y - k_y Q_x}{2} l^2\right)$  - фактор когерентности, который зависит от волновых векторов  $\vec{k}$  и  $\vec{Q}$ , и имеет наибольшее значение, когда волновой вектор возмущения  $\vec{Q}$  перпендикулярен волновому вектору конденсата  $\vec{k}$ . Зависимость поляризуемости от  $\vec{Q}$  определяется также еще и другими двумя факторами. Оно стремится к нулю в диапазоне малых и больших значений  $\vec{Q}$ . Поляризуемость стремится к нулю в точке  $k = 0$ . Это означает, что взаимодействие между магнитоэкситонами с  $k \rightarrow 0$  уменьшается, и они начинают себя вести как идеальный Бозе-газ в рамках этого приближения. Увеличение поляризуемости в точке  $k \neq 0$  происходит из-за фактора когерентности. Но в приведенной формуле так же присутствует резонансный знаменатель, который вносит особенность в рассмотрение. Особенность имеет место при резонансе энергии  $\hbar\omega = I_{ex}(k)$ . Величина  $I_{ex}(k)$  уменьшается подобно  $\frac{1}{kl}$  при  $k$  стремящимся к бесконечности. Поляризация имеет затухающую периодическую зависимость от волнового вектора  $\vec{Q}$ . Физическое объяснение появившемуся взаимодействию при  $k \neq 0$  связано с существованием дипольного момента, трансляционного происхождения, амплитуда которого равна  $\rho_0 = kl^2$ . Дипольный момент расположен в

плоскости и перпендикулярен волновому вектору  $\vec{k}$ . В случае БЭК эти дипольные моменты параллельны, что приводит к дополнительному притяжению между экситонами. Экситонная система становится похожей на слабонеидеальный Бозе-газ.

Поляризуемость магнитоэкситонов была использована авторами [9-12], чтобы определить диэлектрическую постоянную  $\varepsilon(\vec{Q}, \omega)$  в аппроксимации хаотических фаз и корреляционную энергию за пределами ХФБП. Все это отражено в выражении для химического потенциала. Химический потенциал это дифференциальная величина, определяющая энергию, которую нужно затратить, чтобы изменить число экситонов в системе на один [9-12]. Это существенным образом отличается от более грубой характеристики - среднего арифметического значения энергии приходящейся на один экситон. Приведем значение полного химического потенциала с учетом поправок за счет первого ВУЛ [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{I_1} = & -G(kl) - 2v^2(1-G(kl)) - \frac{2F(kl)}{\sqrt{\pi G(kl)}} T(k, \gamma) v^2 (1-v^2)(1-2v^2) - \\ & - \frac{I_1}{4\pi\hbar\omega_c} A^2(kl) + \frac{I_1}{2\pi\hbar\omega_c} [A^2(kl) + A_2^{2,2} - 1] v^2 \end{aligned}$$

Видно, что химический потенциал состоит из пяти слагаемых. Первые два появляются благодаря ХФБ аппроксимации, третий определяется корреляционной энергией, обусловленной когерентно возбужденными состояниями. Последние два слагаемых определяют влияние первого ВУЛ. Они были определены в ХФБ приближении, принимая во внимание косвенное взаимодействие частиц при их виртуальном переходе с НУЛ на первый ВУЛ и возвращения назад. Эти поправки эквивалентны энергии корреляции с учетом первого ВУЛа. Эти слагаемые характеризуются малым параметром  $\frac{I_1}{\hbar\omega_c} < 1$ .

Как отмечено выше, третий член описывает корреляционную энергию, происходящую из-за учета когерентных возбужденных состояний Андерсовского типа, в результате которых все электроны и дырки, остаются в конденсате за исключением одной пары, которая оказывается в несвязанном состоянии. Это слагаемое не зависит от малого параметра  $I_1/\hbar\omega_c$ . Третий член, по существу, зависит от волнового вектора  $k$ , через три коэффициента  $F(kl), T(kl)$  и  $G(kl)$ . Первый из них представляет собой фактор когерентности, который стремится к нулю, когда  $k$  стремится к нулю, и наоборот, возрастает с ростом  $kl$ . Второй множитель, это знаменатель  $G(kl)$ , который стремится к нулю с ростом  $kl$ . Третий множитель  $T(k, \gamma)$  очень важен в диапазоне больших значений



$kl$ , где он стремится к нулю быстрее чем знаменатель, из-за зависимости  $T(k, \gamma) \approx \left(\frac{I_{ex}(k)}{\gamma}\right)^3$ , когда  $I_{ex}(k)$  меньше чем  $\gamma$ . Химический потенциал, как функция, зависящая от фактора заполнения показан на Рис. 3, для случая больших значений волнового вектора  $k$  и малых значений затухания  $\gamma$ . Для больших значений  $kl$  эта зависимость от фактора заполнения становится немонотонной с явно выраженным локальным минимумом. Впервые локальный минимум появляется при  $kl = 2,8$  и  $\gamma = 0,05I_l$ . Этот минимум становится более глубоким и более ярко выраженным с ростом дипольного момента  $kl^2$ , из-за роста фактора когерентности и уменьшения потенциала ионизации  $I_{ex}(k)$  до значения, когда потенциал ионизации становится приблизительно равным затуханию. Дальнейшее уменьшения значения химического потенциала не происходит из-за множителя  $T(k, \gamma)$ , отражающего то, что затухания преобладают в системе. При больших значениях фактора затухания  $\gamma > 0,1I_l$  минимум не будет появляться ни для какого значения  $kl$ . Относительный минимум химического потенциала подразумевает, что образуется диэлектрическая жидкая фаза с положительной сжимаемостью в некотором диапазоне значений фактора заполнения  $\nu^2$ . Это состояние является более устойчивым, чем состояние электронно-дырочной жидкости металлического типа.

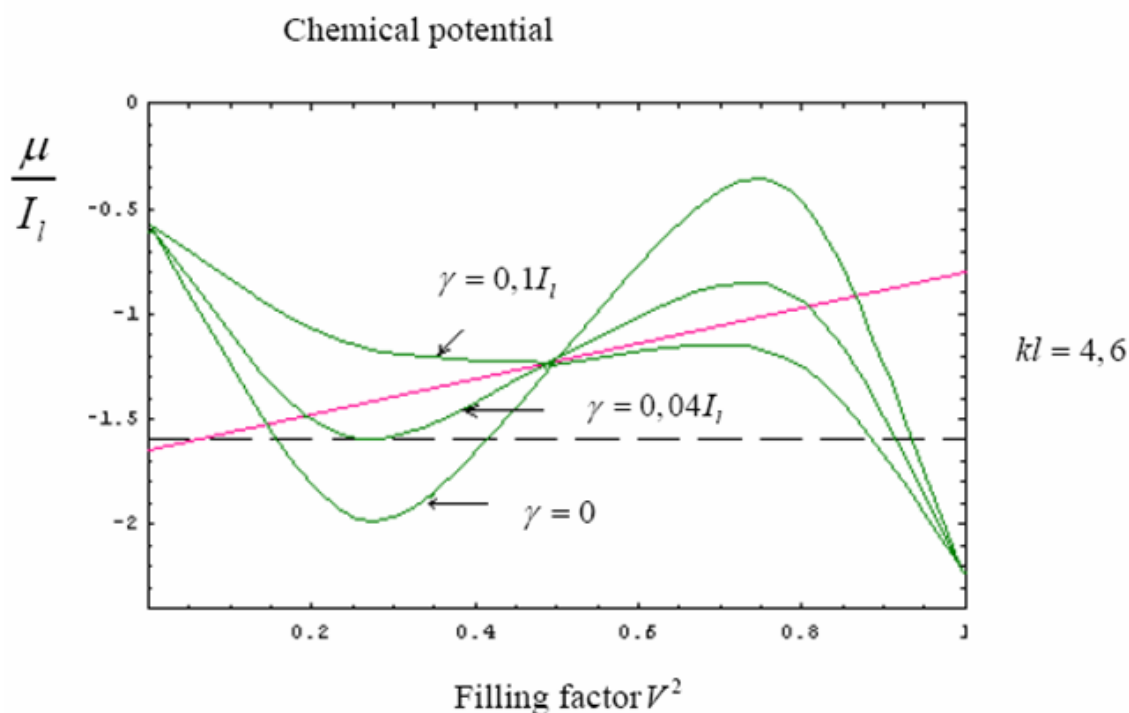


Рис. 3 Химический потенциал БЭК магнитоэкситонов при  $kl = 4,6$  и различных значениях затухания  $0,04I_l$  и  $0,1I_l$  [10].

Для более низких значений затухания  $\gamma \leq 0,04I_l$ , эти состояния становятся более устойчивыми, чем БЭК магнитоэкситонов с волновым вектором  $k = 0$ . При значении  $\gamma = 0,04I_l$ , минимум химического потенциала магнитоэкситона с волновым вектором  $kl = 4.6$  находится при значении фактора заполнения  $v^2 = 0.28$  и этот минимум находится намного глубже, чем значение химического потенциала для другого БЭК с волновым вектором  $k = 0$  и произвольных значений фактора заполнения. В отличие от метастабильного состояния БЭК магнитоэкситонов с  $kl = 4.6$ ,  $\gamma = 0,04I_l$  и  $v^2 = 0.28$  БЭК магнитоэкситонов с волновым вектором  $k = 0$  характеризуется ростом химического потенциала  $\mu(k = 0, v^2)$  с ростом фактора заполнения и формирует устойчивое состояние только при учете ВУЛ. На графике эта зависимость изображена монотонно растущей прямой. Если фактор заполнения  $v^2$  меньше чем  $v_m^2 = 0,28$ , то диэлектрическая жидкость будет собираться в капли, для которых фактор заполнения соответствует  $v_m^2$ . Эти капли метастабильной диэлектрической жидкости охватывают случайным образом участки поверхностного слоя и их плотность увеличивается при росте фактора заполнения. При значениях  $v^2 = v_m^2$  все капли сливаются вместе, образуя непрерывную жидкость с минимальным значением энергии для магнитоэкситона. При дальнейшем росте фактора заполнения  $v^2 > v_m$  магнитоэкситон с волновым вектором  $kl = 4.6$  перестанет занимать состояния с наименьшей энергией и станет менее устойчивым. В случае диэлектрических жидких капель с  $v_m = 0,28$ , плотность магнитоэкситонов будет определяться как  $n_{ex} = \frac{v_m^2}{2\pi l^2}$ , тогда расстояния между ними  $d = \frac{l\sqrt{2\pi}}{v_m}$  будут иметь по абсолютной величине тот же порядок, что и дипольный момент  $kl^2 = 4.6l$ . Метастабильная жидкость с  $kl \neq 0$  предпочтительна по отношению к БЭК экситонов с  $k = 0$ . Значение химического потенциала  $\mu(k = 0, v^2)$  в точке  $v^2 = 0$  лежит ниже на энергетической шкале, чем значение химического потенциала  $\mu(k, v^2 = 0)$  для произвольного  $k \neq 0$ . Кроме того, между экситонами с волновым вектором  $k = 0$  при отсутствии трансляционного дипольного момента, преобладает отталкивание только при учете ВУЛ. Так же мы должны учесть, что относительный минимум метастабильной диэлектрической жидкости существенным образом зависит от величины затухания экситонного уровня, тогда как химический потенциал БЭК экситонов с  $k = 0$  ни каким образом не зависит от  $\gamma$ . Значение  $\gamma$  для магнитоэкситонов точно не известно и мы можем предположить различные его значения. Изменяя его значения мы можем получить такой случай, когда капли диэлектрической

жидкости, входящие в состав БЭК магнитоэкситонов с плотностью  $\frac{v_m^2}{2\pi l^2}$  будут определяться таким же химическим потенциалом, как и вырожденный бозе-газ малой плотности, образованным магнитоэкситонами с  $k = 0$ . Такая ситуация представлена на Рис.4.

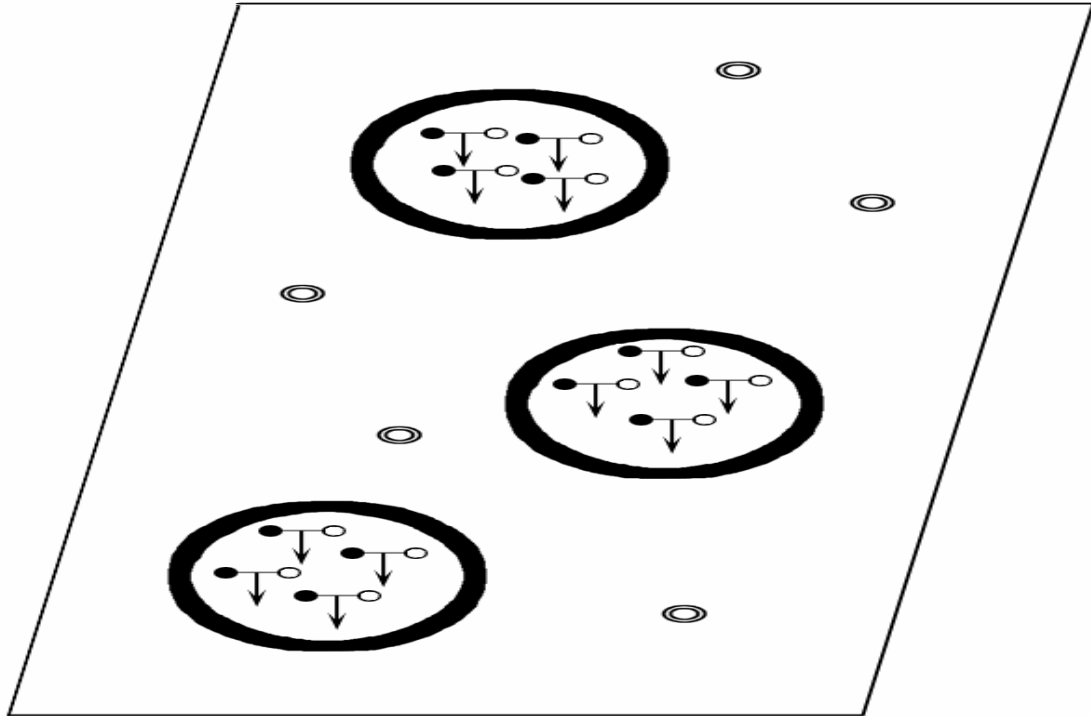


Рис. 4 Сосуществование диэлектрических жидких капель, сформированных из БЭК магнитоэкситонов с трансляционным дипольным моментом, окруженный газом БЭК магнитоэкситонов с волновым вектором  $k = 0$ .

Возможность сосуществования двух БЭК с отличным от нуля дипольным моментом и без него была впервые высказана в работе [10]. В заключение работ [9-12] можно подчеркнуть, что сосуществование относительных минимумов химического потенциала  $\mu(k \neq 0, v^2)$  в зависимости от фактора заполнения  $v^2$  подразумевает формирование метастабильной диэлектрической жидкости с положительной сжимаемостью в окрестности  $v_m^2$ . Как уже отмечалось, диэлектрическая жидкость сформирована из БЭК магнитоэкситонов с трансляционным дипольным моментом. Если фактор заполнения меньше, чем значение соответствующее локальному минимуму  $v_m^2$ , то в этом случае магнитоэкситоны будут группироваться в виде капель с фактором заполнения  $v_m^2$  вместо однородного распределения на поверхностном слое. Капли сформированные из магнитоэкситонов будут обладать трансляционным дипольным моментом и ионизационным потенциалом  $I_{ex}(k)$ , что при данном значении затухания  $\gamma$  обеспечивает относительный минимум химического потенциала в зависимости от  $v^2$ . В [9] было показано, что состояния БЭК с различными

значениями волновых векторов  $k$  устойчивее, чем электронно-дырочная жидкость металлического типа (ЭДЖ). Данная теория действительна только в диапазоне малых значений фактора заполнения  $\nu^2 < 1$ , при которых НУЛ не полностью заполнен и можно применить условие  $\nu^2 \approx \sin^2 \nu$ . Подчеркнем, что цель таких исследований состоит в том, чтобы определить зависимость химического потенциала  $\mu(k, \nu^2)$  от фактора заполнения  $\nu^2$  при заданных значениях волнового вектора  $\vec{k}$  и других параметров экситонной системы. Таких как, например, затухание  $\gamma$ . Сравнивая химические потенциалы  $\mu(k, \nu^2)$  можно выбрать наиболее вероятную модель БЭК магнитоэкситонов.

Имеются два основных направления исследования в диссертации тесно связанных между собой. Первое это учет влияния ВУЛ на характер взаимодействия электронов и дырок, находящихся на НУЛ и на коллективные свойства, и в особенности на два основных состояния возможных в этой системе, а именно ЭДЖ и БЭК магнитоэкситонов. Хотя ранее были получены некоторые результаты в этом направлении, но столь полного и многостороннего исследования с суммированием по всем ВУЛ не существовало и это сделано в диссертации впервые. Второе направление исследований это определение энергетического спектра коллективных элементарных возбуждений в присутствии двух основных состояний e-h системы обсужденных выше.

**Цель и объект исследования.** Основной целью является определение спектра элементарных возбуждений в 2D системе e-h пар в сильном перпендикулярном магнитном поле взаимодействующих в пределах нижайших уровней Ландау и в отсутствие кинетической энергии квазичастиц, а также определение и влияние ВУЛ на коллективные свойства этой системы. Имеется в виду два ее основных состояния: БЭК магнитоэкситонов и электронно-дырочная жидкость (ЭДЖ). В процессе работы эти цели были реализованы в двух главных направлениях. Первый аспект связан с выводом гамильтониана непосредственного и косвенного взаимодействия электронов и дырок с учетом влияния всех ВУЛ, а не только первого ВУЛ, и с определением их влияния на основное состояние БЭК магнитоэкситонов и ЭДЖ. Второй аспект диссертации связан с исследованием спектра элементарных возбуждений. Для достижения поставленных целей были рассчитаны и исследованы:

- Матричные элементы кулоновского взаимодействия на волновых функциях электронов в сильном магнитном поле
- Эффективный гамильтониан взаимодействия двумерных электронов и дырок находящихся на нижайших уровнях Ландау

- Химический потенциал бозе-конденсированных двумерных магнитоэкситонов в Хартри-Фок-Боголюбовском приближении
- Применение метода квазисредних Н.Н.Боголюбова для нарушения калибровочной симметрии исходного гамильтониана
- Уравнения движения для операторов флуктуации плотности электронов и дырок, и функций Грина в присутствии бозе-эйнштейновского конденсата магнитоэкситонов на одночастичные состояния с произвольным волновым вектором
- Плазменные колебания в 2D ЭДЖ
- Спектр элементарных возбуждений в случае больших волновых векторов бозе-конденсата в условиях образования метастабильной диэлектрической жидкости

**Научная новизна** представленных в диссертационной работе результатов обусловлена проведённым впервые полным исследованием влияния возбужденных уровней Ландау на бозе-эйнштейновскую конденсацию двумерных магнитоэкситонов и на электронно-дырочную жидкость, а так же получения спектра элементарных возбуждений в условиях: 1) плазменных колебаний 2D ЭДЖ 2) образования метастабильной диэлектрической жидкости в условиях БЭК магнитоэкситонов. При этом были получены следующие **новые результаты**:

- ❖ Было учтено влияние всех возбужденных уровней Ландау на основное состояние в условиях бозе-эйнштейновской конденсации магнитоэкситонов и на состояние электронно-дырочной жидкости, причем был рассмотрен общий случай, когда электроны и дырки совершают виртуальные переходы на разноименные уровни Ландау
- ❖ Была доказано возможность сосуществования в системе двух различных фазовых состояний: электронно-дырочной жидкости и БЭК 2D магнитоэкситонов
- ❖ Была показана возможность существования в электронно-дырочных системах квазиэнергетических комплексов с участием плазмонов
- ❖ Был получен энергетический спектр двумерных акустических и оптических плазмонов в присутствии сильного магнитного поля в условиях образования ЭДЖ
- ❖ Был применен метод квазисредних Н.Н.Боголюбова для нарушения калибровочной симметрии исходного гамильтониана
- ❖ Был рассмотрен спектр элементарных возбуждений в случае, когда основное состояние есть БЭК магнитоэкситонов с большими значениями волновых векторов бозе-конденсата в условиях образования метастабильной диэлектрической жидкости.

Энергетический спектр элементарных возбуждений изучен в коллинеарной геометрии наблюдения

- ❖ Был получен спектр элементарных возбуждений экситон-плазмонного типа

### **Положения, выносимые на защиту:**

- ✓ Получен новый общий гамильтониан непосредственного и косвенного взаимодействия, включающий в себя все возбужденные уровни Ландау, с учетом виртуальных парных возбуждений на разноименные и одноименные ВУЛ.
- ✓ При учете ВУЛ состояние БЭК 2D магнитоэкситонов с волновым вектором  $kl < 0.5$  является устойчивым в приближении Хартри-Фока-Боголюбова. При больших значениях волнового вектора  $kl > 0.5$  влияние когерентных возбужденных состояний является более важным и приводит к появлению метастабильной диэлектрической жидкой фазы [9]. Влияние ВУЛ в этой области незначительно.
- ✓ Поправки, возникшие из-за учета ВУЛ, понижают энергию, приходящуюся на одну  $e-h$  пару в составе ЭДК. Значение энергии приходящейся на одну пару в составе ЭДК, находится на энергетической шкале в окрестности значения химического потенциала БЭК магнитоэкситонов с волновым вектором  $kl \sim 3-4$  и, следовательно, сосуществование двух состояний возможно.
- ✓ Существуют осцилляции плотности в 2D структуре в пределах нижайшего уровня Ландау, несмотря на отсутствие кинетической энергии.
- ✓ Существует возможность формирования различных квазиэнергетических комплексов с различными значениями свободной энергии и различным затуханием.
- ✓ В электронно-дырочной системе существует два типа плазменных колебаний: оптические и акустические. В диапазоне малых значений волнового вектора акустическая ветвь плазменных колебаний имеет линейную зависимость. В диапазоне больших волновых векторов, спектр колебаний является монотонным с насыщением. Оптическая ветвь имеет квадратичную зависимость в диапазоне малых значений волнового вектора, немонотонное поведение ротонного типа в средней области и монотонное возрастание с насыщением при больших значениях волнового вектора.
- ✓ Спектр элементарных коллективных возбуждений в условиях БЭК магнитоэкситонов различен при учете и без учета концентрационных поправок. Это связано с участием плазменных ветвей спектра, квадрат энергии которых пропорционален концентрации носителей  $\frac{v^2}{2\pi l^2}$ , где  $v^2$  есть фактор заполнения. Без учета концентрационных поправок плазмоны отсутствуют. Химический потенциал не имеет

концентрационных поправок и экситонный спектр элементарных возбуждений такой же, как у идеального экситонного газа, но с волновым вектором  $k \neq 0$ . Из-за присутствия Бозе-конденсата имеются две экситонные ветви спектра, одна энергетическая, а другая квазиэнергетическая. Учет концентрационных поправок добавляет две плазменные ветви спектра с энергиями отличными от нуля. Их две, так же благодаря присутствию конденсата. Экситонные ветви спектра преобразуются. Из-за изменения химического потенциала появляются энергетические щели у экситонных ветвей и что более существенно, меняется их число. Концентрационные добавки к экситонному спектру появляются в виде плазменных спутников с добавлением плазмона к энергии экситонных ветвей и с отнятием энергии плазмона от энергии экситонных ветвей. Экситонные ветви теперь превращаются в экситон-плазменные ветви и их число отличается от числа исходных экситонных ветвей.

**Теоретическая и практическая значимость работы состоит в следующем:**

- 1) Теоретически изучены:
  - a) Виртуальные переходы квазичастиц с НУЛ на ВУЛ и их влияние на БЭК и ЭДЖ.
  - b) Плазменные колебания двумерной электронно-дырочной жидкости в пределах нижайшего уровня Ландау.
  - c) Элементарные коллективные возбуждения 2D магнитоэкситонов в условиях БЭК и образования метастабильной диэлектрической жидкости.
- 2) Разработаны эффективные аналитические методы, которые позволили:
  - a) Получить эффективный гамильтониан взаимодействия двумерных электронов и дырок, находящихся на нижайшем уровне Ландау
  - b) Сделать расщепление для цепочек уравнений функций Грина
  - c) Применить идеи метода квазисредних Н.Н.Боголюбова для нарушения калибровочной симметрии исходного гамильтониана.
  - d) Избрать коллинеарную геометрию наблюдения для рассмотрения элементарных коллективных возбуждений в случае больших волновых векторов конденсата.

**Апробация результатов.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Международных конференциях: 2<sup>nd</sup> International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics (dedicated to the 40<sup>th</sup> anniversary of Institute of Applied Physics of the Academy of Sciences of Moldova), Kishinev, Moldova, September 21-26, 2004; ICONO – 2005 conference 11 – 15 May St.Petersburg Russia ICONO / LAT – SYS – 2005; Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005", Физический факультет МГУ, 15-17 апреля 2005; Conferința fizicienilor din Moldova CFM-2005, Chișinău, R. Moldova, 19-20 octombrie 2005; 4-th International Conference on "Microelectronics and Computer Science", Chisinau, Moldova, September 15-17, 2005; Научная конференция молодых ученых, Физический факультет МГУ, 15-17 сентября 2005; 3<sup>rd</sup> Intern. Conf. Mat. Sci. Chișinău, Moldova Cond. Mat. Phys., 2006; Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых «Ломоносов-2006», 12-16 апреля 2006 г., МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва; Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых «Ломоносов-2007», 11-14 апреля 2007г., МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва; 3 Ukrainian Conference on Semiconductor Physics, 17-22 June 2007, Odessa, Ukraine; Conferința fizicienilor din Moldova CFM-2007, Chișinău, R. Moldova, 11-12 octombrie 2007; Conference dedicated to prof. E.P. Pokatilov, 8 June 2007, Chisinau; International Conference of Young Researchers, November 9, 2007, Chisinau Moldova; Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых «Ломоносов-2008», 8-11 апреля 2008г., МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва; 4<sup>th</sup> International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics, Kishinev, Moldova, September 23-26, 2008

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в 25 научных работах, список которых приводится в конце диссертации.

**Структура и объём работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав с оригинальными научными результатами, общих выводов и списка цитируемой литературы. Работа содержит 105 страницы, 15 рисунков, и 68 литературных ссылок.

✳ **В Главе 1** Были изучены двумерные  $e$ - $h$  системы в присутствии сильного перпендикулярного магнитного поля. Было изучено влияние виртуальных квантовых переходов двух взаимодействующих частиц с нижайшего уровня Ландау на возбужденные (с произвольным значением номеров уровней Ландау  $n$  и  $m$ ) и обратно. Такие виртуальные переходы во втором порядке теории возмущения



приводят к дополнительному косвенному взаимодействию. Влияния этого косвенного взаимодействия на химический потенциал БЭК магнитоэкситонов и на основное состояние электронно-дырочной жидкости металлического типа было изучено в хартри-фоковском приближении. Дополнительное электрон-электронное и дырка-дырочное взаимодействие увеличивает энергию связи магнитоэкситона и энергию приходящуюся на одну e-h пару в составе ЭДЖ. Члены, полученные в результате обменного взаимодействия, приводят к отталкиванию и стабилизируют БЭК магнитоэкситонов при малых значениях волнового вектора конденсата.

✿ **В Главе 2** Были рассмотрены возбуждения двумерной электронно-дырочной жидкости в пределах нижайшего уровня Ландау. Возбуждения такого типа характеризуются двумя ветвями энергетического спектра. Акустическая плазменная ветвь спектра колебаний электронов и дырок имеет линейный закон дисперсии в диапазоне малых значений волнового вектора, скорость которой не зависит от величины магнитного поля, и монотонно возрастает с насыщением в диапазоне больших значений волнового вектора. Оптическая плазменная ветвь колебаний электронов и дырок имеет квадратичную зависимость в диапазоне малых значений волнового вектора, поведение ротонного типа для средних значений волнового вектора и монотонно возрастает с насыщением в диапазоне больших значений волнового вектора, так же как и акустическая ветвь. Теория возмущения в рамках метода функций Грина была построена по малому параметру  $v^2(1-v^2)$ , где  $v^2$  - фактор заполнения, а  $(1-v^2)$  отражает степень заполнения фазового пространства.

✿ **В Главе 3** Был исследован спектр коллективных элементарных возбуждений в системе БЭК магнитоэкситонов. Было выведено дисперсионное уравнение в коллинеарной геометрии наблюдения.

$$\Sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)\Sigma_{22}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)\Sigma_{44}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) - 2\eta^2(\Sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) + \Sigma_{22}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)) = 0$$

Была изучена БЭК на одночастичное состояние экситона с безразмерным волновым вектором  $kl \approx 3,6$ , так как в этих условиях метастабильная диэлектрическая жидкость имеет минимальную энергию и положительную сжимаемость при факторе заполнения  $v_m^2 \approx 0,28$ . Для описания внутри уровневых возбуждений мы используем теорию возмущения по малому параметру. Он выражается через фактор заполнения и отражает принцип исключения Паули и имеет вид  $v^2(1-v^2)$ , где  $v^2$  - фактор заполнения нижайшего уровня Ландау ( $0 < v^2 < 1$ ). Такого типа параметры характерны для теории Бозе-газов. При факторе заполнения  $v^2 = 1$  могут появиться возбуждения между НУЛаами и более высокими уровнями Ландау, этот вопрос не был

изучен. Поправками более высокого порядка теории возмущения пренебрегли. Цепочки уравнений для функций Грина расцепляются таким образом, что трехоператорные функции Грина выражаются через однооператорные, умноженные на среднее значение от произведения остальных двух операторов по основному состоянию системы.

# Глава 1. Гамильтониан взаимодействия двумерных электронов и дырок в сильном магнитном поле с учетом возбужденных уровней Ландау

## *1.1. Матричные элементы кулоновского взаимодействия на волновых функциях электронов в сильном магнитном поле.*

Свойства атомов и экситонов сильно меняются в сильных магнитных полях, так что расстояние между уровнями Ландау  $\hbar\omega_c$  становится больше чем энергия Ридберга, а магнитная длина  $l = \sqrt{\hbar c / eH}$  меньше Боровского радиуса экситона [16, 17]. Так же, много интересных явлений наблюдается в случае двумерных электронных систем из-за подавления кинетической энергии в присутствии сильного магнитного поля, например, дробный квантовый эффект Холла [18, 19]. В калибровке Ландау можно ввести квантовые числа, характеризующие номер уровня Ландау, когда квантования Ландау в плоскости происходит в одном направлении лежащем в плоскости двумерной структуры и волновой вектор, описывающий свободное движение, в другом направлении лежащем в плоскости, перпендикулярном предыдущему. Несмотря на существование волнового вектора, кинетическая энергия не существует, так как она преобразуется магнитным полем в потенциальную энергию частиц в направлении квантования. Волновые вектора определяют положение центров движения, вокруг которых происходит квантование Ландау. В пределе больших значений магнитного поля, внешние силы, действующие на частицы, затрагивают только медленное дрейфовое движение, в то время как большая кинетическая энергия, связанная с вращением и квантованная в единицах  $\hbar\omega_c$  остается неизменной. Поиск БЭК есть основной вопрос в физике конденсированных состояний [21]. Интересные свойства сверхтекучести и сверхпроводимости тесным образом связаны с существованием бозонного конденсата композитных частиц, состоящих из четного числа фермионов. При возбуждениях в полупроводниках, роль этих сложных бозонов выполняют экситоны, которые являются связанным состоянием электронов и дырок. Кроме того, экситонная система рассматривается как базовая система для исследования явлений БЭК, так как в таких системах можно управлять плотностью частиц и взаимодействием между ними. Многообещающими кандидатами для реализации эксперимента являются квантовые ямы(КЯ) [25], которые имеют множество преимуществ по сравнению с объемными системами. В [9] был изучен случай, когда происходит когерентное спаривание  $e$  и  $h$ , занимающих НУЛ. При этом был использован метод Келдыша-Козлова-Копяева и приближение случайных фаз. При обсуждении БЭК магнитоэкситонов предполагается, что экситон с волновым вектором  $k$  образован из электрона в зоне проводимости и дырки в валентной зоне в пределах одной и той же потенциальной ямы. Предполагается что уровень

размерного квантования в квантовой яме больше чем квантование Ландау. В [9, 10] было показано, что в случае  $k \neq 0$  образуется метастабильная фаза диэлектрической жидкости. В этом случае энергия основного состояния, приходящаяся на один экситон и химический потенциал – немонотонные функции, зависящие от фактора заполнения  $\nu^2$  НУЛ, причем относительный минимум с положительной сжимаемостью появляется в окрестностях некоторого фактора заполнения. Такая диэлектрическая жидкость является более устойчивой чем электронно-дырочная жидкость металлического типа [9]. Поляризуемость БЭК магнитоэкситонов была рассчитана в [9], используя волновые функции андерсоновского типа для когерентных возбужденных состояний. Поляризуемость конденсированной фазы используется для того, чтобы определить корреляционную энергию и поправки к химическому потенциалу в более точной аппроксимации чем приближение Хартри-Фока-Боголюбова. Наряду с когерентными возбужденными состояниями, так же был поставлен вопрос о влиянии возбужденных уровней Ландау на энергию основного состояния и на химический потенциал. Впервые важность такого влияния была замечена авторами [5-8]. В [10] удалось учесть лишь влияние первого ВУЛ электронов и дырок. В результате виртуального перехода заряженных частиц с НУЛа на первые ВУЛы и их обратного перехода появляется дополнительное косвенное взаимодействие между электронами (e-e), между дырками (h-h) и между электронами и дырками (e-h), как результат кулоновского рассеяния. Такое рассеивание было изучено с помощью теории возмущения. Но детального многостороннего исследования этого вопроса с учетом всех возбужденных уровней Ландау до сих пор не существовало и этот пробел впервые устранен в настоящей диссертации.

Мы рассматриваем 2D полупроводниковую структуру в сильном перпендикулярном магнитном поле, предполагая, что расстояние между уровнями Ландау является достаточно большим и превышает ионизационный потенциал  $I_1$  магнитоэкситона с волновым вектором  $k = 0$ , тогда как магнитная длина  $l$  является меньше чем боровский радиус 2D экситона  $a_{ex}^{2D}$  ( $l < a_{ex}^{2D}$ ). Плоскость нашего слоя выбрана в плоскости  $(x, y)$ , а магнитное поле направлено по оси  $z$ , а векторный потенциал выберем в калибровке Ландау  $A = (-Hy, 0, 0)$ . Подобно [6-9] волновые функции для электронов и дырок вдоль направления оси  $y$  будут характеризоваться квантовыми числами  $n, m = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$  характеризующему номера квантовых уровней Ландау, а в направлении оси  $x$  - одномерными волновыми векторами  $p$  и  $q$ .

$$\begin{aligned}\psi_{n,p}^e(x, y) &= \frac{e^{ipx}}{\sqrt{L_x}} H_n(y - pl^2) \\ \psi_{m,q}^h(x, y) &= \frac{e^{iqx}}{\sqrt{L_x}} H_m(y - pl^2)\end{aligned}\quad (1.1)$$

Где  $L_x$  - это линейный размер 2D слоя в направлении оси  $x$ , а  $H_n(y)$  - эрмитовский полином. Состояния  $N$ -кратно вырождены.  $\omega_{ci}$  - частоты квантования.

$$N = \frac{S}{2\pi l^2}; \quad l^2 = \frac{\hbar c}{eH} \quad \omega_{ci} = \frac{eH}{m_i c}, \quad i = e, h \quad (1.2)$$

Здесь  $S$  – площадь поверхности,  $l$  - магнитная длина и  $m_i$  с  $i = e, h$  - массы электрона и дырки. Энергии электронов и дырок, отсчитанные от НУЛ равны  $n\hbar\omega_{ce}$  и  $m\hbar\omega_{ch}$ .

Приведем пример огибающих Блоховских волновых функции для электронов в зоне проводимости и в валентной зоне

$$\begin{aligned}\psi_{n=0,p}^e(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{L_x l \sqrt{\pi}}} e^{ipx} \exp\left[-\frac{(y - pl^2)^2}{2l^2}\right], \\ \psi_{n=1,p}^e(x, y) &= \frac{\sqrt{2}\left(\frac{y - pl^2}{l}\right)}{\sqrt{L_x l \sqrt{\pi}}} e^{ipx} \exp\left[-\frac{(y - pl^2)^2}{2l^2}\right], \\ \psi_{n=2,p}^e(x, y) &= \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2L_x l \sqrt{\pi}}} \left[-1 + 2\left(\frac{y - pl^2}{l}\right)^2\right] \exp\left[-\frac{(y - pl^2)^2}{2l^2}\right], \\ \psi_{n=3,p}^e(x, y) &= \frac{e^{ipx}}{\sqrt{3L_x l \sqrt{\pi}}} \left[2\left(\frac{y - pl^2}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{y - pl^2}{l}\right)\right] \exp\left[-\frac{(y - pl^2)^2}{2l^2}\right], \\ \psi_{n=4,p}^e(x, y) &= \frac{e^{ipx}}{2\sqrt{6L_x l \sqrt{\pi}}} \left[3 - 12\left(\frac{y - pl^2}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{y - pl^2}{l}\right)^4\right] \exp\left[-\frac{(y - pl^2)^2}{2l^2}\right]\end{aligned}$$

Задача о двух частицах в сильном магнитном поле, то есть задача о магнитоэкситоне, может быть решена аналитически, только если рассматривать кулоновское взаимодействие как возмущение, что подразумевает, что энергия между уровнями Ландау  $\hbar\omega_{ci}$  намного больше энергии электростатического взаимодействия, которая будет определена ниже. Если брать нулевое приближение и пренебречь кулоновским взаимодействием, то частицы у нас свободные в рамках НУЛ. Гамильтониан для электронов и дырок в представлении вторичного квантования содержит операторы рождения и уничтожения для электронов  $a_{n,p}^\dagger$ ,  $a_{n,p}$  и для дырок  $b_{n,q}^\dagger$ ,  $b_{n,q}$ . Так же мы предполагаем, что у нас система спинполяризованная и индексы спина можно опустить.

Полный гамильтониан  $\hat{H}$  состоит из гамильтониана нулевого приближения  $\hat{H}_0$  и гамильтониана кулоновского взаимодействия  $\hat{H}_{Coul}$ . Если ввести химические потенциалы для электронов  $\mu_e$  и для дырок  $\mu_h$ , и значения их энергий отсчитывается от соответствующих НУЛ, тогда гамильтониан нулевого приближения  $\hat{H}_0$  запишется как [10]:

$$\hat{H}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_p (n\hbar\omega_{ce} - \mu_e) a_{n,p}^\dagger a_{n,p} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_q (n\hbar\omega_{ch} - \mu_h) b_{n,q}^\dagger b_{n,q} \quad (1.3)$$

Тогда гамильтониан кулоновского взаимодействия имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{Coul} = & \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} \sum_{n,m,n',m'} [F_{e-e}(p,n;q,m;p-s,n';q+s,m') a_{n,p}^\dagger a_{m,q}^\dagger a_{m',q+s} a_{n',p-s} + \\ & + F_{h-h}(p,n;q,m;p-s,n';q+s,m') b_{n,p}^\dagger b_{m,q}^\dagger b_{m',q+s} b_{n',p-s}] - \\ & - \sum_{p,q,s} \sum_{n,m,n',m'} F_{e-h}(p,n;q,m;p-s,n';q+s,m') a_{n,p}^\dagger b_{m,q}^\dagger b_{m',q+s} a_{n',p-s} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где матричные элементы кулоновского взаимодействия определяются как:

$$\begin{aligned} F_{i-j}(p,n;q,m;p-s,n';q+s,m') = \\ = \int d\vec{\rho}_1 \int d\vec{\rho}_2 \psi_{n,p}^{i*}(\vec{\rho}_1) \psi_{m,q}^{j*}(\vec{\rho}_2) V_{12} \psi_{n',p-s}^i(\vec{\rho}_1) \psi_{m',q+s}^j(\vec{\rho}_2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

здесь:

$$\begin{aligned} V_{12} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 |\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2|}; \quad V_{12} = \sum_{\vec{\kappa}} V_{\vec{\kappa}} \exp[i\vec{\kappa}(\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2)]; \\ V_{\vec{\kappa}} = V_{\kappa_x, \kappa_y} = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon_0 S |\vec{\kappa}|} = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon_0 S \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Переменная  $\vec{\rho}_i$  - это двумерный вектор, а  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость среды. Периодические части полных блоховских функций были проинтегрированы по элементарной ячейки кристаллической решетки и исключены из финального выражения. Обменные кулоновские интегралы, связанные с квантовым переходом из валентной зоны в зону проводимости, и приводящие к расщеплению энергетических уровней орто и пара экситона, а также к продольно-поперечному расщеплению дипольно-активного экситона, были исключены из рассмотрения.

Матричные элементы кулоновского взаимодействия, описывающие только взаимодействие частиц находящихся на НУЛ, когда  $n = m = n' = m' = 0$  вносят вклад в главную часть гамильтониана взаимодействия, который запишем в виде  $H_{Coul}^{LLL}$ . Такая запись

использовалась во многих работах, включая [9-10]. В дальнейшем операторы рождения и уничтожения для  $n = m = 0$  будем обозначать как  $a_p^\dagger, a_p, b_p^\dagger, b_p$ .

Для начала были выведены матричные элементы кулоновского взаимодействия, описывающие виртуальный переход частиц с НУЛ на первый ВУЛ и обратное их возвращение на НУЛ с  $n, m, n', m' = 0, 1$ . Покажем вид некоторых из 48 возможных матричных элементов.

$$\begin{aligned}
 F_{i-i}(p, 1; q, 0; p-s, 0; q+s, 0) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \frac{(s-i\kappa)l}{\sqrt{2}} f(\kappa, p-q-s) \\
 F_{i-i}(p, 1; q, 1; p-s, 0; q+s, 0) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \frac{(i\kappa-s)^2 l^2}{2} f(\kappa, p-q-s) \\
 F_{i-i}(p, 1; q, 1; p-s, 1; q+s, 0) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \frac{(s-i\kappa)l}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{(s^2 + \kappa^2)l^2}{2} \right] f(\kappa, p-q-s) \\
 F_{i-i}(p, 1; q, 1; p-s, 1; q+s, 1) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \left[ 1 - \frac{(s^2 + \kappa^2)l^2}{2} \right]^2 f(\kappa, p-q-s)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Матричные элементы, описывающие электронно-дырочное взаимодействие будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 F_{e-h}(p, 1; q, 0; p-s, 0; q+s, 0) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \frac{(i\kappa-s)l}{\sqrt{2}} f(\kappa, p+q) \\
 F_{e-h}(p, 1; q, 1; p-s, 0; q+s, 0) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \frac{(s^2 + \kappa^2)l^2}{2} f(\kappa, p+q) \\
 F_{e-h}(p, 1; q, 1; p-s, 1; q+s, 0) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \frac{(i\kappa+s)l}{\sqrt{2}} \left[ 1 - \frac{(s^2 + \kappa^2)l^2}{2} \right] f(\kappa, p+q) \\
 F_{e-h}(p, 1; q, 1; p-s, 1; q+s, 1) &= \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} \left[ 1 - \frac{(s^2 + \kappa^2)l^2}{2} \right]^2 f(\kappa, p+q)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

В приведенных примерах использовались следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 W_{s, \kappa} &= V_{s, \kappa} \exp\left(-\frac{(\kappa^2 + s^2)l^2}{2}\right) \\
 f(\kappa, q) &= \exp(i\kappa ql^2)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

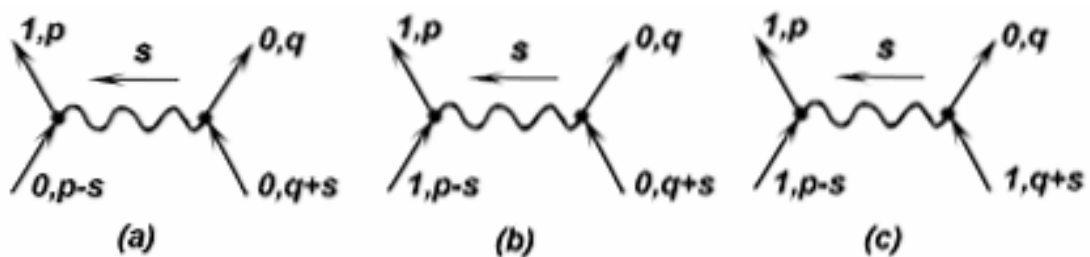


Рис.5 Диаграммы, описывающие кулоновское взаимодействие двух частиц.

Мы рассматриваем случай, когда в начальный момент времени обе частицы находились на НУЛах с  $n = m = 0$  и в результате кулоновского взаимодействия переходят на возбужденные состояния с  $n'$  и  $m'$ , и следующим шагом они возвращаются в начальные состояния. Эти два квантовых перехода описываются во втором порядке теории возмущения. Если следовать работе Пакета, Раиса и Уеды [8], тогда надо считать, что главную роль играют одновременные квантовые переходы частиц на уровни с  $n' = m' = n$ . На самом деле вопрос оказался сложнее. Мы же изучили случай с произвольными  $n' \neq m'$ . Эти виртуальные квантовые переходы приводят к косвенному взаимодействию между магнитоэкситонами и по существу влияют на все состояния образованные системой e-h большой плотности, в том числе на ЭДЖ и БЭК. Мы покажем, что виртуальные квантовые переходы и косвенные взаимодействия вносят вклад двух типов. Они оба зависят от волнового вектора магнитоэкситона, но один из них отличен от нуля в точке  $k = 0$ , тогда как другой в этой точке точно равняется нулю. Косвенные взаимодействия e-e и h-h вносят вклады, независимые от волнового вектора. Как мы отмечали, квантовые переходы типа  $n \neq m$  также должны быть приняты во внимание. Такие процессы описаны матричными элементами кулоновского взаимодействия.

$$F_{i-j}(p, 0; q, 0; p-s, n; q+s, m), F_{j-i}(p, 0; q, 0; p-s, n; q+s, m) \quad (1.10)$$

с  $i, j = e, h$

Приведем вид этих матричных элементов кулоновского взаимодействия, описывающих e-e и h-h взаимодействие:

$$\begin{aligned} F_{i-i}(p, n; q, m; p-s, 0; q+s, 0) &= \\ &= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2^{n+m} n! m!}} \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} e^{i\kappa(p-q-s)l^2} (-s + i\kappa)^{n+m} l^{n+m}; \\ F_{i-i}(p, 0; q, 0; p-s, n; q+s, m) &= \\ &= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2^{n+m} n! m!}} \sum_{\kappa} W_{s, \kappa} e^{i\kappa(p-q-s)l^2} (s + i\kappa)^{n+m} l^{n+m}; \end{aligned} \quad (1.11)$$

И e-h взаимодействие:

$$\begin{aligned} F_{e-h}(p, 0; q, 0; p-t, n; q+t, m) &= \frac{1}{(n! m! 2^{n+m})^{1/2}} \times \\ &\times \sum_{\kappa} W_{t, \kappa} e^{i\kappa(p+q)l^2} [t + i\kappa]^n [t - i\kappa]^m l^{n+m}; \\ F_{e-h}(p-t, n; q+t, m; p-z, 0; q+z, 0) &= \frac{1}{(n! m! 2^{n+m})^{1/2}} \times \\ &\times \sum_{\sigma} W_{t-z, \sigma} e^{i\sigma(p+q)l^2} [(t-z) + i\sigma]^n [(t-z) - i\sigma]^m l^{n+m}; \end{aligned} \quad (1.12)$$



Как было упомянуто выше, эти матричные элементы кулоновского взаимодействия определяют косвенное взаимодействие частиц, лежащих на НУЛах. Такое взаимодействие является притягивающим, и оно появляется во втором порядке теории возмущения. Первый ВУЛ  $n = m = 1$  был рассмотрен в работе [10]. Было показано, что это косвенное взаимодействие приводит к изменению энергетических уровней магнитоэкситона и влияет на БЭК. Мы обобщили результаты, полученные в работе [10] и впервые определили влияние всех ВУЛов с произвольным значением  $n$  и  $m$ .

## 1.2 . Исключение матричных элементов перехода на возбужденные уровни Ландау с помощью унитарного преобразования во втором порядке теории возмущения

В гамильтониане (1.4) мы выделим член  $H_{Coul}^{LLL}$ , содержащий только НУЛ и член, который описывает одновременные виртуальные перемещения  $(0,0) \rightleftharpoons (n,m)$ . В этом разделе мы выведем косвенное взаимодействие между заряженными частицами, происходящее от квантовых переходов с НУЛов на ВУЛы и обратно. Другими членами гамильтониана (1.4) пренебрежем.

Начальный гамильтониан запишется в виде:

$$H = H_0 + H_{Coul}^{LLL} + H_{Coul}^{ELL} \quad (1.13)$$

где  $H_0$  и  $H_{Coul}^{LLL}$  есть:

$$H_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p n \hbar \omega_{ce} c_{np}^\dagger c_{np} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p n \hbar \omega_{ch} d_{np}^\dagger d_{np}; \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} H_{Coul}^{LLL} = & \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} F_{e-e}(p,0;q,0;p-s,0;q+s,0) a_p^\dagger a_q^\dagger a_{q+s} a_{p-s} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} F_{h-h}(p,0;q,0;p-s,0;q+s,0) b_p^\dagger b_q^\dagger b_{q+s} b_{p-s} - \\ & - \sum_{p,q,s} F_{e-h}(p,0;q,0;p-s,0;q+s,0) a_p^\dagger b_q^\dagger b_{q+s} a_{p-s} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь энергия  $n \hbar \omega_{ci}$  отсчитывается от НУЛов. Ферми операторы рождения и уничтожения для электронов и дырок, лежащих на НУЛах обозначим через  $a_p^\dagger, a_p, b_p^\dagger, b_p$ , а Ферми операторы для частиц, лежащих на ВУЛах обозначим через  $c_{np}^\dagger, c_{np}, d_{np}^\dagger, d_{np}$ .

$H_{coul}^{ELL}$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
H_{Coul}^{ELL} = & \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{e-e}(p,n;q,m;p-s,0;q+s,0) c_{np}^\dagger c_{mq}^\dagger a_{q+s} a_{p-s} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{e-e}(p,0;q,0;p-s,n;q+s,m) a_p^\dagger a_q^\dagger c_{m,q+s} c_{n,p-s} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{h-h}(p,n;q,m;p-s,0;q+s,0) d_{np}^\dagger d_{mq}^\dagger b_{q+s} b_{p-s} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{h-h}(p,0;q,0;p-s,n;q+s,m) b_p^\dagger b_q^\dagger d_{m,q+s} d_{n,p-s} - \\
& - \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{e-h}(p,n;q,m;p-s,0;q+s,0) c_{np}^\dagger d_{mq}^\dagger b_{q+s} a_{p-s} - \\
& - \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{e-h}(p,0;q,0;p-s,n;q+s,m) a_p^\dagger b_q^\dagger d_{m,q+s} c_{n,p-s}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Можно убедиться, что гамильтониан (1.16) является эрмитовым:

$$\begin{aligned}
& \left[ \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{e-e}(p,n;q,m;p-s,0;q+s,0) c_{np}^\dagger c_{mq}^\dagger a_{q+s} a_{p-s} \right]^\dagger = \\
& = \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} F_{e-e}(p,0;q,0;p-s,n;q+s,m) a_p^\dagger a_q^\dagger c_{m,q+s} c_{n,p-s}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Это выражение справедливо, так как выполняется следующее равенство:

$$F_{e-e}(p,0;q,0;p-s,n;q+s,m) = F_{e-e}^*(p-s,n;q+s,m;p,0;q,0) \tag{1.18}$$

Гамильтониан  $H_{Coul}^{ELL}$  считается малым по сравнению с  $H_0$  и  $H_{Coul}$ , и будет исключен из выражения (1.13), используя унитарное преобразование [24]

$$\hat{U} = e^{i\hat{S}}; \quad \hat{S} = \hat{S}^\dagger \tag{1.19}$$

Тогда преобразованный гамильтониан имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
e^{-i\hat{S}} \hat{H} e^{i\hat{S}} = & H_0 + H_{Coul}^{LLL} + H_{Coul}^{ELL} + i[H_0, \hat{S}] + \\
& + i[H_{Coul}^{LLL}, \hat{S}] + i[H_{Coul}^{ELL}, \hat{S}] - \frac{1}{2} [[H_0, \hat{S}], \hat{S}] + \dots
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Он содержит неизвестный оператор  $\hat{S}$ , который найдем из условия:

$$i[\hat{H}_0, \hat{S}] + H_{Coul}^{ELL} = 0 \tag{1.21}$$

Это означает, что оператор  $\hat{S}$  также является малым в первом приближении и пропорционален матричным элементам кулоновского взаимодействия  $H_{Coul}^{ELL}$ . Оператор  $\hat{S}$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\hat{S} = & \sum_{p,q,s} \sum_{n,m} \{ S_{e-e}(p,q,s;n,m) a_p^\dagger a_q^\dagger c_{m,q+s} c_{n,p-s} + \\
& + \tilde{S}_{e-e}(p,q,s;n,m) c_{np}^\dagger c_{mq}^\dagger a_{q+s} a_{p-s} + S_{h-h}(p,q,s;n,m) b_p^\dagger b_q^\dagger d_{m,q+s} d_{n,p-s} + \\
& + \tilde{S}_{h-h}(p,q,s;n,m) d_{np}^\dagger d_{mq}^\dagger b_{q+s} b_{p-s} + S_{e-h}(p,q,s;n,m) a_p^\dagger b_q^\dagger d_{m,q+s} c_{n,p-s} + \\
& + \tilde{S}_{e-h}(p,q,s;n,m) c_{np}^\dagger d_{mq}^\dagger b_{q+s} a_{p-s} \}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Исходя из условия (1.21) найдем  $S_{i-j}(p,q,s;n,m)$  и  $\tilde{S}_{i-j}(p,q,s;n,m)$ :

$$\begin{aligned}
S_{i-i}(p,q,s;n,m) &= -\frac{i}{2(n+m)\hbar\omega_{ci}} F_{i-i}(p,0;q,0;p-s,n;q+s,m) \\
\tilde{S}_{i-i}(p,q,s;n,m) &= \frac{i}{2(n+m)\hbar\omega_{ci}} F_{i-i}(p,n;q,m;p-s,0;q+s,0) \\
S_{e-h}(p,q,s;n,m) &= \frac{i}{(n\hbar\omega_{ce} + m\hbar\omega_{ch})} F_{e-h}(p,0;q,0;p-s,n;q+s,m) \\
\tilde{S}_{e-h}(p,q,s;n,m) &= -\frac{i}{(n\hbar\omega_{ce} + m\hbar\omega_{ch})} F_{e-h}(p,n;q,m;p-s,0;q+s,0) \\
i &= e, h
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Эти коэффициенты удовлетворяют условию  $\hat{S}^\dagger = \hat{S}$ . Преобразованный гамильтониан (1.20) после произведенного преобразования [24] должен быть усреднен, используя волновые функции основного состояния электронов и дырок, находящихся на ВУЛах  $|0\rangle_{ELL}$ . При этом соблюдается равенство:

$$c_{np} |0\rangle_{ELL} = d_{np} |0\rangle_{ELL} = 0 \tag{1.24}$$

Новый преобразованный гамильтониан  $H_{eff}$  запишется как:

$$H_{eff} = {}_{ELL} \langle 0 | e^{-iS} \hat{H} e^{iS} | 0 \rangle_{ELL} \cong H_{Coul}^{LLL} + \frac{i}{2} {}_{ELL} \langle 0 | [H_{Coul}^{ELL}, \hat{S}] | 0 \rangle_{ELL} \tag{1.25}$$

Тогда можем записать терм описывающий дополнительное косвенное взаимодействие:

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2} {}_{ELL} \langle 0 | [H_{Coul}^{ELL}, \hat{S}] | 0 \rangle_{ELL} &= -\frac{1}{2} \sum_{p,q,z} \phi_{e-e}(p,q,z) a_p^\dagger a_q^\dagger a_{q+z} a_{p-z} - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{p,q,z} \phi_{h-h}(p,q,z) b_p^\dagger b_q^\dagger b_{q+z} b_{p-z} - \sum_{p,q,z} \phi_{e-h}(p,q,z) a_p^\dagger b_q^\dagger b_{q+z} a_{p-z}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Где коэффициенты  $\phi_{i-j}(p,q,z)$  записываются через следующие выражения:

$$\phi_{i-j}(p,q,z) = \sum_{n,m} \frac{\phi_{i-j}(p,q,z;n,m)}{n\hbar\omega_{ci} + m\hbar\omega_{cj}} \tag{1.27}$$

А коэффициенты  $\phi_{i-j}(p,q,z;n,m)$ , в свою очередь, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi_{i-j}(p, q, z; n, m) = \sum_t F_{i-j}(p, 0; q, 0; p-t, n; q+t, m) \times \\ \times F_{i-j}(p-t, n; q+t, m; p-z, 0; q+z, 0) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Введем в гамильтониан химические потенциалы для электронов и дырок и запишем новый эффективный гамильтониан в виде:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} = -\mu_e \sum_p a_p^\dagger a_p - \mu_h \sum_p b_p^\dagger b_p + H_{Coul}^{LLL} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} \phi_{e-e}(p, q, s) a_p^\dagger a_q^\dagger a_{q+s} a_{p-s} - \frac{1}{2} \sum_{p,q,s} \phi_{h-h}(p, q, s) b_p^\dagger b_q^\dagger b_{q+s} b_{p-s} - \\ - \sum_{p,q,s} \phi_{e-h}(p, q, s) a_p^\dagger b_q^\dagger b_{q+s} a_{p-s} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Новый эффективный гамильтониан кроме кулоновского взаимодействия  $H_{Coul}^{LLL}$ , так же содержит дополнительное косвенное притягивающее взаимодействие.

### 1.3. Эффективный гамильтониан взаимодействия двумерных электронов и дырок находящиеся на нижайших уровнях Ландау.

Рассмотрим более подробно вид членов входящих в новый эффективный гамильтониан описывающих дополнительное косвенное взаимодействие.

Для начала рассмотрим коэффициенты, описывающие электронно-дырочное взаимодействие и приводящие к виртуальным переходам  $(0,0) \rightleftharpoons (n,m)$  e-h пары. Для этого случая были рассчитаны и получены рекуррентные выражения (1.12). На их основе можно получить желаемые коэффициенты  $\phi_{e-h}(p, q, z; n, m)$ .

$$\phi_{e-h}(p, q, z; n, m) = \frac{1}{n!m!2^{n+m}} \sum_t \sum_\kappa \sum_\sigma W_{t,\kappa} W_{t-z,\sigma} e^{i(\kappa+\sigma)(p+q)l^2} \times \quad (1.30)$$

$$\times (t+i\kappa)^n (t-i\kappa)^m [(t-z)+i\sigma]^n [(t-z)-i\sigma]^m l^{2(n+m)}$$

Явное аналитическое выражение для этих коэффициентов не было получено, будучи очень сложным для расчетов. Но в процессе работы мы определили влияние косвенного взаимодействия на энергию основного состояния, а так же влияние на значения химического потенциала  $\mu = \mu_e + \mu_h$ . Это влияние определено через сумму, для частного случая, когда  $p+q = k_x$

$$\sum_z \phi_{e-h}(p, k_x - p; z, n, m) e^{-ik_y z l^2} \quad (1.31)$$

Где  $k_x$  и  $k_y$  - компоненты двумерного волнового вектора  $\vec{k}(k_x, k_y)$ , на который происходит БЭК магнитоэкситонов. Суммирование по значениям одномерного волнового вектора  $z$  было преобразовано в интегрирование, с помощью следующих формул:

$$\sum_z = \frac{L_x}{2\pi} \int dz; \quad W_{t,s} = V_{t,\kappa} e^{-(t^2+\kappa^2)l^2}; \quad V_{t,\kappa} = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 S \sqrt{t^2 + \kappa^2}}; \quad (1.32)$$

$$S = L_x L_y; \quad I_l = \frac{e^2}{\epsilon_0 l} \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

В результате их использования мы получим:

$$\sum_z \phi_{e-h}(p, k_x - p, z, n, m) e^{-ik_y z l^2} = \frac{I_l^2 (kl)^{2|n-m|} e^{-k^2 l^2}}{\pi n! m! 2^{|n-m|}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{m+n+|n-m|+1}{2}\right)}{\Gamma(|n-m|+1)} \right]^2 \times$$

$$\times \left[ {}_1F_1\left(\frac{|n-m|+1-(n+m)}{2}; |n-m|+1; \frac{(kl)^2}{2}\right) \right]^2 \quad (1.33)$$

В случае  $n = m$  имеем:

$$\sum_z \phi_{e-h}(p, k_x - p, z, n, n) e^{-ik_y z l^2} = \frac{I_l^2 e^{-k^2 l^2}}{\pi (n!)^2} \left[ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^2 \times$$

$$\times \left[ {}_1F_1\left(-n + \frac{1}{2}; 1; \frac{(kl)^2}{2}\right) \right]^2 \quad (1.34)$$

Формулы (1.33) и (1.34) предварительны и они приводят к итоговой формуле:

$$\Delta(k) = \sum_z \phi_{e-h}(p, k_x - p, z) e^{-ik_y z l^2} = \frac{I_l^2 e^{-k^2 l^2}}{\pi} \sum_{n,m} \frac{(kl)^{2|n-m|}}{n! m! 2^{|n-m|} (n\hbar\omega_{ce} + m\hbar\omega_{ch})} \times$$

$$\times \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{m+n+|n-m|+1}{2}\right)}{\Gamma(|n-m|+1)} \right]^2 \left[ {}_1F_1\left(\frac{|n-m|+1-(n+m)}{2}; |n-m|+1; \frac{(kl)^2}{2}\right) \right]^2 \quad (1.35)$$

Это выражение обобщает и полученный более ранний результат [17]

$$\Delta'(k) = \frac{I_l^2 e^{-k^2 l^2}}{\pi (\hbar\omega_{ce} + \hbar\omega_{ch})} \sum_n \frac{\left[ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^2}{(n!)^2 n} \left[ {}_1F_1\left(-n + \frac{1}{2}; 1; \frac{(kl)^2}{2}\right) \right]^2 \quad (1.36)$$

Принимая во внимание, что в точке  $kl = 0$  гипергеометрическая функция равняется единице

${}_1F_1\left(-n + \frac{1}{2}; 1; 0\right) = 1$ , можно записать:

$$\Delta(0) = \Delta'(0) = \frac{I_l^2}{\pi} \sum_n \frac{\left[ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^2}{n(n!)^2} \frac{1}{(\hbar\omega_{ce} + \hbar\omega_{ch})} =$$

$$= \frac{I_l^2}{\pi (\hbar\omega_{ce} + \hbar\omega_{ch})} \sum_{n \geq 1} \frac{\left[ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \right]^2}{n(n!)^2} \quad (1.37)$$

В точке  $k = 0$  вклады виртуальных переходов с  $n \neq m$  обращаются в нуль и остается только терм с  $n = m$ . Но при  $k \neq 0$  формула (1.35) является основной рабочей формулой.

Теперь вернемся к вкладам, вносимыми виртуальными переходами с участием  $e$ -е и  $h$ - $h$ , и определяемыми коэффициентами  $\phi_{e-e}$  и  $\phi_{h-h}$ . Для этого воспользуемся формулами (1.11).

Множитель  $(-s + i\kappa)^{n+m}(-1)^m$  можно записать несколькими способами:

$$(-s + i\kappa)^{n+m}(-1)^m = (s - i\kappa)^{n+m}(-1)^n = (-s + i\kappa)^n (s - i\kappa)^m \quad (1.38)$$

Выражения для  $\phi_{i-i}(p, q, z, n, m)$  (1.28) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi_{i-i}(p, q, z, n, m) &= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \sum_t \sum_\kappa \sum_\sigma W_{t,\kappa} W_{z-t,\sigma} e^{i\kappa(p-q-t)l^2} e^{i\sigma(p-q-t-z)l^2} \times \\ &\times (t + i\kappa)^{n+m} (t - z + i\sigma)^{n+m} l^{2(n+m)} \end{aligned} \quad (1.39)$$

После того как просуммируем по квантовым числам  $n$  и  $m$  коэффициенты (1.28) с  $i = j$  будут выглядеть как

$$\begin{aligned} \phi_{i-i}(p, q, z) &= \sum_{n,m} \frac{1}{2^{n+m} n! m! (n+m) \hbar \omega_{ci}} \times \\ &\times \sum_t \sum_\kappa \sum_\sigma W_{t,\kappa} W_{z-t,\sigma} e^{i\kappa(p-q-t)l^2} e^{i\sigma(p-q-t-z)l^2} (t + i\kappa)^{n+m} (t - z + i\sigma)^{n+m} l^{2(n+m)} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Это сложное выражение. Но влияние косвенного взаимодействия на БЭК магнитоэкситонов определяется суммой недиагональных матричных элементов вида:

$$\begin{aligned} \sum_z \phi_{i-i}(p, p-z, z) &= \sum_{n,m} \frac{1}{2^{n+m} n! m! (n+m) \hbar \omega_{ci}} \times \\ &\times \sum_t \sum_s \sum_\kappa \sum_\sigma W_{t,\kappa} W_{s,\sigma} e^{i(\kappa s - \sigma t)l^2} (t + i\kappa)^{n+m} (-s + i\sigma)^{n+m} l^{2(n+m)} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Вводя двумерные волновые вектора  $\vec{P}(s, \sigma)$  и  $\vec{Q}(t, \kappa)$ , а так же углы  $\varphi$  и  $\psi$ , такие что  $\theta = \varphi - \psi$ ,  $t = Q \cos \varphi$ ;  $\kappa = Q \sin \varphi$ ;  $s = P \cos \psi$ ;  $\sigma = P \sin \psi$ , мы преобразуем (1.41) следующим образом:

$$\begin{aligned} J(n, m) &= \sum_{t,s} \sum_{\kappa,\sigma} W_{t,\kappa} W_{s,\sigma} e^{i(\kappa s - \sigma t)l^2} (t + i\kappa)^{n+m} (-s + i\sigma)^{n+m} l^{2(n+m)} = \\ &= (-1)^{n+m} \sum_{\vec{P}} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{P}} e^{iPQl^2 \sin \theta} (QP l^2)^{m+n} e^{i\theta(n+m)} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Используя переменные  $x = Pl$  и  $y = Ql$ , и принимая во внимания соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{P}} &= \frac{S}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{P} = \frac{S}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\infty p dp; \\ W_{\vec{P}} &= \frac{2\pi e^2}{\varepsilon_0 S |\vec{p}|} e^{-\frac{p^2 l^2}{2}}; I_l = \frac{e^2}{\varepsilon_0 l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

мы можем переписать (1.42) в виде:



$$L(n+m) = (-1)^{n+m} \frac{2I_l^2}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-\frac{x^2}{2}} x^{n+m} \int_0^\infty dy e^{-\frac{y^2}{2}} y^{n+m} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ixy \sin \theta} e^{i\theta(n+m)} \quad (1.44)$$

Интеграл по углу  $\theta$  может быть рассчитан, используя разложение в ряд:

$$e^{iz \sin \theta} = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos(2k\theta) + 2i \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin((2k+1)\theta) \quad (1.45)$$

что позволяет вычислить интеграл в независимости от того, четна или не четна сумма  $(n+m)$

$$\frac{(-1)^{n+m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ixy \sin \theta} e^{i\theta(n+m)} = J_{n+m}(xy) \quad (1.46)$$

Где  $J_{n+m}(xy)$  - функция Бесселя.

После данных преобразований, интегралы (1.44) и (1.41) запишутся в виде:

$$L(n+m) = \frac{2I_l^2}{\pi} \int_0^\infty dx e^{-\frac{x^2}{2}} x^{n+m} \int_0^\infty dy e^{-\frac{y^2}{2}} y^{n+m} J_{n+m}(xy) \quad (1.47)$$

и

$$\sum_z \phi_{i-i}(p, p-z, z) = \frac{2I_l^2}{\pi \hbar \omega_{ci}} \sum_{n,m} \frac{1}{2^{n+m} n! m! (n+m)} \times$$

$$\times \int_0^\infty dx e^{-\frac{x^2}{2}} x^{n+m} \int_0^\infty dy e^{-\frac{y^2}{2}} y^{n+m} J_{n+m}(xy) \quad (1.48)$$

В случае  $n = m$  под знаком суммы имеем:

$$\frac{I_l^2}{\pi \hbar \omega_{ci}} \frac{1}{(2^n n!)^2 n} A_{2n}^{2n, 2n} \quad (1.49)$$

Мы запишем общий случай, когда  $n \neq m$ , тогда вместо интеграла  $A_{2n}^{2n, 2n}$ , появится более

общий интеграл  $A_{n+m}^{n+m, n+m}$

$$A_{(n+m)}^{(n+m), (n+m)} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} (xy)^{n+m} J_{n+m}(xy) \quad (1.50)$$

Тогда наше выражение (1.48) запишется как:

$$\sum_z \phi_{i-i}(p, p-z, z) = \frac{2I_l^2}{\pi \hbar \omega_{ci}} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{A_{(n+m)}^{(n+m), (n+m)}}{2^{n+m} n! m! (n+m)} \quad (1.51)$$

Интеграл (1.50) может быть преобразован, используя двумерные полярные координаты:

$$\begin{aligned}
x &= \rho \cos \varphi; & y &= \rho \sin \varphi; \\
xy &= \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi; & z &= \frac{\rho^2}{2}; & x^2 + y^2 &= \rho^2;
\end{aligned} \tag{1.52}$$

что приводит к:

$$\begin{aligned}
A_{(n+m)}^{(n+m),(n+m)} &= \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\right)^{n+m} e^{-\frac{\rho^2}{2}} (\sin 2\varphi)^{n+m} J_{(n+m)}\left(\frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi\right) = \\
&= \int_0^\infty dz e^{-z} z^{(n+m)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (\sin 2\varphi)^{(n+m)} J_{n+m}(z \sin 2\varphi)
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Примем во внимание сведения об интегралах, содержащихся в [22] и получим:

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{(n+m)} J_{(n+m)}(z \sin 2\varphi) dz = \frac{2^{(n+m)} (\sin 2\varphi)^{n+m} \Gamma(n+m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (1 + \sin^2 2\varphi)^{n+m + \frac{1}{2}}} \tag{1.54}$$

Тогда (1.53) запишется как:

$$\begin{aligned}
A_{(n+m)}^{(n+m),(n+m)} &= \frac{2^{n+m} \Gamma(n+m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{(\sin 2\varphi)^{2(n+m)}}{(1 + \sin^2 2\varphi)^{n+m + \frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{2^{n+m} \Gamma(n+m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{(\sin \psi)^{2(n+m)}}{(1 + \alpha \sin^2 \psi)^{n+m + \frac{1}{2}}} \Bigg|_{\alpha=1}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

После этого введем полный эллиптический интеграл первого рода  $K(\kappa)$  [22]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(1 + \alpha \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1 + \alpha)^{\frac{1}{2}}} K \left( \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{1.56}$$

где  $\kappa(\alpha) = \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$  - модуль полных эллиптических интегралов  $K(\kappa)$  и  $E(\kappa)$ . Тогда можно

выразить интегралы  $A_{(n+m)}^{(n+m),(n+m)}$  следующим образом:

$$A_{(n+m)}^{(n+m),(n+m)} = 2^{n+m} \frac{d^{n+m}}{d\alpha^{n+m}} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} K \left( \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|_{\alpha=1} \tag{1.57}$$

При этом использовалось следующее равенство

$$\Gamma \left( n + m + \frac{1}{2} \right) = \frac{(2(n+m) - 1)!! \sqrt{\pi}}{2^{n+m}} \tag{1.58}$$

Полные производные эллиптических интегралов по модулю  $\kappa$  выглядят следующим образом:

$$\frac{dK(\kappa)}{d\kappa} = \frac{E(\kappa)}{\kappa(1-\kappa^2)} - \frac{K(\kappa)}{\kappa} \quad (1.59)$$

$$\frac{dE(\kappa)}{d\kappa} = \frac{E(\kappa) - K(\kappa)}{\kappa}$$

где модуль эллиптической функции равен  $\kappa(\alpha)|_{\alpha=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Таким образом, мы получили желаемое выражение (1.51):

$$B = B_{i-i} = \sum_s \phi_{i-i}(p, p-s, s) = \frac{2I_l^2}{\pi\hbar\omega_c} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{A_{n+m}^{n+m, n+m}}{2^{n+m} n! m! (n+m)} = \frac{2I_l^2}{\pi\hbar\omega_c} T; \quad (1.60)$$

$$T = 0.2161$$

Кроме того, нам необходима сумма диагональных матричных элементов косвенного e-h взаимодействия:

$$A_{e-h} = \sum_q \phi_{e-h}(p, q; 0) = \frac{I_l^2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{(n+m-1)!}{2^{n+m} n! m! (n\hbar\omega_{ce} + m\hbar\omega_{ch})} \quad (1.61)$$

Сумма  $A_{e-h}$  может быть переписана для случая  $\omega_{ce} = \omega_{ch} = \omega_c$  (будем считать, что циклотронные частоты для электрона и дырки одинаковы):

$$A_{e-h} = \frac{I_l^2}{\pi\hbar\omega_c} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{(n+m-1)!}{2^{n+m} n! m! (n+m)} = \frac{I_l^2}{\pi\hbar\omega_c} S \quad (1.62)$$

Здесь

$$S = \frac{1}{2} \ln^2 2 - \frac{\pi^2}{12} + 1.06269 \approx 0,481 \quad (1.63)$$

В результате сумма диагональных матричных элементов, которая определяет вклады хартриевского типа косвенного взаимодействия, имеет вид:

$$A = A_{i-j} = \sum_p \phi_{i-j}(p, q, 0) = \frac{I_l^2}{\pi\hbar\omega_c} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{(n+m-1)!}{2^{n+m} n! m! (n+m)} = \frac{I_l^2}{\pi\hbar\omega_c} S; \quad (1.64)$$

$$S = 0.481$$

Полученные члены будут использованы для того, чтобы определить коллективные свойства электронно-дырочной системы. Точнее два ее различных основных состояния, такие как БЭК магнитоэкситонов и ЭДЖ.

#### 1.4. Влияние возбужденных уровней Ландау на химический потенциал бозеконденсированных двумерных магнитоэкситонов и основное состояние ЭДЖ

Дополнительное косвенное взаимодействие, введенное в гамильтониан (1.29), существенным образом влияет на коллективные свойства 2D e-h системы. Мы рассмотрим два альтернативных состояния, а именно БЭК магнитоэкситона и электронно-дырочная жидкость металлического типа. Оба этих состояния были получены в Хартри-Фоковском(ХФ) приближении. Косвенное взаимодействие между частицами в e-h системах отличаются от кулоновского взаимодействия. Усреднение кулоновского взаимодействия в ХФ приближении приводит к прямому спариванию, в случае хартриевских членов, или же к обменному спариванию, в случае фоковских членов. Условие электронейтральности e-h системы приводит к тому, что терм прямого спаривания кулоновского взаимодействия e-e, h-h и e-h полностью компенсируют друг друга, тогда как кулоновское обменное взаимодействие e-e и h-h отрицательно. Они приводят к притяжению в системе и способствуют созданию коррелированной e-h плазмы и e-h жидкости. Дополнительное притяжение в системе увеличивает энергию связи магнитоэкситона и в то же самое время понижает энергию, приходящую на одну пару в ЭДЖ. Мы сравним эти два процесса. Однако обменные члены гамильтониана косвенного притяжения вызывает дополнительно отталкивание в e-h системе. Оно стабилизирует БЭК магнитоэкситонов и частично уменьшает энергию связи ЭДЖ. Для начала мы обсудим БЭК магнитоэкситонов в Хартри-Фок-Боголюбовском приближении (ХФБП).

Энергия основного состояния БЭК магнитоэкситонов  $E_g$  в [9] была рассчитана точнее чем в приближении ХФП на основе теоремы Феймана-Паули, следуя примеру Комта и Нозирера [26, 27]. Будучи примененной к 2D магнитоэкситонам основная формула выглядит следующим образом:

$$E_g = -N_{ex} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} - \sum_{\vec{Q}} \int_0^{\infty} \frac{\hbar d\omega}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \text{Im} \left( \frac{1}{\varepsilon(\vec{Q}, \omega, \lambda)} \right) \quad (1.65)$$

Где  $N_{ex}$  - среднее число магнитоэкситонов, а  $\varepsilon(\vec{Q}, \omega, \lambda)$  - диэлектрическая постоянная в случае гипотетической e-h системы с электрическим зарядом в квадрате, обозначенным через  $\lambda$ . В (1.65) будем различать две диэлектрические постоянные: диэлектрическая постоянная в случае ХФП -  $\varepsilon^{HF}(\vec{Q}, \omega, \lambda)$ , и диэлектрическая постоянная в случае ПХФ (приближения хаотических фаз) -  $\varepsilon^{RPA}(\vec{Q}, \omega, \lambda)$ . В [9] были получены результаты и в случае ХФБП, и в приближении хаотических фаз, что эквивалентно учету корреляционной энергии.

Эти два приближения для диэлектрической постоянной имеют различные зависимости от поляризуемости  $4\pi\alpha_0^{HF}(\vec{Q}, \omega, \lambda)$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{RPA}(\vec{Q}, \omega, \lambda) &= 1 + 4\pi\alpha_0^{HF}(\vec{Q}, \omega, \lambda) \\ \frac{1}{\varepsilon^{HF}(\vec{Q}, \omega, \lambda)} &= 1 - 4\pi\alpha_0^{HF}(\vec{Q}, \omega, \lambda)\end{aligned}\quad (1.66)$$

Поляризуемость может быть рассчитана в приближении слабого отклика, если в нулевом приближении нам известна волновая функция системы. В случае БЭК магнитоэкситонов [9] волновая функция основного состояния выбрана как волновая функция БКШ  $|\psi_g(k)\rangle$ , а волновые функции возбужденных состояний [27], были введены как волновые функции Андерсоновского типа, подобно тому, как это было сделано для сверхпроводников [28]. Волновая функция была введена следуя методике Келдыша-Козлова [29], действием унитарного преобразования  $\hat{D}(\sqrt{N_{ex}})$  на первоначальные вакуумные операторы для электронов и дырок.

$$|\psi_g(k)\rangle = \hat{D}(\sqrt{N_{ex}})|0\rangle; \quad a_p|0\rangle = b_p|0\rangle = 0 \quad (1.67)$$

Когерентные возбужденные состояния определяются как [9]

$$\left| \psi^e \left( q \pm \frac{Q_x}{2} \right) \right\rangle = a_{q+\frac{Q_x}{2}} a_{q-\frac{Q_x}{2}} |\psi_g(k)\rangle \quad (1.68)$$

Унитарное преобразование  $\hat{D}(\sqrt{N_{ex}})$  нарушает калибровочную инвариантность начального гамильтониана (1.29), преобразуя его к виду  $\hat{D}H_{eff}\hat{D}^\dagger$ . Это приводит к новой волновой функции основного состояния  $|\psi_g(k)\rangle$  и к макроскопическому смещению оператора рождения экситона на  $\sqrt{N_{ex}}$ .

$$d^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{-iQ_y t^2} a_{\frac{k_x+t}{2}}^\dagger b_{\frac{k_x-t}{2}}^\dagger \quad (1.69)$$

В отличие от квантовой оптики и глауберовских состояний [30], операторы рождения и уничтожения экситона не являются чисто Бозе операторами, а операторами квазибозевского типа [31].

Унитарное преобразование:

$$\hat{D}(\sqrt{N_{ex}}) = \exp \left[ \sqrt{N_{ex}} (d^\dagger(k) - d(k)) \right] \quad (1.70)$$

приводит к боголюбовскому u-v преобразованию:

$$\begin{aligned}\alpha_p &= Da_p D^\dagger = ua_p - v \left( p - \frac{k_x}{2} \right) b_{k_x-p}^\dagger \\ \beta_p &= Db_p D^\dagger = ub_p + v \left( \frac{k_x}{2} - p \right) a_{k_x-p}^\dagger\end{aligned}\quad (1.71)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{aligned}a_p &= u\alpha_p + v \left( p - \frac{k_x}{2} \right) \beta_{k_x-p}^\dagger \\ b_p &= u\beta_p - v \left( \frac{k_x}{2} - p \right) \alpha_{k_x-p}^\dagger\end{aligned}\quad (1.72)$$

где

$$u = \cos g, \quad v = \sin g, \quad u^2 + v^2 = 1, \quad v(t) = ve^{-ik_y t^2}; \quad g = \sqrt{2\pi l^2 n_{ex}}; \quad n_{ex} = \frac{N_{ex}}{S} \quad (1.73)$$

В пределах НУЛ оно будет выглядеть как:

$$N_{ex} = v^2 N; \quad n_{ex} = \frac{v^2}{2\pi l^2}; \quad g = v \quad (1.74)$$

где  $v^2$  - фактор заполнения НУЛа.

Это приводит к соотношениям  $u = \cos v$  и  $v = \sin v$ , которые удовлетворяются только в случае  $v < 1$ . Теория, развитая в [10] и ее применение законно только в пределах  $v < 1$ .

Гамильтониан (1.29) после унитарного преобразования (1.67) будет содержать операторы  $\alpha_p^\dagger, \alpha_p, \beta_p^\dagger, \beta_p$  в произвольном порядке. Их упорядочивание к нормальному виду приведет к выводу константы  $U$ , которая играет роль энергии основного состояния в ПХФБ, к появлению квадратичного гамильтониана  $H_2$  подобному гамильтониану (36) из [9], и к четверному гамильтониану  $H'$ . В отличие от гамильтониана  $H_2$ , компоненты, входящие в состав  $H'$ , появляются только в более высоких порядках теории возмущения, и их вклады будут меньше чем вклад  $H_2$ . Роль параметра малости играет фактор заполнения  $v^2 < 1$ . В

отличие от малого параметра  $r = \frac{I_l}{\hbar\omega_c}$ , обсужденного выше и связанного с интенсивностью

магнитного поля, так же существует другой независимый параметр малости  $v^2$ , который своим происхождением полностью отличается от первого. Их влияние должно быть исследовано независимо друг от друга. Они описывают различные аспекты коллективных свойств e-h системы. Ниже запишем квадратичный гамильтониан, в случае если электроны и дырки имеют равные массы  $m_e = m_h$  и равные циклотронные частоты  $\omega_{ce} = \omega_{ch} = \omega_c$  и химические потенциалы  $\mu_e = \mu_h = \mu/2$ . Опуская громоздкие вычисления можно написать:

$$\begin{aligned}
H_2 = & \sum_p \left[ E(k, v^2, \mu) + (B - 2A)v^2(1 - 2v^2) + 2v^2(1 - v^2)\Delta(k) \right] \times \\
& \times (\alpha_p^\dagger \alpha_p + \beta_p^\dagger \beta_p) + \\
& + \sum_p \left[ uv \left( \frac{k_z}{2} - p \right) \beta_{k_z - p} \alpha_p + uv \left( p - \frac{k_z}{2} \right) \alpha_p^\dagger \beta_{k_z - p}^\dagger \right] \times \\
& \times \left\{ -\psi(k, v^2, \mu) + 2v^2(B - 2A + \Delta(k)) - \Delta(k) \right\}
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Коэффициенты  $E(\vec{k}, v^2, \mu)$  и  $\Psi(\vec{k}, v^2, \mu)$  впервые были введены в [9] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
E(k, v^2, \mu) &= 2v^2 u^2 I_{ex}(k) + I_l(v^4 - v^2 u^2) - \frac{\mu}{2}(u^2 - v^2), \\
\psi(k, v^2, \mu) &= 2v^2 I_l + I_{ex}(k)(1 - 2v^2) + \mu
\end{aligned} \tag{1.76}$$

а константы  $A$ ,  $B$  и  $\Delta(k)$  были определены нами выше. Последняя скобка в (1.75) была приравнена нулю, для того чтобы компенсировать опасные диаграммы, описывающие рождение и аннигиляцию электронно-дырочных пар в присутствии нового вакуумного состояния (1.67). Этот метод стабилизирует основное состояние и позволяет определить неизвестный параметр – химический потенциал  $\mu$ . Это так называемое Хартри-Фок-Боголюбовское приближение (ХФБП). Можно написать:

$$\begin{aligned}
\mu^{HFB} &= -\tilde{I}_{ex}(k) + 2v^2(B - 2A + \tilde{I}_{ex}(k) - I_l) = \\
&= -\tilde{I}_{ex}(k) + 2v^2(B - 2A + \Delta(k) - E(k))
\end{aligned} \tag{1.77}$$

где перенормированный ионизационный потенциал  $\tilde{I}_{ex}(k)$  был введен как

$$\tilde{I}_{ex}(k) = I_{ex}(k) + \Delta(k); \quad I_{ex}(k) = I_l - E(k) \tag{1.78}$$

В отличие от ионизационного потенциала  $I_{ex}(k)$ , полученного в пределах НУЛ [10], перенормированный ионизационный потенциал  $\tilde{I}_{ex}(k)$  содержит поправки, вносимые влиянием ВУЛов. Введя значение для  $\mu^{HFB}$  в гамильтониан  $H_2$ , получим:

$$H_2 = \sum_p \frac{\tilde{I}_{ex}(k)}{2} (\alpha_p^\dagger \alpha_p + \beta_p^\dagger \beta_p) \tag{1.79}$$

Этот гамильтониан описывает одночастичные возбуждения, когда магнитоэкситоны испытывают БЭК на одночастичное состояние с волновым вектором  $\vec{k}$ . В этом случае, чтобы отделить одну пару от конденсата, нужно сообщить энергию электронно-дырочной паре равную  $\tilde{I}_{ex}(k)$ , таким образом, энергия возбуждения для одной квазичастицы будет  $\frac{1}{2}\tilde{I}_{ex}(k)$ . Если посмотреть на химический потенциал  $\mu^{HFB}$ , то можно заметить, что в точке

$v^2 = 0$  он точно будет совпадать на энергетической шкале с перенормированным потенциалом для магнитоэкситона с волновым вектором  $\vec{k}$ .

$$\tilde{E}_{ex}(k) = -\tilde{I}_{ex}(k)$$

Поправки к  $\mu^{HFB}$  определяются выражением

$$2v^2(B - 2A + \Delta(k) - E(k)) \quad (1.80)$$

Член  $-E(k)$  был известен в пределе НУЛ, и был выведен в [8, 9]. Он был определен из устойчивости основного состояния в приближении ХФБ, когда поправки связанные с ВУЛ не были известны. Член  $B - 2A$  появляется в обеих фазах, не только в случае БЭК магнитоэкситонов, но также в случае ЭДЖ. Член  $-2A$  связан со средними хартриевского типа для дополнительного e-h, e-e, h-h взаимодействия, а член  $B$  связан с дополнительным взаимодействием e-e, h-h. Член  $2v^2\Delta(k)$  связан с e-h взаимодействием и появляется в результате боголюбовского u-v преобразования [32]. Ниже мы покажем, что этот терм в случае ЭДЖ не появится. Ионизационный потенциал в безразмерном виде представлен на

Рис.6, где  $r = \frac{I_l}{\hbar\omega_{c0}}$  равно 1 и 1/2. Значение  $r = 1$  – максимально возможное, так как наша

теория верна только в случае  $\frac{I_l}{\hbar\omega_{c0}} < 1$ . Результирующее влияние всех ВУЛ на химический

потенциал  $\mu(k, v^2)$ , рассчитанное в ХФБП, определяется коэффициентом  $(B - 2A + \Delta(k))$ .

Эта зависимость показана на Рис.7, для двух значений  $r = \frac{I_l}{\hbar\omega_{c0}} = 0,5; 1$ . Это влияние, так же

как и влияние первого ВУЛа, описанного в [10], существенно только в диапазоне малых значений  $kl < 0.5$ , и быстро уменьшается с ростом  $kl$ . Результирующая зависимость

химического потенциала от фактора заполнения  $v^2$  определяется коэффициентом  $[B - 2A + \Delta(k) - E(k)]$ , который учитывает влияние всех ВУЛов. Вид этого коэффициента

представлен на Рис.8 в безразмерной форме для  $r = \frac{I_l}{\hbar\omega_{c0}} = 0,5; 1$ . Таким образом, главный

результат представлен на Рис.9, а именно зависимость химического потенциала  $\mu^{HFB}$ ,

вычисленного в ПХФБ, от фактора заполнения НУЛ  $v^2$  для различных значений волнового

вектора  $kl = 0; 0,5; 1; 3,6$  и для двух различных значений  $r = \frac{I_l}{\hbar\omega_{c0}} = 0,5; 1$ .

Мы можем заметить, что БЭК 2D магнитоэкситонов с волновым вектором  $kl < 0.5$  устойчив в ПХФБ. В [9, 10] было замечено, что при больших значениях  $kl > 0.5$  влияние когерентно возбужденных состояний [29] является важным и приводит к появлению



метастабильной диэлектрической жидкой фазы. Рассмотрим теперь ЭДЖ в ПХФ. Расчеты проводятся на эффективном гамильтониане (1.29), но без химических потенциалов  $\mu_e$  и  $\mu_h$ . Энергия основного состояния  $E_{EHL}$  ЭДЖ вычисляется при  $T = 0$ , когда усреднее электронов и дырок на НУЛах есть:

$$\langle a_p^\dagger a_p \rangle = \langle b_p^\dagger b_p \rangle = v^2 \quad (1.81)$$

Где  $v^2$  - фактор заполнения НУЛ. Применив теорему Вика, мы получим энергию основного состояния

$$\begin{aligned} E_{EHL} &= -N_{e-h} \left[ v^2 I_l + v^2 (2A - B) \right] \\ N_{e-h} &= N v^2 \end{aligned} \quad (1.82)$$

Тогда энергия на одну e-h пару, входящую в  $\varepsilon_{EHL}$ , с учетом вклада ВУЛ равна

$$\frac{\varepsilon_{EHL}}{I_l} = -v^2 \left( 1 + \frac{2I_l}{\pi \hbar \omega_c} (S - T) \right) \quad (1.83)$$

Приняв во внимание значения для  $S = 0.481$  и  $T = 0.216$  мы запишем:

$$\frac{\varepsilon_{EHL}}{I_l} = - \left( 1 + 0.168 \frac{I_l}{\hbar \omega_c} \right) v^2 \quad (1.84)$$

Минимальное значение достигается, когда фактор заполнения  $v^2 = 1$ , это определяет энергию, приходящуюся на электронно-дырочную пару в составе электронно-дырочной капли (ЭДК)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{EHD} &= -I_l (1 + 0.168r) \\ r &= \frac{I_l}{\hbar \omega_c} \end{aligned} \quad (1.85)$$

Величины  $\varepsilon_{EHL}$  и  $\varepsilon_{EHD}$  зависят от отношения  $r < 1$ . Несмотря на ограничение  $r < 1$ , которое возникло из-за приближения сильного магнитного поля, мы будем также рассматривать случай максимального возможного значения  $r = 1$ . Можно заметить, что поправки, возникшие из-за ВУЛ понижают энергию приходящую на пару в составе ЭДК. Значения  $\varepsilon_{EHD}$  наряду с химическим потенциалом БЭК магнитоэкситонов с волновым вектором  $k$  представлены на Рис.8. Они имеют одинаковый порядок величин и следовательно сосуществование двух состояний возможно.

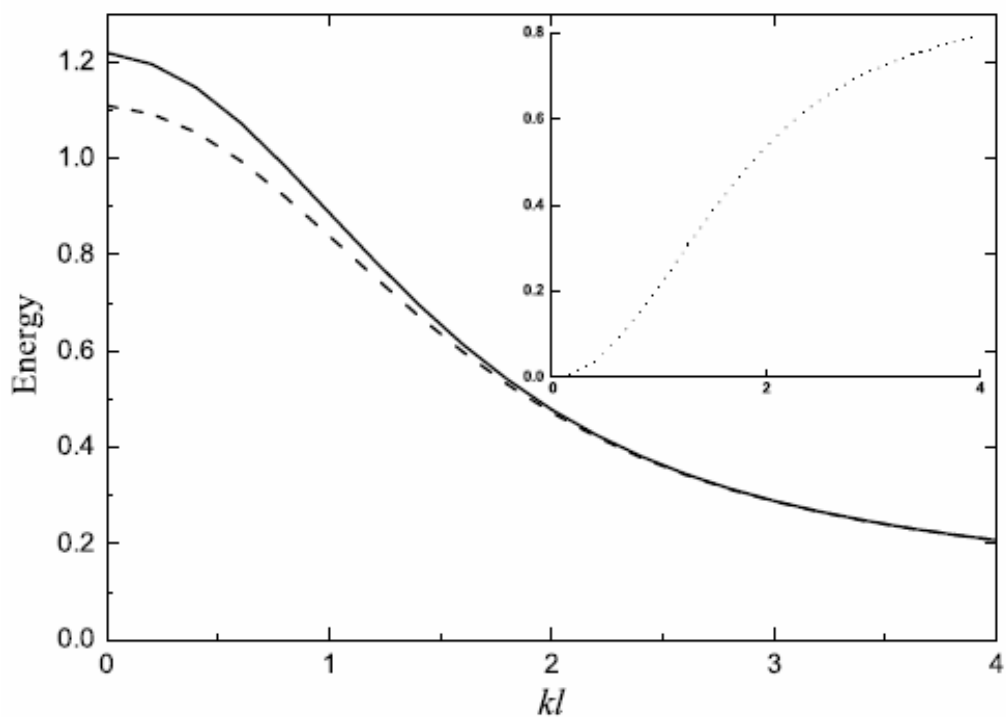


Рис.6 Зависимость ионизационного потенциала в безразмерном виде от волнового вектора  $kl$ . Для двух значений коэффициента  $r = I_1 / \hbar\omega_{c0}$ . Сплошная линия -  $r = 1$ ; Пунктирная -  $r = 0.5$

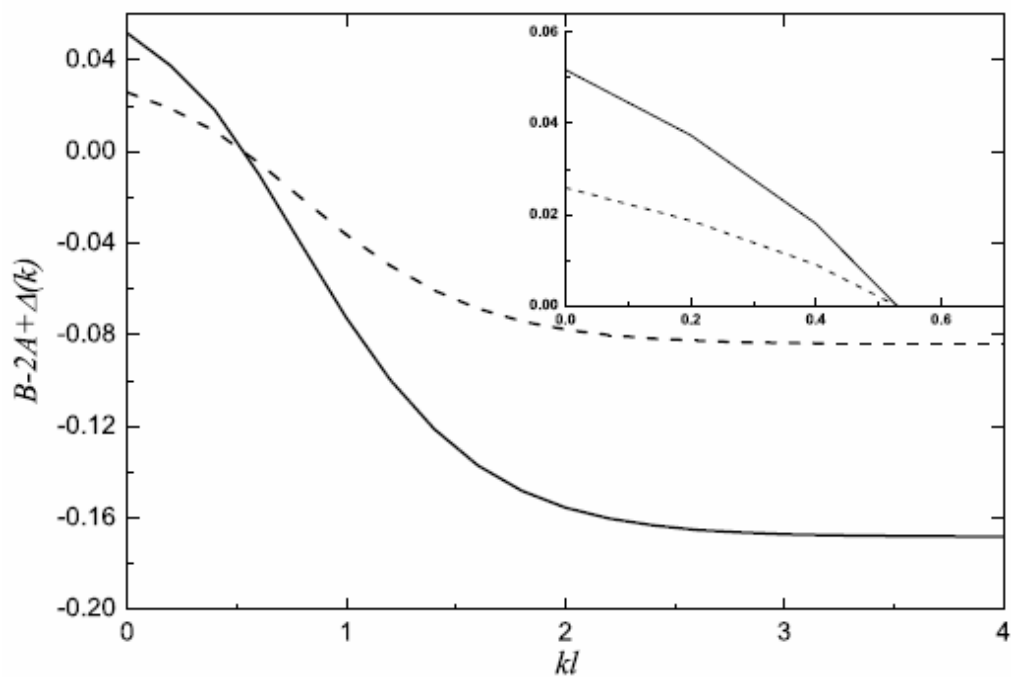


Рис.7 Зависимость коэффициента  $(B-2A+\Delta(k))$  от волнового вектора  $kl$ . Для двух значений коэффициента  $r = I_1 / \hbar\omega_{c0}$ . Сплошная линия -  $r = 1$ ; Пунктирная -  $r = 0.5$

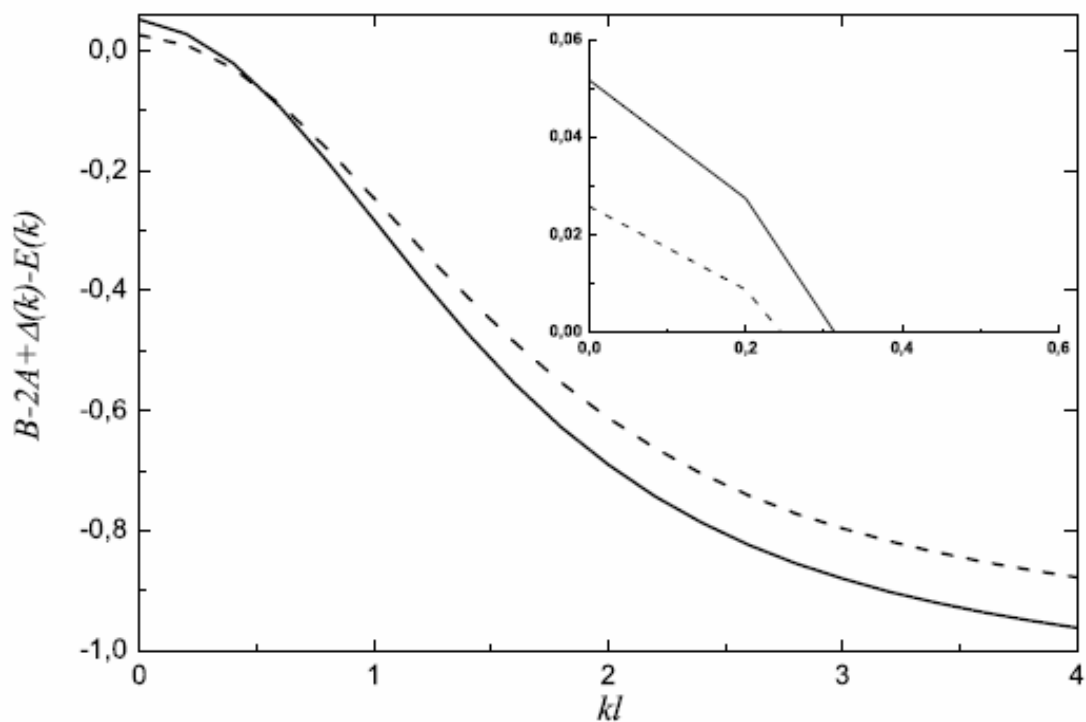
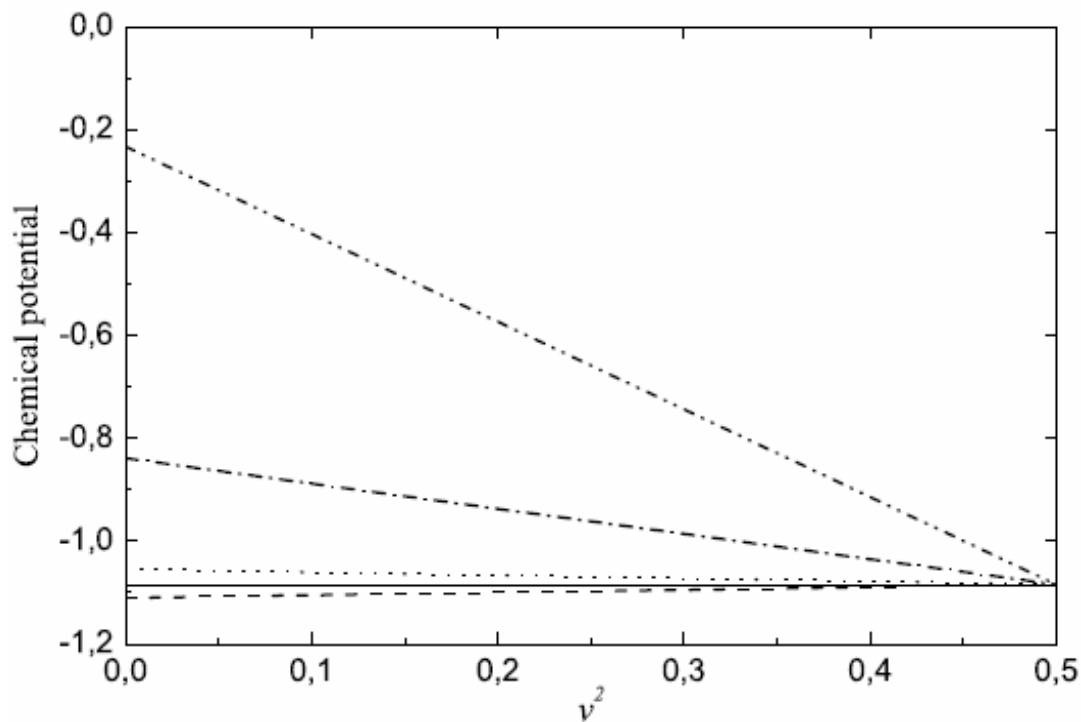


Рис.8 Зависимость коэффициента  $(B - 2A + \Delta(k) - E(k))$  от волнового вектора  $kl$ . Для двух значений коэффициента  $r = I_1 / \hbar\omega_{c0}$ . Сплошная линия -  $r = 1$ ; Пунктирная -  $r = 0.5$



(a)  $I_1 / \hbar\omega_c = 1/2$

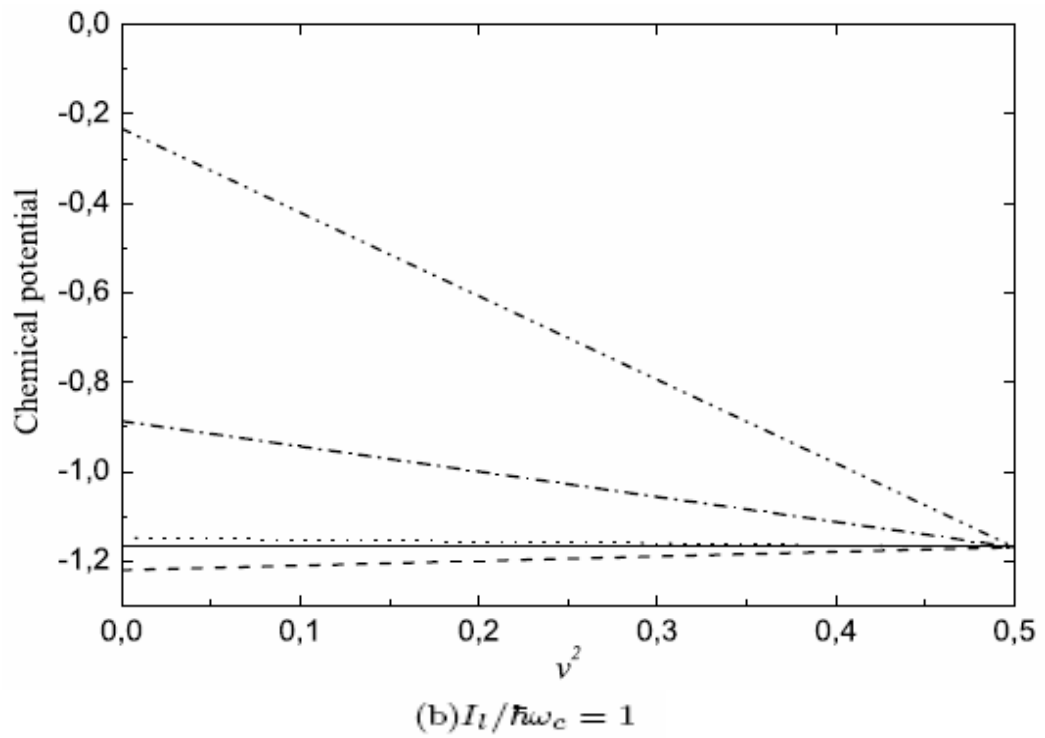


Рис.9 Зависимость химического потенциала  $\mu^{HFB}$ , вычисленного в ПХФБ, от фактора заполнения НУЛ  $\nu^2$  для различных значений волнового вектора  $kl = 0; 0,5; 1; 3, 6$  и для двух различных значений  $r = I_l / \hbar\omega_{c_0} = 0,5; 1$ . Сплошная линия - энергия приходящаяся на пару ЭДК.

## **Глава 2. Плазменные колебания двумерной электронно-дырочной жидкости в пределах нижайшего уровня Ландау**

### ***II.1. Уравнения движения для операторов флуктуации плотности электронов и дырок***

Плазменные колебания однокомпонентного электронного газа в трехмерных (3D) объемных кристаллах [35], так же как и в двумерных (1D) слоях, характеризуются квадратом частоты

$$\omega_p^2(q) = \frac{4\pi e^2 n_e}{\varepsilon_0 m} \text{ и } \omega_p^2(q) = \frac{2\pi e^2 n_s q}{\varepsilon_0 m}, \text{ где } n_e \text{ и } n_s - \text{ это объемная и поверхностная концентрация}$$

носителей соответственно. Дас Сармой и Мадхукармом [36] был рассмотрен двухкомпонентный 2D электронный газ (1ДЭГ). Два оператора флуктуации плотности  $\hat{\rho}_1(q)$  и  $\hat{\rho}_2(q)$ , соответствующие каждому слою, находясь в фазе и противофазе в диапазоне малых волновых векторов  $q$  формируют оптические и акустические плазменные колебания с частотами  $\omega_{Op}(q) \sim \sqrt{q}$  и  $\omega_{Ap}(q) \sim q$ . Касьяном с соавторами [37, 38] были рассмотрены плазмон-фононные возбуждения в 2D структурах. Возбуждения 2ДЭГ в сильном перпендикулярном магнитном поле полностью отличаются от рассмотренных выше тем, что кинетическая энергия квазичастиц подавляется квантованием Ландау в магнитном поле. Гирвин, МакДональд и Платцман [39] предложили магниторотонную теорию элементарных возбуждений в 2ДЭГ в условиях дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ). Эти явления встречаются в системах с частично заполненными нижайшими уровнями Ландау, с фактором заполнения  $\nu = \frac{1}{q}$ , где  $q$  целое число ( $q \neq 1$ ) и с малыми нарушениями упорядочения и высокой подвижностью. В этом случае возбуждения как коллективный эффект, появляются в результате многочастичных коррелирующих кулоновских взаимодействий. В понимании данного вопроса решающий вклад принадлежит Лафлину [40], который ввел понятие несжимаемой электронной жидкости. Теория спектра коллективных возбуждений, предложенная в [39] аналогична теории Фейнмана предложенной для сверхтекучего гелия [41]. Основные Фейнмановские аргументы состоят в утверждении, что любые малые возбуждения конденсированной системы являются волнами плотности. В случае полностью заполненного нижайшего уровня Ландау  $\nu = 1$ , из-за принципа исключения Паули, возбуждения в пределах заполненного уровня невозможны. Единственная возможность, это перевести частицы на более высокие свободные уровни Ландау возбуждения частиц, с более низких уровней Ландау. Этот случай был изучен Калиным и Гальпериним [34]. В случае ДКЭХ нижайший уровень Ландау(НУЛ) является не полностью заполненным и принцип Паули больше не исключает возбуждения квазичастиц с малыми энергиями внутри-уровневых возбуждений. Для случая ДКЭХ главную роль играют

малые возбуждения, а не меж-уровневые возбуждения [39]. Энергетический спектр, полученный в [39] имеет энергетическую щель при волновом векторе  $k = 0$ . В области значений волнового вектора  $kl = 1$  в спектре присутствует магниторотонный минимум, подобный ротонному минимуму в сверхтекучем жидком гелии. Фертиг [42] исследовал спектр коллективных возбуждений трехслойных и двухслойных электронных систем. В частности был рассмотрен случай двухслойных систем в сильном перпендикулярном магнитном поле с фактором заполнения НУЛов каждого слоя  $\nu = \frac{1}{2}$ . Была введена спонтанная когерентность между состояниями носителей двухкомпонентных 2ДЭГ, которая является эквивалентной основному состоянию типа БКШ в сверхпроводниках. Такие системы представляют собой когерентно спаренные электроны из зоны проводимости в одном слое с дырками из зоны проводимости, но второго слоя. Второй слой, заполненный на половину электронами, заменяется слоем, полностью заполненным электронами и на половину дырками. Заряд электронов слоя компенсируется положительным зарядом примесей. Таким образом, остаются одни дырки. Такие необычные экситоны называются как ДКХЭ экситоны. Их возбуждения будут иметь энергию  $\hbar\omega(k) = E_{ex}(k) - E_{ex}(0)$ . Где  $E_{ex}(k)$  - энергия экситона с волновым вектором  $k$ . Этот результат был получен Пакетом, Райсом и Уедой [8], которые изучали электронно-дырочную однослойную систему. В ассиметрическом случае, когда расстояние между слоями отлично от нуля, энергетический спектр элементарных возбуждений характеризуется линейной зависимостью от волнового вектора в области больших длин волн, а так же ротонным поведением в средних значениях длин волн [42]. В симметричном случае, когда расстояние между слоями отсутствует, линейная область энергетического спектра преобразуется в квадратичную зависимость. Такой энергетический спектр элементарных возбуждений электронной двухслойной системы, был обсужден в [43].

Главная часть этого раздела, это исследование плазменных внутриуровневых возбуждений Ландау в электронно-дырочной жидкости (ЭДЖ). Такой тип возбуждений должен зависеть от электронно-дырочной концентрации, так как это было показано в [36], в случае электронного газа в двухслойных системах в отсутствии магнитного поля. В нашем случае частоты плазменных колебаний должны быть пропорциональны обобщенному фактору заполнения  $\nu^2(1 - \nu^2)$ , отражающий эффект заполнения НУЛ и эффект заполнения фазового пространства. Мы также получили две ветви зависимости плазменных частот, соответствующих двум компонентам  $e-h$  системы. Эти колебания будут находится в противофазе в случае оптических колебаний и в фазе, для акустических колебаний.

Соответствующие операторы флуктуации плотности обозначаются, как  $\hat{\rho}(P)$  и  $\hat{D}(P)$ . Они соответствуют разным уравнениям движения с разными законами дисперсии, так как описывают два разных вклада кулоновского взаимодействия: вклады хартриевского типа и вклады фоковского типа. Такой энергетический спектр не совпадает с энергетическим спектром экситонного типа, описанного в [42, 8, 43]. В БЭК e-h системе существуют независимо два типа энергетических спектра таких как, нейтральный экситонный и плазменные колебания.

Несмотря на различное происхождение этих энергетических спектров, они имеют много общих свойств. Главное из них это то, что у них есть квант энергии кулоновского взаимодействия в присутствии магнитного поля  $E(P)$ , который растет с ростом волнового вектора  $P$  и выходит на насыщение. Такое поведение присуще всем энергетическим спектрам, в обсужденных выше работах.

Гамильтониан кулоновского взаимодействия в пределах НУЛ имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} [\hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(-\vec{Q}) - \hat{N}_e - \hat{N}_h] \quad (2.1)$$

где

$$W_{\vec{Q}} = V_{\vec{Q}} e^{-\frac{Q^2 l^2}{2}}; \quad V_{\vec{Q}} = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 S |\vec{Q}|} \quad (2.2)$$

Приведем вид операторов флуктуации плотности для электронов  $\hat{\rho}_e(\vec{Q})$  и для дырок  $\hat{\rho}_h(\vec{Q})$ , а так же для их линейных комбинаций  $\hat{\rho}(\vec{Q})$  и  $\hat{D}(\vec{Q})$ :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_e(\vec{Q}) &= \sum_t e^{iQ_y t l^2} a_{t-\frac{Q_x}{2}}^\dagger a_{t+\frac{Q_x}{2}}; \\ \hat{\rho}_h(\vec{Q}) &= \sum_t e^{iQ_y t l^2} b_{t+\frac{Q_x}{2}}^\dagger b_{t-\frac{Q_x}{2}}; \\ \hat{\rho}(\vec{Q}) &= \hat{\rho}_e(\vec{Q}) - \hat{\rho}_h(-\vec{Q}); \\ \hat{D}(\vec{Q}) &= \hat{\rho}_e(\vec{Q}) + \hat{\rho}_h(-\vec{Q}); \\ \hat{N}_e &= \hat{\rho}_e(0); \hat{N}_h = \hat{\rho}_h(0); \\ \hat{\rho}(0) &= \hat{N}_e - \hat{N}_h; \hat{D}(0) = \hat{N}_e + \hat{N}_h; \end{aligned} \quad (2.3)$$

Они выражаются через Ферми операторы рождения и уничтожения для электронов  $a_p^\dagger, a_p$  и для дырок  $b_p^\dagger, b_p$ . Операторы для электронов и дырок зависят от двух квантовых чисел. Мы рассматриваем случай, когда электроны и дырки расположены на НУЛах  $n_e = n_h = 0$  и эти

обозначения опускаем. Квантовое число  $p$  принимает  $N$  значений и это определяет  $N$ -кратность вырождения уровней Ландау в калибровке Ландау.  $N = \frac{S}{2\pi l^2}$ , где  $S$  – площадь поверхностного слоя, а  $l$  – магнитная длина, равная  $l^2 = \frac{\hbar c}{eH}$ . Операторы (2.3) удовлетворяют следующим коммутационным свойствам, которые были кратко обсуждены в работах [39, 44]:

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}(\vec{Q}), \hat{\rho}(\vec{P})] &= -2i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{P} + \vec{Q}) \\ [\hat{D}(\vec{Q}), \hat{D}(\vec{P})] &= -2i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{P} + \vec{Q}) \\ [\hat{\rho}(\vec{Q}), \hat{D}(\vec{P})] &= -2i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{D}(\vec{P} + \vec{Q}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Операторы флуктуации плотности (2.3) для различных волновых векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  не коммутируют. Это связано с вихревым или спиральным свойством присутствующего сильного магнитного поля. Эти свойства выражаются через фазовый фактор в структуре операторов (2.3) и через компоненты двумерных векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$ , их проекции на плоскость структуры, а также проекции их векторного произведения на магнитное поле  $[\vec{P} \times \vec{Q}]_z$ . Эти свойства значительным образом влияют на структуру уравнений движения для операторов и определяют новые аспекты физики двумерных электронно-дырочных систем. Уравнения движения для операторов  $\hat{\rho}(\vec{Q})$  и  $\hat{D}(\vec{Q})$  могут быть написаны различными способами, с различными свободными членами. Приведем вид одного из них без свободного члена, содержащего лишь нелинейную часть:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\hat{\rho}(\vec{P})}{dt} &= [\hat{\rho}(\vec{P}), \hat{H}] = \\ &= -i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) [\hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q})] \\ & \\ i\hbar \frac{d\hat{D}(\vec{P})}{dt} &= [\hat{D}(\vec{P}), \hat{H}] = \\ &= -i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) [\hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{D}(\vec{P} - \vec{Q}) + \hat{D}(\vec{P} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q})] \end{aligned} \quad (2.5)$$

В то же время, они могут быть написаны в другой форме, где будут содержаться свободные члены энергии, наряду с другими нелинейными частями, следующим образом:



$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d\hat{\rho}(\vec{P})}{dt} &= E(\vec{P})\hat{\rho}(\vec{P}) - 2i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{Q}) \\
i\hbar \frac{d\hat{D}(\vec{P})}{dt} &= E(\vec{P})\hat{D}(\vec{P}) - 2i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{D}(\vec{P} - \vec{Q})
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь  $E(P)$  есть квант кулоновского электрон-электрон взаимодействия в присутствии сильного магнитного поля.

$$E(\vec{P}) = 2 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right); \tag{2.7}$$

Пока решение уравнений точно, не важно по какому из путей (2.5) или (2.6) мы будем двигаться. Но так как любое решение приблизительно, то необходимо с самого начала подчеркнуть физическое значение двух различных вариантов уравнений движения.

Свободная энергия  $E(P)$  в (2.6) появляется вследствие некоммутативности операторов и это эквивалентно введению квадратичной части из сложного гамильтониана в приближении среднего поля, где вид свободного члена зависит от выбора исходных квазичастиц. Так в случае электрон-электронного взаимодействия и электрон-фононного взаимодействия мы можем принять во внимание вначале электрон-электронное взаимодействие, если оно более сильное, чем электрон-фононное, или вводить полярон и рассматривать взаимодействие между поляронами. Будет полезно сравнить нашу 2D e-h систему с однокомпонентным 2D электронным газом в условиях дробного квантового эффекта Холла, а так же с электронной системой под действием лазерного излучения или с Бозе-газом в условиях БЭК. Во всех этих трех случаях, так же как и в нашем, мы имеем дело с неограниченным резервуаром энергии, что приводит к новым квазиэнергетическим ветвям энергии в энергетическом спектре [45] и к появлению новых квазичастиц [46, 18]. Так в случае ДКХЭ полный поток магнитного поля равен  $N$  квантам потока  $\phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{e}$ . Каждый квант потока создает вихрь в 2ДЭГ, который окружает электрон. Такие вихри приводят к композитным бозонам или композитным фермионам. Кванты потока сохраняются также и в случае 2D e-h системы. Они приводят к специфическим свойствам магнитоэкситонов и к спиральным состояниям в двухслойных электронных структурах [42, 8, 43].

Квазиэнергетические ветви появляются в присутствии лазерного излучения. Они сдвинуты на энергию одного фотона  $\hbar\omega_L$  по сравнению с обычными ветвями спектра. Во многих случаях они приводят к удвоению энергетических ветвей спектра и к так называемому оптическому Штарк эффекту [27]. Квазиэнергетическая ветвь появляется также в случае БЭК, когда наряду с уравнениями движения для операторов, описывающих

свободные частицы  $a_p^\dagger, a_p$  мы должны писать уравнение движения для комплексов  $a_0^2 a_{-p}^\dagger$ , где оператор  $a_0$  описывает конденсированные частицы, которые имеют макроскопически большие числа заполнения и характерную временную зависимость, определяемую химическим потенциалом  $\mu$  [27]. В отличие от хорошо знакомых определений энергий  $\hbar\omega_L$  и  $\mu$ , в нашем случае  $E(P)$  играет роль квазиэнергии и зависит от волнового вектора  $P$ . По нашему мнению, различные варианты уравнений движения могут быть поняты, как отражение возможностей сформировать различные виртуальные квазиэнергетические комплексы с различным затуханием, которое по существу зависит от свободной энергии. Наши исследования показали, что квазиэнергетические комплексы для плазмонов со свободной энергией  $E(P)$  имеют большое затухание и в действительности не существуют. Единственный вариант без затухания в системе, это вариант когда в (2.5) мы имеем уравнения движения без свободной энергии  $E(P)$ . Этот результат может быть понят, если мы обратим внимание на то, что  $E(P)$  не зависит от фактора заполнения  $v^2$  нижайшего уровня Ландау и не может быть расценен как энергия внутри-уровневого плазменного возбуждения, даже в нулевом приближении теории возмущения. За малый параметр теории возмущения мы выберем выражение  $v^2(1-v^2)$ , которое выражается через фактор заполнения  $v^2$  и отражает эффект заполнения фазового пространства.

## II.2. Цепочки уравнения для функции Грина и их расщепление по методу Д.Н.Зубарева.

Во многих работах [44] было подчеркнуто, что теория возмущения для кулоновского электрон-электронного взаимодействия в сильном перпендикулярном магнитном поле не применима. Нельзя ввести малый параметр  $V_c / T_k$ , который бы отражал отношение потенциальной энергии  $V_c$  к кинетической энергии  $T_k$ , так как кинетическая энергия в сильном магнитном поле в рамках НУЛ подавлена и не существует, то есть  $T_k = 0$ . Как обычно в методе функции Грина, который мы будем использовать, свободная энергия определяет нулевую функцию Грина  $G^0(P, \omega)$ . Если свободная энергия есть ноль, тогда

$G^0(P) = \frac{1}{\hbar\omega + i\delta}$ . Если свободная энергия есть  $E(P)$ , то функция Грина будет

$G^0(P) = \frac{1}{\hbar\omega - E(P) + i\delta}$ . Первый вариант полностью согласуется с тем, что функции Грина

для отдельного электрона или для дырки на своих НУЛ имеют вид

$G_0^i(P) = \frac{1}{\hbar\omega + i\delta}$ ,  $i = e, h$ . В нашем случае теория возмущения строится по малому

параметру. Все эти соображения оправдывают выбор варианта (2.5) без свободной энергии.

Введем запаздывающие функции Грина при  $T = 0$ :

$$\begin{aligned} G_1(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\vec{P}, t) \mid \hat{X}^\dagger(\vec{P}, 0) \right\rangle \right\rangle; \\ G_2(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle \hat{D}(\vec{P}, t) \mid \hat{X}^\dagger(\vec{P}, 0) \right\rangle \right\rangle; \end{aligned} \quad (2.8)$$

Они состоят из двух зависимых от времени  $t$  операторов  $\hat{\rho}(\vec{P}, t)$  и  $\hat{D}(\vec{P}, t)$ , которые можно назвать активными участниками функции Грина, и от одного неактивного участника, который может быть обозначен как  $\hat{X}^\dagger(\vec{P}, 0)$ . Он не зависит от времени  $t$ , так как взят в точке  $t = 0$ . Конкретная форма  $\hat{X}^\dagger(\vec{P}, 0)$  может быть необходима для вычисления вероятности квантовых переходов, а так же константы  $C$ , которая появляется в уравнениях движения. Но нас эти аспекты не интересуют, так как нашей задачей является только нахождение энергетических спектров коллективных элементарных возбуждений.

Функция Грина определяется соотношением:

$$\begin{aligned} G(t) &= \left\langle \left\langle \hat{A}(t); \hat{B}(0) \right\rangle \right\rangle = -i\theta(t) \left\langle \left[ \hat{A}(t), \hat{B}(0) \right] \right\rangle; \\ \hat{A}(t) &= e^{\frac{iHt}{\hbar}} \hat{A} e^{-\frac{iHt}{\hbar}}; \left[ \hat{A}(t), \hat{B}(0) \right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

Где  $H$  - гамильтониан (1). Усреднение  $\langle \rangle$  в этой главе сделано на базе волновой функции основного состояния электронно-дырочной жидкости (ЭДЖ). Это означает, что средние числа заполнения будут заменены на фактор заполнения НУЛ  $v^2$ .

Фурье-преобразования для функции Грина (2.8) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_1(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\vec{P}) \mid \hat{X}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega ; \\ G_2(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle \hat{D}(\vec{P}) \mid \hat{X}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega ; \end{aligned} \quad (2.10)$$

Уравнение движение для функции Грина (2.10) запишутся как:

$$\begin{aligned} (\hbar\omega + i\delta)G_1(\vec{P}, \omega) &= C - i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\ &\times \left\langle \left\langle [\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{Q})] \mid \hat{X}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega ; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} (\hbar\omega + i\delta)G_2(\vec{P}, \omega) &= C - i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\ &\times \left\langle \left\langle [\hat{D}(\vec{P} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{D}(\vec{P} - \vec{Q})] \mid \hat{X}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega ; \end{aligned}$$

Константа  $C$  использована для обозначения всех вкладов, не содержащих функцию Грина. Начальная функция Грина (2.10), содержит только один оператор слева, до вертикальной черты.

Уравнение движения (2.11) приводят к появлению двухоператорным функциям Грина  $\left\langle \left\langle \hat{\rho} \hat{\rho} \mid \hat{X} \right\rangle \right\rangle_\omega$  и  $\left\langle \left\langle \hat{D} \hat{\rho} \mid \hat{X} \right\rangle \right\rangle_\omega$ , для которых можно записать новые уравнения движения. Эта процедура известна в методике Зубарева для функции Грина и приводит к появлению бесконечных цепочек уравнений движения. Метод, развитый Зубаревым [47] содержит разные способы обрыва бесконечных цепочек, так как это мы сделаем ниже. Например, мы выразили приближенно трехоператорную функцию Грина через однооператорную, умноженную на среднее значение  $\langle \rho \rho \rangle$  от произведения остальных двух операторов. Это оказалось удачным, потому что среднее значение  $\langle \rho \rho \rangle$  содержат малый параметр теории возмущения  $v^2(1-v^2)$ . Мы пошли по этому пути. Но вначале мы получили точное уравнение движение для двухоператорной функции Грина, которое имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}) \middle| \hat{\rho}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega (\hbar\omega + i\delta) = \\
& = C - i \sum_{\vec{R}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{R}]_z l^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R}) + \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R}) \middle| X^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega - \\
& - i \sum_{\vec{R}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{Q} \times \vec{R}]_z l^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) + \hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R}) \middle| X^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega
\end{aligned} \tag{2.12}$$

После его подстановки в уравнение (2.11) мы нашли:

$$\begin{aligned}
& -i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \left\langle \left\langle [\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})] \middle| \hat{\rho}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega = \\
& = C - \frac{1}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} \sum_{\vec{R}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{R}]_z l^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle [\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R}) + \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}-\vec{R})] \middle| \hat{X}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega - \\
& - \frac{1}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} \sum_{\vec{R}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{Q} \times \vec{R}]_z l^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle [\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) + \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})\hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R})\hat{\rho}(\vec{R})\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{Q})] \middle| \hat{X}^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega ;
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Подобное выражение было выведено и для двухчастичной функции Грина, которая входит во второе уравнение (2.11). Обрыв бесконечной цепочки уравнений связано с расцеплением и разбиением трехоператорных функций Грина. Они были выполнены, используя следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{P} - \bar{Q} - \bar{R}) \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q}) \middle| X^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \\
& \approx \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{P}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega [\delta_{kr}(\bar{Q}, \bar{P}) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + \\
& + (\delta_{kr}(\bar{R}, -\bar{Q}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P})) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle]; \\
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{P} - \bar{Q}) \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q} - \bar{R}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \\
& \approx \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{P}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega [\delta_{kr}(\bar{Q}, 0) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + \\
& + (\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{Q} - \bar{P})) \langle \hat{\rho}(\bar{P} - \bar{Q}) \hat{\rho}(\bar{Q} - \bar{P}) \rangle]; \\
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q} - \bar{R}) \hat{D}(\bar{P} - \bar{Q}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \\
& \approx \left\langle \left\langle \hat{D}(\bar{P}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega \delta_{kr}(\bar{Q}, 0) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + \\
& + \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{P}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega [\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{Q} - \bar{P})] \langle \hat{\rho}(\bar{Q} - \bar{P}) \hat{D}(\bar{P} - \bar{Q}) \rangle; \\
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{D}(\bar{P} - \bar{Q} - \bar{R}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \\
& \approx \left\langle \left\langle \hat{D}(\bar{P}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega \delta_{kr}(\bar{R}, -\bar{Q}) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle + \\
& + \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{P}) \middle| \hat{X}^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega [\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{D}(-\bar{Q}) \rangle + \\
& + \delta_{kr}(\bar{Q}, \bar{P}) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{D}(-\bar{R}) \rangle];
\end{aligned} \tag{2.14}$$

**II.3. Энергетический спектр двумерных акустических и оптических плазмонов в присутствии сильного магнитного поля**

Подставим приближения (2.14) в уравнения (2.13) и (2.11), и получим замкнутое уравнение для функции Грина  $G_1(\vec{P}, \omega)$

$$G_1(\vec{P}, \omega)\Sigma_{11}(\vec{P}, \omega) = C \quad (2.15)$$

Собственно-энергетическая часть  $\Sigma_{11}(\vec{P}, \omega)$  выглядит таким образом:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(\vec{P}, \omega) &= (\hbar\omega + i\delta) - \frac{1}{\hbar\omega + i\delta} \times \\ &\times \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}(W_{\vec{Q}} - W_{\vec{P}-\vec{Q}}) \text{Sin}^2\left(\frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2}\right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

Усреднение  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  сделано по основному состоянию ЭДЖ, и это выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle a_p^\dagger a_p \rangle &= \langle b_p^\dagger b_p \rangle = v^2; \\ \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle &= 2Nv^2(1 - v^2); \\ \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{D}(-\vec{Q}) \rangle &= 0; \end{aligned} \quad (2.17)$$

Принимая во внимание, что среднее значение от смешанного произведения обращается в нуль  $\langle \hat{\rho} \hat{D} \rangle = 0$ , мы можем получить замкнутое уравнение для второй функции Грина:

$$G_2(\vec{P}, \omega)\Sigma_{22}(\vec{P}, \omega) = C \quad (2.18)$$

Собственно-энергетическая часть  $\Sigma_{22}(\vec{P}, \omega)$  есть:

$$\begin{aligned} \Sigma_{22}(\vec{P}, \omega) &= (\hbar\omega + i\delta) - \frac{1}{\hbar\omega + i\delta} \times \\ &\times \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2\left(\frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2}\right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

Как можно увидеть, собственно-энергетические части имеют бесконечно малые мнимые части  $i\delta$ . Это означает, что оба элементарных возбуждения не затухают в данной аппроксимации. Вариант со свободной энергией  $E(P)$  привел бы к тому, что в системе появилось бы затухание, того же порядка, что и вещественная часть.

Вторая функция Грина  $G_2(\vec{P}, \omega)$  описывает внутри-уровневые возбуждения на НУЛ акустического типа, когда флуктуация плотностей электронов и дырок происходят в фазе. Их энергетический спектр имеет вид:

$$(\hbar\omega_{AP}(\vec{P}))^2 = \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \quad (2.20)$$

Выразим в безразмерной форме волновой вектор  $Pl = x$  и энергию возбуждения  $\frac{\hbar\omega_{AP}(x)}{I_l}$ ,

где  $l$  - магнитная длина,  $I_l = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2}{\varepsilon_0 l}$  - потенциал ионизации магнитоэкситона, и  $\varepsilon_0$  -

диэлектрическая постоянная среды.

Перепишем (2.20) в виде [22]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\hbar\omega_{AP}(x)}{I_l} \right)^2 &= 2v^2(1-v^2)V_1(x); \\ V_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z} e^{-z^2} (1 - J_0(xz)) = \frac{1}{2\pi} \left[ G + \Gamma \left( 0, \frac{x^2}{4} \right) + \text{Ln} \left( \frac{x^2}{4} \right) \right]; \\ \Gamma(0, x) &= -E_i(-x); \\ E_i(x) &= G + \text{Ln}(-x) + \sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{kk!}; \end{aligned} \quad (2.21)$$

Где  $G = 0.577216$  - константа Эйлера, а  $\Gamma(0, x)$  - неполная Гамма функция.

В диапазоне малых значений  $x < 1$ ,  $V_1(x) = \frac{x^2}{8\pi}$  и акустическая ветвь плазменных колебаний

имеет линейную зависимость от  $x$ . В диапазоне больших значений  $x > 1$ ,  $V_1(x)$  является монотонно возрастающей функцией с насыщением. Стоит добавить, что скорость

акустической ветви  $C_0$  плазменных колебаний есть:

$$c_0 = \frac{e^2}{2\hbar\varepsilon_0} \sqrt{\frac{v^2(1-v^2)}{2}} \quad (2.22)$$

Эта величина не зависит от магнитного поля, а зависит от фактора заполнения. В случае

$\varepsilon_0 = 13$  и  $v^2 = 1/3$ ,  $c_0$  равняется  $6 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ .

Другая ветвь спектра элементарных возбуждений, описывает оптические плазменные колебания, где осцилляции плотности электронов и дырок происходят в противофазах.

Оптическая ветвь плазменных колебаний выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} (\hbar\omega_{OP}(\vec{P}))^2 &= \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} (W_{\vec{Q}} - W_{\vec{P}-\vec{Q}}) \times \\ &\times \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$



Принимая во внимание, что наиболее вероятное значение для  $\bar{Q}$  удовлетворяет условию  $\overline{Ql} = 1$ , то мы можем разбить нашу зависимость на два участка,  $x = Pl < \overline{Ql} = 1$  и  $x \geq 1$ . В этих двух областях мы получили следующие законы дисперсии:

$$\left( \frac{\hbar\omega_{op}(x)}{I_l} \right)^2 = \begin{cases} 2v^2(1-v^2)x^2V_1(x), & x < 1 \\ 2V_1(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \left[ \tilde{E}(x) - U_1(x) \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \right], & x > 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Где

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x) &= \frac{E(x)}{I_l} = [1 - e^{-\frac{x^2}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{x^2}{2}\right)] = \left( 1 - e^{-\frac{x^2}{4}} I_0\left(\frac{x^2}{4}\right) \right); \\ U_1(x) &= \frac{1}{2} [1 - e^{-\frac{x^2}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{x^2}{2}\right)] = \frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \left( 2e^{\frac{x^2}{4}} + (x^2 - 2)I_0\left(\frac{x^2}{4}\right) - x^2 I_1\left(\frac{x^2}{4}\right) \right); \end{aligned} \quad (2.25)$$

${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$  - гипергеометрическая функция, а  $I_i(x)$  - модифицированная функция Бесселя.

Если учесть, что в диапазоне  $x < 1$   $V_1(x) = \frac{x^2}{8\pi}$ , то можно заметить, что частоты оптических

колебаний  $2x^2V_1(x) = \frac{x^4}{4\pi}$  имеют квадратичную зависимость от  $x$ . Законы дисперсии для

оптических и акустических плазмонов, в случае внутри-уровневых возбуждений, представлены на Рис.10 и Рис.11.

Оптическая ветвь имеет квадратичную зависимость от  $x$  в диапазоне  $x < 1$ , немонотонное поведение ротонного типа в средней области изменениях и монотонное возрастание с насыщением при больших  $x$ .

Сравним результаты, полученные в этой главе с результатами работ [42, 8, 43]. Главное отличие состоит в том, что плазменные частоты пропорциональны параметру  $v^2(1-v^2)$ . Хотя, по своей природе спектр энергии экситона и спектр плазменных колебаний независимы, однако их зависимости от волновых векторов можно сравнивать. В работах [42, 43] была описана двухслойная структура с электронами, заполняющими на половину НУЛ. Имеется также подложка, содержащая положительно заряженные примеси, компенсирующие общий заряд двух слоев с  $v^2 = 1$ . Слой с электронами возле подложки и саму подложку можно заменить на слой заполненный на половину дырками в зоне проводимости. Тогда имеется двухслойная электронно-дырочная система с концентрацией электронов на одном слое  $v^2 = \frac{1}{2}$  и с дырками на другом слое, так же с фактором заполнения  $v^2$ . Расстояние между слоями можно менять. Фертиг рассмотрел когерентное спаривание электронов и дырок и получил закон дисперсии элементарных возбуждений в

условиях БЭК электронно-дырочных пар. Он заметил, что если расстояние между слоями  $d$  отлично от нуля, то энергетический спектр имеет линейный участок в области малых волновых векторов. При  $d = 0$  эта зависимость становится квадратичной.

В нашем случае, электроны находятся в зоне проводимости, а дырки в валентной зоне, но на том же самом слое, что и электроны. В таком случае электрон-электронное, дырка-дырочное и электронно-дырочное кулоновское взаимодействие по абсолютному значению является таким же, как и в симметричном случае [42]. Это сравнение может объяснить происхождение квадратичного закона дисперсии для оптических плазмонов. Акустическая ветвь плазмонов в отличие от оптической ветви имеет различные вклады со стороны хартриевских и Фоковских членов кулоновского взаимодействия, и ее закон дисперсии при малых волновых векторах – линеен. Уравнения движения, выведенные в [8] для операторов флуктуации плотности электронов и дырок, выраженных (2.12) не могут быть сравнены непосредственно с нашими формулами (2.5), так как гамильтониан в случае ЭДЖ и БЭК различен.

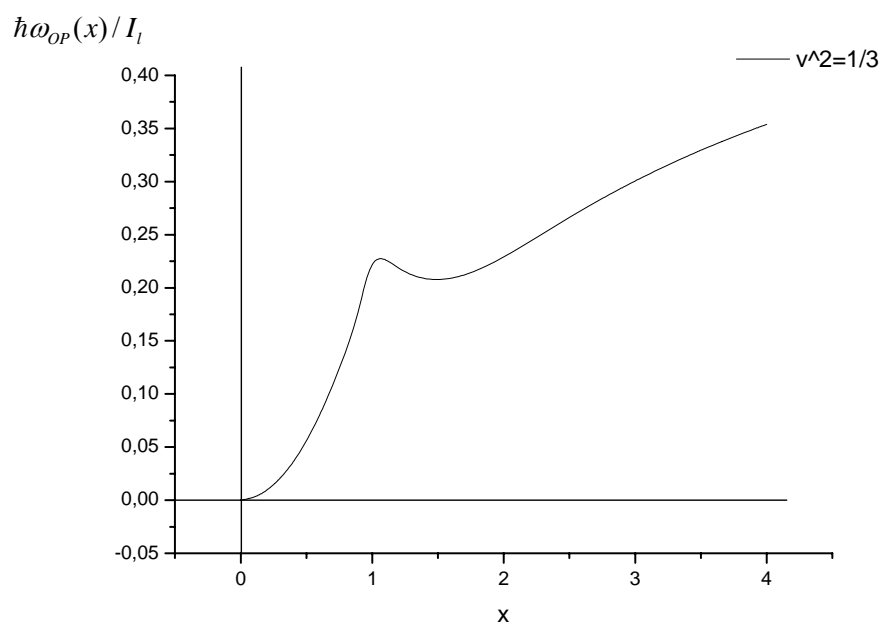


Рис. 10 Закон дисперсии оптических плазмонов

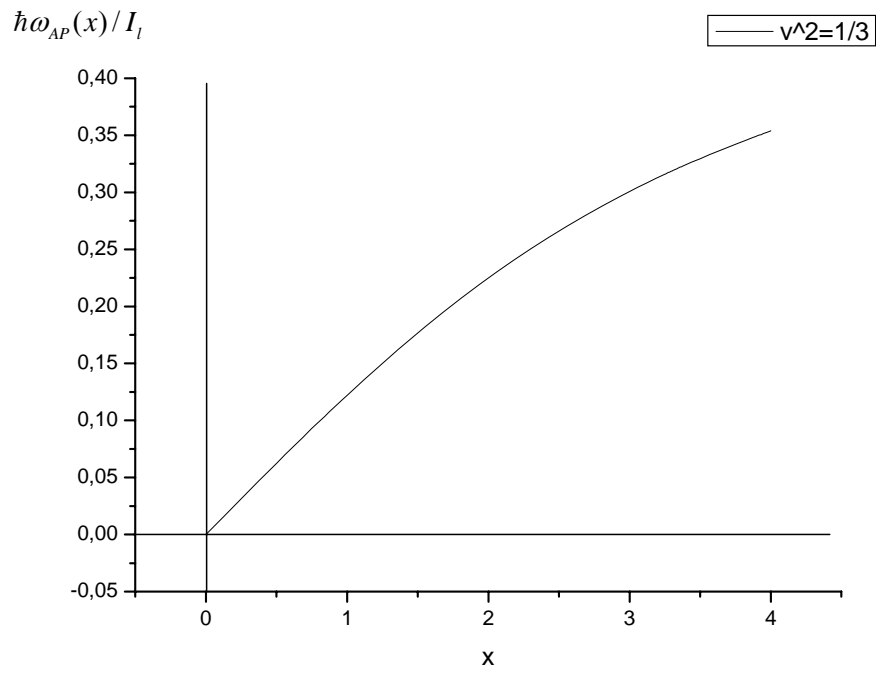


Рис. 11 Закон дисперсии акустических плазмонов

**Глава 3. Элементарные коллективные возбуждения двумерных магнитоэкситонов в условиях бозе-эйнштейновской конденсации и образования метастабильной диэлектрической жидкости**

***III.1. Нарушения калибровочной симметрии исходного гамильтониана по методу квазисредних Н.Н.Боголюбова***

Появление мягких мод в спектре коллективных элементарных возбуждений может сигнализировать не только о возможном фазовом переходе двухслойной системы к Вигнеровскому кристаллическому состоянию или к Волне зарядовой плотности 2D электронной системы, но также и к другому состоянию – волне экситонной плотности. Эти новые состояния теоретически были рассчитаны Ченом и Кьюнном [62, 63], который изучали основное состояние и коллективные элементарные возбуждения системы, состоящей из пространственно отделенного слоя электронов и слоя дырок в сильном магнитном поле. Когда межслоевое кулоновское притяжение электрона и дырки велико настолько, что может образовываться экситон, тогда волна экситонной плотности энергетически выгоднее других основных состояний, обсужденных ниже. Если пространственное разделение слоев превышает критическое значение, то новая волна экситонной плотности имеет более низкую энергию, чем однородная экситонная жидкость, или чем двойная волна зарядовой плотности для электронов отдельно и для дырок отдельно. Все эти детали помогут более лучше понять результаты, полученные в этой главе.

Для начала мы напишем операторы, описывающие магнитоэкситоны и плазменные колебания, и их коммутационные соотношения.

Операторы рождения и уничтожения магнитоэкситонов – это двухчастичные операторы, отражающие электронно-дырочную (e-h) структуру экситонов. Обозначим их как  $d^\dagger(\vec{p})$  и  $d(\vec{p})$ , где  $\vec{p}(p_x, p_y)$  - двумерный волновой вектор. Так же нам необходимы операторы флуктуации плотности электронов и дырок  $\hat{\rho}_e(\vec{Q})$  и  $\hat{\rho}_h(\vec{Q})$ , и их линейные комбинации  $\hat{\rho}(\vec{Q})$  и  $\hat{D}(\vec{Q})$ . Ниже запишем их:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_e(\vec{Q}) &= \sum_t e^{iQ_y t l^2} a_{t-\frac{Q_x}{2}}^\dagger a_{t+\frac{Q_x}{2}}; \\
\hat{\rho}_h(\vec{Q}) &= \sum_t e^{iQ_y t l^2} b_{t+\frac{Q_x}{2}}^\dagger b_{t-\frac{Q_x}{2}}; \\
\hat{\rho}(\vec{Q}) &= \hat{\rho}_e(\vec{Q}) - \hat{\rho}_h(-\vec{Q}); \\
\hat{D}(\vec{Q}) &= \hat{\rho}_e(\vec{Q}) + \hat{\rho}_h(-\vec{Q}); \\
d^\dagger(\vec{P}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{-iP_y t l^2} a_{t+\frac{P_x}{2}}^\dagger b_{-t+\frac{P_x}{2}}^\dagger; \\
d(\vec{P}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t e^{iP_y t l^2} b_{-t+\frac{P_x}{2}} a_{t+\frac{P_x}{2}}; \\
\hat{N}_e &= \hat{\rho}_e(0); \\
\hat{N}_h &= \hat{\rho}_h(0); \\
\hat{\rho}(0) &= \hat{N}_e - \hat{N}_h; \\
\hat{D}(0) &= \hat{N}_e + \hat{N}_h;
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Эти операторы выражаются через ферми операторы рождения и уничтожения  $a_p^\dagger, a_p$  для электронов и  $b_p^\dagger, b_p$  для дырок. Операторы Ферми электронов и дырок зависят от двух квантовых чисел. В калибровке Ландау одно из них – это волновой вектор  $p$ , а второе – квантовое число  $n$  уровня Ландау. Так как мы рассматриваем нижайший уровень Ландау, при котором  $n=0$ , то его обозначение будет опущено. Волновой вектор  $p$  принимает  $N$  различных значений, что говорит о  $N$ -кратном вырождении состояния 2D электронов в сильном магнитном поле.  $N$  выражается через площадь поверхностного слоя  $S$  и магнитную длину  $l$ , как  $N = \frac{S}{2\pi l^2}$ ;  $l^2 = \frac{\hbar c}{eH}$ , где  $H$  - это напряженность магнитного поля. Операторы

(3.1) удовлетворяют следующим коммутационным свойствам:

$$\begin{aligned}
[\hat{\rho}(\vec{Q}), \hat{\rho}(\vec{P})] &= -2i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{P} + \vec{Q}) \\
[\hat{D}(\vec{Q}), \hat{D}(\vec{P})] &= -2i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{P} + \vec{Q}) \\
[\hat{\rho}(\vec{Q}), \hat{D}(\vec{P})] &= -2i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{D}(\vec{P} + \vec{Q})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
[d(p), d^+(Q)] &= \delta_{kr}(\vec{P}, \vec{Q}) - \\
&- \frac{1}{N} \left[ iS \sin \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{Q}) + C \cos \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{D}(\vec{P} - \vec{Q}) \right] \\
[\hat{\rho}(\vec{P}), d(\vec{Q})] &= 2iS \sin \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) d(\vec{P} + \vec{Q}) \\
[\hat{\rho}(\vec{P}), d^+(\vec{Q})] &= -2iS \sin \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) d^+(-\vec{P} + \vec{Q}) \\
[\hat{D}(\vec{P}), d^+(\vec{Q})] &= 2C \cos \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) d^+(\vec{Q} - \vec{P}) \\
[\hat{D}(\vec{P}), d(\vec{Q})] &= -2C \cos \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) d(\vec{P} + \vec{Q})
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Можно заметить, что операторы флуктуации плотности для разных волновых векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  - не коммутируют. Их некоммутационность связана с вихрями, которые порождаются магнитным полем и зависят от векторного произведения двух волновых векторов  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$ , и его проекции на направление магнитного поля  $[\vec{P} \times \vec{Q}]_z$ .

Эти свойства значительным образом влияют на структуру уравнений движения для операторов (3.1) и определяют новый аспект физики 2D электронно-дырочных систем, в том числе плазменных колебаний и магнитоэкситонов. Действительно, в случае 3D e-h плазмы в отсутствии внешнего магнитного поля, операторы флуктуации плотности – коммутируют [35]. Операторы рождения и уничтожения  $d^\dagger(\vec{p})$  и  $d(\vec{Q})$  для магнитоэкситона не удовлетворяют точным коммутационным соотношениям для бозонов. Операторы  $\hat{\rho}(\vec{Q})$  определяют вид гамильтониана для 2D e-h системы в приближении НУЛ.

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \left[ \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) - \hat{N}_e - \hat{N}_h \right] - \mu_e \hat{N}_e - \mu_h \hat{N}_h \quad , \tag{3.4}$$

где

$$W_{\vec{Q}} = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon_0 S |\vec{Q}|} \text{Exp} \left[ -\frac{Q^2 l^2}{2} \right]; \quad \mu = \mu_e + \mu_h \tag{3.5}$$

Энергия двумерного магнитоэкситона  $E_{ex}(P)$  зависит от двумерного волнового вектора  $\vec{P}$

$$\begin{aligned}
E_{ex}(\vec{P}) &= -I_{ex}(\vec{P}) = -I_l + E(\vec{P}); \\
I_{ex}(\vec{P}) &= I_l e^{-\frac{P^2 l^2}{2}} I_0\left(\frac{P^2 l^2}{2}\right); & I_l &= \frac{e^2}{\varepsilon_0 l} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; & \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} &= I_l
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ионизационный потенциал  $I_{ex}(P)$  выражается через модифицированную функцию Бесселя  $I_0(z)$ , которая имеет предельные значения:

$$\begin{aligned}
I_0(z) &\underset{z \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{z^2}{4} + \dots; & I_0(z) &\underset{z \rightarrow \infty}{=} \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Это означает, что функция  $E(P)$  может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
E_{P \rightarrow 0}(\vec{P}) &= \frac{\hbar^2 P^2}{2M}; & M &= M(0) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\hbar^2 \varepsilon_0}{e^2 l}; \\
E_{P \rightarrow \infty}(P) &= I_l \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{Pl}\right); & l^2 &= \frac{\hbar c}{eH};
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Вместо химического потенциала  $\mu$  (3.5) мы будем использовать значение  $\bar{\mu}$ , отсчитанное от дна экситонной зоны.

$$\bar{\mu} = \mu - E_{ex}(0) = \mu + I_l; \tag{3.9}$$

В случае БЭК магнитоэкситонов на состояния с волновым вектором  $k \neq 0$  и химическим потенциалом, отсчитанным от уровня  $E_{ex}(k)$  экситона приходим к выражению:

$$\mu - E_{ex}(\vec{K}) = \bar{\mu} - E(\vec{K}); \tag{3.10}$$

Чтобы можно было исследовать явление Бозе-Эйнштейновской конденсации экситонов, нужно нарушить калибровочную инвариантность начального гамильтониана, с помощью унитарного преобразования  $\hat{D}(\sqrt{N_{ex}})$ , следуя методу Келдыша-Козлова-Копаева [29], [27].

Унитарное преобразование  $\hat{D}(\sqrt{N_{ex}})$  определяется формулой (8) [9]. Здесь  $N_{ex}$  - число конденсированных экситонов. Это преобразование превращает операторы  $a_p, b_p$  в другие операторы  $\alpha_p, \beta_p$ , как это было показано в (13), (14) [9] и приводит к новой волновой функции типа БКШ  $|\psi_g(\vec{k})\rangle$  описывающей новое макроскопическое когерентное состояние.

Упомянутые выше операторы состояния следующие:

$$\begin{aligned}
\hat{D}(\sqrt{N_{ex}}) &= \exp[\sqrt{N_{ex}}(d^\dagger(\bar{k}) - d(\bar{k}))] \\
|\psi_g(\bar{k})\rangle &= \hat{D}(\sqrt{N_{ex}})|0\rangle \\
\alpha_p &= \hat{D}a_p\hat{D}^\dagger = ua_p - v(p - \frac{k_x}{2})b_{k_x-p}^\dagger \\
\beta_p &= \hat{D}b_p\hat{D}^\dagger = ub_p + v(\frac{k_x}{2} - p)a_{k_x-p}^\dagger \\
a_p &= u\alpha_p + v(p - \frac{k_x}{2})\beta_{k_x-p}^\dagger \\
b_p &= u\beta_p - v(\frac{k_x}{2} - p)\alpha_{k_x-p}^\dagger
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
a_p|0\rangle = b_p|0\rangle = 0; \quad \alpha_p|\psi_g(\bar{k})\rangle = \beta_p|\psi_g(\bar{k})\rangle = 0 \\
u = \cos g; \quad v = \sin g; \quad v(t) = ve^{-ik_y t^2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$g = \sqrt{2\pi l^2 n_{ex}}; \quad n_{ex} = \frac{N_{ex}}{S} = \frac{v^2}{2\pi l^2} \quad g = v; \quad v = \text{Sin}v;$$

Данная теория развита в работах [9, 10] и применима в условиях  $v^2 \approx \text{Sin}^2 v$ , то есть когда  $v^2 < 1$ .

В рамках этого подхода могут быть изучены коллективные свойства на основе функции Грина, построенных на операторах  $\alpha_p, \beta_p$  и новом преобразованном гамильтониане  $\hat{\mathcal{H}} = D(\sqrt{N_{ex}})\hat{H}D^\dagger(\sqrt{N_{ex}})$ . Однако, имеется и другой подход полностью эквивалентный предыдущему, так как это было предложено Боголюбовым в его теории квазисредних [64]. Для демонстрации его идей рассмотрим случай 3D идеального бозе-газа с гамильтонианом:

$$H = \sum_{\vec{p}} \left( \frac{\hbar^2 p^2}{2m} - \mu \right) a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \tag{3.13}$$

где  $a_p^\dagger, a_p$  - бозе - операторы,  $\mu$  - химический потенциал. Идея Н.Н.Боголюбова состоит в добавлении члена:

$$-\eta\sqrt{V}(a_0 e^{i\varphi} + a_0 e^{-i\varphi}) \tag{3.14}$$

который нарушает калибровочную инвариантность исходного гамильтониана. Это позволяет рассмотреть БЭК на состояние с волновым вектором  $p = 0$ , в рамках нового гамильтониана отражающего основную идею метода квазисредних

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_p \left( \frac{\hbar^2 p^2}{2m} - \mu \right) a_p^\dagger a_p - \eta\sqrt{V}(a_0^\dagger e^{i\varphi} + a_0 e^{-i\varphi}) \tag{3.15}$$

где



$$\eta = -\mu\sqrt{\frac{N_0}{V}} = -\mu\sqrt{n_0}; \quad -\frac{\eta}{\mu} = \sqrt{n_0}; \quad (3.16)$$

и получить отличные от нуля средние значения  $\frac{\langle a_0 \rangle}{\sqrt{V}} = \sqrt{n_0}$ . Хотя метод был сформирован на примере не взаимодействующих частиц, наша задача заключается в том, чтобы применить эту идею в случае БЭК взаимодействующих 2D магнитоэкситонов. Мы получим новый гамильтониан, с нарушенной калибровочной симметрией оставаясь в рамках исходных операторов  $a_p, b_p$ , таким образом, чтобы не было необходимости обращаться к преобразованным операторам  $\alpha_p, \beta_p$  (3.11), по крайней мере, на некоторых этапах исследования.

Эти два представления являются полностью эквивалентными друг другу. Мы будем исследовать нашу систему с помощью метода квазисредних Боголюбова (3.15). Он используется вместо  $u, v$  преобразования Боголюбова (3.11-3.12), так как этот подход открывает некоторые новые возможности. Например, гамильтониан типа (3.15) более прост в рассмотрении, чем гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}} = D(\sqrt{N_{ex}})\hat{H}D^\dagger(\sqrt{N_{ex}})$  в  $\alpha_p, \beta_p$  представлении, и построение уравнений движения для операторов  $a_p, b_p$ , и построение многочастичных функций Грина на их базе является более простой задачей. В результате такого подхода мы получили преимущество на некоторых стадиях исследования. И напротив, когда будем иметь дело с вычислением средних значений различных операторов на базе волновой функции основного макроскопического когерентного состояния (3.11), то выгоднее, оказывается, использовать  $\alpha_p, \beta_p$  представление [9, 10]. Мы будем использовать оба эти представления. Новый вариант в представлении теории квазисредних может быть получен, если перепишем преобразованный гамильтониан  $D(\sqrt{N_{ex}})\hat{H}D^\dagger(\sqrt{N_{ex}})$  в  $a_p, b_p$  представлении. Чтобы показать это, приведем вид унитарного преобразования:

$$\begin{aligned} \hat{D}(\sqrt{N_{ex}}) &= e^{\hat{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{X}^n}{n!}; \\ D^\dagger(\sqrt{N_{ex}}) &= e^{-\hat{X}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \sqrt{N_{ex}}(e^{i\varphi}d^\dagger(K) - e^{-i\varphi}d(K)); \\ \hat{X}^\dagger &= -\hat{X}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

Операторы рождения и уничтожения  $d^+(k), d(k)$  (3.18) записаны в калибровке Ландау, когда электроны и дырки, формирующие магнитоэкситон, расположены на нижайших уровнях Ландау. Здесь мы рассматриваем только этот простейший вариант, и не будем принимать во внимания возбужденные уровни Ландау (ВУЛ). Если использовать оператор унитарного

преобразования  $D(\sqrt{N_{ex}})$  (3.17), то можно найти вид нового преобразованного гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}$ .

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= e^{\hat{X}} \hat{H} e^{-\hat{X}} = \\ &= \hat{H} + \frac{1}{1!} [\hat{X}, \hat{H}] + \frac{1}{2!} [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{H}]] + \frac{1}{3!} [\hat{X}, [\hat{X}, [\hat{X}, \hat{H}]]] + \dots = \\ &= \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}'\end{aligned}\quad (3.19)$$

Здесь гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}$  содержит только первые два слагаемых из разложения (3.19), тогда как оператор  $\hat{\mathcal{H}}'$  содержит все оставшиеся члены.

Из (3.18) видно, что оператор  $\hat{X}$  пропорционален квадратному корню из числа экситонов  $\sqrt{N_{ex}}$ , которое пропорционально, в свою очередь, фактору заполнения. Можно увидеть, что вклады, являющиеся результатом первого коммутатора  $[\hat{X}, \hat{H}]$  пропорциональны  $v$ , вклады, являющиеся результатом второго коммутатора  $[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{H}]]$  пропорциональны  $v^2$  и так далее. После применения теории квазисредних Боголюбова в гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}$  будут входить только линейные члены по  $(d^+(k)e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}d(k))v$ , являющиеся результатом первого коммутатора  $[\hat{X}, \hat{H}]$ .

Гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}$  с нарушенной калибровочной инвариантностью, описывающий БЭК 2D магнитоэкситонов на состояния с волновыми векторами  $k \neq 0$ , записанный в рамках теории квазисредних Боголюбова имеет вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H} + \sqrt{N_{ex}} (\bar{\mu} - E(\vec{K})) (e^{i\varphi} d^\dagger(\vec{K}) + e^{-i\varphi} d(\vec{K})); \quad (3.20)$$

Коэффициент  $-\eta\sqrt{V}$  в гамильтониане (3.15) теперь для 2D случая переписется в виде  $-\eta\sqrt{N}$ , где:

$$\eta = (E(k) - \bar{\mu}) v \quad (3.21)$$

Здесь  $N$  и фактор заполнения  $v^2$  определяются выражениями (3.1) и (3.12). В случае идеального бозе-газа оба члена  $\eta$  и  $(E(k) - \bar{\mu})$  стремятся к нулю, тогда как фактор заполнения реален и отличен от нуля. Во взаимодействующем экситонном газе оба параметра  $\eta$  и  $(E(k) - \bar{\mu})$  отличны от нуля.

Рассмотрим теперь оставшиеся члены. Они содержат вклады пропорциональные  $v^2, v^3$  и так далее. Так же существует еще один член, пропорциональный  $v$ , но он описывает нелинейное произведение экситона и оператора флуктуации плотности. Влияние этих

членов на БЭК магнитоэкситонов меньше по сравнению со вторым членом из (3.20).

Запишем оставшийся не использованный гамильтониан:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}' = & -(2i)\sqrt{N_{ex}} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \left( e^{i\varphi} d^\dagger(\vec{K} - \vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) - e^{-i\varphi} \hat{\rho}(\vec{Q}) d(\vec{K} - \vec{Q}) \right) + \\
& + 2N_{ex} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \left( e^{2i\varphi} d^\dagger(\vec{K} - \vec{Q}) d^\dagger(\vec{K} + \vec{Q}) + e^{-2i\varphi} d(\vec{K} + \vec{Q}) d(\vec{K} - \vec{Q}) \right) + \\
& + 2d^\dagger(\vec{K} - \vec{Q}) d(\vec{K} - \vec{Q}) - \frac{1}{N} \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) + N_{ex}(E(k) - \bar{\mu}) \left( 1 - \frac{\hat{D}(0)}{N} \right) - \\
& - i \frac{N_{ex}}{N} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Cos} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \left( \hat{D}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) - \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{D}(-\vec{Q}) \right) + \dots
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Дальше мы построим уравнения движения для операторов (3.1) на основе гамильтониана (3.20) в приближении теории квазисредних.

**III.2. Уравнения движения для операторов и функций Грина в присутствии бозе-эйнштейновского конденсата магнитоэкситонов на одночастичные состояния с произвольным значением волнового вектора**

Начальный гамильтониан в теории квазисредних  $\hat{\mathcal{H}}$  будет иметь вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \left[ \rho(\vec{Q})\rho(-\vec{Q}) - \hat{N}_e - \hat{N}_h \right] - \mu_e \hat{N}_e - \mu_h \hat{N}_h - \eta \sqrt{N} \left( e^{i\varphi} d^\dagger(k) + e^{-i\varphi} d(k) \right) \quad (3.23)$$

Уравнения движения для операторов (3.1) получены, используя соотношения коммутации (3.3):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} d(\vec{P}) &= [d(\vec{P}), \hat{\mathcal{H}}] = (E(\vec{P}) - \bar{\mu})d(\vec{P}) - \eta \sqrt{N} e^{i\varphi} \delta_{kr}(\vec{P}, \vec{K}) - \\ &- 2i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\vec{Q}) d(\vec{P} - \vec{Q}) + \\ &+ \eta e^{i\varphi} \left[ i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \frac{\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K})}{\sqrt{N}} + \text{Cos} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \frac{\hat{D}(\vec{P} - \vec{K})}{\sqrt{N}} \right]; \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P}) &= [d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P}), \hat{\mathcal{H}}] = (\bar{\mu} - E(2\vec{K} - \vec{P}))d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P}) + \\ &+ \eta \sqrt{N} e^{-i\varphi} \delta_{kr}(\vec{P}, \vec{K}) - 2i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[(2\vec{K} - \vec{P}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) - \\ &- \eta e^{-i\varphi} \left[ i \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \frac{\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K})}{\sqrt{N}} + \text{Cos} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \frac{\hat{D}(\vec{P} - \vec{K})}{\sqrt{N}} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K}) &= [\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K}), \hat{\mathcal{H}}] = \\ &= -i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) [\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K} - \vec{Q})] - \\ &- 2i\eta \sqrt{N} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) [e^{-i\varphi} d(\vec{P}) - e^{i\varphi} d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{D}(\vec{P} - \vec{K}) &= [\hat{D}(\vec{P} - \vec{K}), \hat{\mathcal{H}}] = \\ &-i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) [\hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{D}(\vec{P} - \vec{K} - \vec{Q}) + \hat{D}(\vec{P} - \vec{K} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q})] + \\ &+ 2\eta \sqrt{N} \text{Cos} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) [e^{-i\varphi} d(\vec{P}) - e^{i\varphi} d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P})]; \end{aligned}$$

где:

$$\eta = (E_{ex}(K) - \mu)v = (E(K) - \bar{\mu})v; \quad v = v^2; \quad N_{ex} = v^2 N; \quad (3.25)$$

Теперь обратим внимание на один важный аспект этих уравнений движения, связанный с некоммутативностью операторов (3.1), выраженный (3.2) и (3.3). Применяя те же самые рассуждения, получим выражение для оператора экситона  $d(P)$  :

$$\begin{aligned}
& (E(P) - \bar{\mu})d(P) - 2i \sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\bar{P} \times \bar{Q}]_z l^2}{2} \right) \rho(\bar{Q}) d(\bar{P} - \bar{Q}) = \\
& = -\bar{\mu}d(P) - i \sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\bar{P} \times \bar{Q}]_z l^2}{2} \right) [\rho(\bar{Q})d(\bar{P} - \bar{Q}) + d(\bar{P} - \bar{Q})\rho(\bar{Q})] = \\
& = -(\bar{\mu} + E(P))d(P) - 2i \sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\bar{P} \times \bar{Q}]_z l^2}{2} \right) d(\bar{P} - \bar{Q})\rho(\bar{Q}) = \dots
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Так же как и для оператора флуктуации плотности  $\hat{\rho}(P)$  :

$$\begin{aligned}
& -i \sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\bar{P} \times \bar{Q}]_z l^2}{2} \right) [\hat{\rho}(\bar{Q})\hat{\rho}(\bar{P} - \bar{Q}) + \hat{\rho}(\bar{P} - \bar{Q})\hat{\rho}(\bar{Q})] = \\
& = E(P)\hat{\rho}(P) - 2i \sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\bar{P} \times \bar{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\bar{Q})\hat{\rho}(\bar{P} - \bar{Q}) = \\
& = -E(P)\hat{\rho}(P) - 2i \sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[\bar{P} \times \bar{Q}]_z l^2}{2} \right) \hat{\rho}(\bar{P} - \bar{Q})\hat{\rho}(\bar{Q}) = \dots
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Они могут быть проверены, принимая во внимание соотношение:

$$2 \sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[\bar{P} \times \bar{Q}]_z l^2}{2} \right) = E(P) \tag{3.28}$$

Квант кулоновской энергии  $E(P)$  связан со спиральностью e-h системы в присутствии сильного перпендикулярного магнитного поля. Квант энергии  $E(P)$  с произвольным значением волнового вектора  $\bar{P}$  существует не только для e-h системы, а так же и для случая однокомпонентных электронных систем и однокомпонентных дырочных систем. Кванты потока магнитного поля приводят к созданию  $N$  вихрей в 2ДЭГ, и приводит к возникновению композитных фермионов и бозонов [18]. Неограниченный резервуар кулоновской энергии, в магнитном поле, характеризуется энергетическим квантом  $E(P)$ , который зависит только от квадрата электрического заряда  $e^2$  и магнитной длины  $l$ , и не зависит от концентрации e-h пар. Его можно было бы назвать как виртуальный квант кулоновской энергии. В выражениях (3.27) перестановка операторов добавляет или вычитает квант кулоновской энергии к исходной модели.

В случаях взаимодействия вещества с резонансным лазерным излучением с частотой  $\omega_L$ , энергия квазичастиц изменяется на энергию кванта фотона  $\hbar\omega_L$ . Такой тип энергии, который появляется в случае неограниченного резервуара энергии – называют квазиэнергией [45]. Новые дополнительные квазиэнергетические ветви спектра приводят к новым эффектам,

объединенным под названием оптический Штарк эффект [27]. Мы предполагаем, что что-то подобное имеет место и в случае сильного магнитного поля, но в отличие от лазерного излучения с хорошо определенной частотой  $\omega_L = ck_0$  и волновым вектором  $k_0$ , в случае сильного магнитного поля есть целая полоса кулоновской энергии и волновых векторов  $E(P)$ . Прибавляя или удаляя квант  $E(P)$ , мы можем формировать много виртуальных комплексов квазичастиц с различными свободными энергиями. Их можно объединить под названием квазиэнергетические комплексы. Поскольку, большинство из них, как мы выяснили, имеет большое затухание, то физически они бессмысленны и рассмотрены не будут. Выбор конкретных форм уравнений движения существенно зависит от теоретических методов, которые мы будем использовать.

Ниже мы применим метод функций Грина. В этом случае свободная энергия в уравнении движения для операторов играет роль энергии нулевого приближения. Они определяют функции Грина в нулевом приближении, тогда как нелинейные члены принимаются во внимание в более высоком порядке теории возмущения. Конечно, когда уравнение движения для функции Грина рассматривается точно, в таком случае безразлично какой из стартовых вариантов брать, так как они полностью эквивалентны. Но в действительности невозможно точно решить бесконечные цепочки уравнений движения для функции Грина, и использование приближений неизбежно.

Принимая во внимание эти соображения, мы выбрали уравнения движения для операторов рождения и уничтожения экситона  $d^\dagger(P), d(P)$  со свободной энергией, отсчитанной от химического потенциала экситона в виде  $(E_{ex}(P) - \mu)$ .  $E_{ex}(P)$  определяет энергию магнитоэкситона без каких-либо поправок связанных с экситон-экситон взаимодействием, то есть без зависимости от концентрационных поправок. Уравнения движения для операторов флуктуации плотности  $\rho(\vec{P})$  и  $D(\vec{P})$  были выбраны в первом варианте из уравнения (3.27), без членов свободной энергии. Это связано с тем, что мы ищем энергию внутриуровневых возбуждений происходящих на нижайшем уровне Ландау. Эти возбуждения зависят от фактора заполнения и не могут быть представлены квантом энергии  $E(P)$ . Истинные выражения для плазменных колебаний появляются лишь в уравнениях движения, содержащих вторые производные по времени. Они определяют квадрат частоты осцилляций, которые пропорционален параметру малости теории, имеющий вид  $v^2(1-v^2)$ . Другое важное соображение для выбора стартовых уравнений движения для функций Грина связано с величиной затухания тех элементарных возбуждений, которые мы получили. Мнимые части энергетического спектра элементарных возбуждений зависят от реальных процессов кулоновского рассеяния с участием квазичастиц, так же как и от их свободных

энергий, которые появляются в исходных уравнениях движения. Ниже мы покажем, что в большинстве случаев затухания имеют такой же порядок, что и соответствующие вещественные части, и все они определяются кулоновской энергией. Это означает, что такие элементарные возбуждения не могут в действительности существовать и иметь физическое значение. Еще раз подчеркнем, что это происходит из-за того, что кулоновскую энергию взаимодействия нельзя рассматривать как малое возмущение. Есть уникальная возможность для выбора уравнения движения для операторов  $\rho(\vec{P})$  и  $D(\vec{P})$  так как это было сделано в наших уравнениях движения. Можно записать различные варианты уравнений движения с различными членами свободной энергии для описания различных квазиэнергетических комплексов, состоящих из квазичастиц и кванта кулоновского взаимодействия  $E(P)$ . Мы выяснили, что имеется уникальная возможность получить при помощи метода функций Грина внутри-НУЛ плазменные возбуждения, которые при этом не будут иметь больших затуханий. Это выбранный нами вариант уравнений движения (3.24). Здесь уместно провести сопоставление результатов нашей работы с тем, что было изложено в диссертации В.В.Боцана [68], поскольку мы начинали совместно исследования, изложенные в работе {4}. Отличие наших результатов заключается именно в выборе исходных уравнений для операторов  $\rho(P)$  и  $D(P)$ . В диссертации В.В.Боцана [68] содержится только вариант со свободной энергией. Впоследствии, после опубликования работы {4} мы выяснили, что вариант со свободной энергией приводит к большому затуханию и от этого варианта отказались. В нашей диссертации впервые рассмотрен вариант уравнений для  $\rho(P)$  и  $D(P)$  без свободных энергий и получен энергетический спектр плазмонов без затухания. Но в случае магнитоэкситонов формирование некоторых квазиэнергетических комплексов вполне возможно. Здесь мы обсудим вариант с обычным дисперсионным законом. На основе уравнений движения (3.24) введем функции Грина и получим для них цепочки уравнений.

Следуя уравнению движения (3.24) мы введем четыре связанные запаздывающие функции Грина при  $T = 0$  [66, 47]:

$$\begin{aligned}
G_{11}(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle d(\vec{P}, t); d^\dagger(\vec{P}, 0) \right\rangle \right\rangle; \\
G_{12}(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P}, t); d^\dagger(\vec{P}, 0) \right\rangle \right\rangle; \\
G_{13}(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle \frac{\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K}, t)}{\sqrt{N}}; d^\dagger(\vec{P}, 0) \right\rangle \right\rangle; \\
G_{14}(\vec{P}, t) &= \left\langle \left\langle \frac{\hat{D}(\vec{P} - \vec{K}, t)}{\sqrt{N}}; d^\dagger(\vec{P}, 0) \right\rangle \right\rangle;
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Они определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
G(t) &= \left\langle \left\langle \hat{A}(t); \hat{B}(0) \right\rangle \right\rangle = -i\theta(t) \langle [A(t), B(0)] \rangle; \\
\hat{A}(t) &= e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{A} e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}; \\
[\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Где  $\hat{H}$  - гамильтониан (3.23).

Усреднение  $\langle \rangle$  будет проведено при  $T=0$  в приближении ХФБ, используя волновую функцию основного состояния  $|\psi_g(k)\rangle$  (3.11). Производная по времени от функции Грина рассчитана следующим образом:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} G(t) &= i\hbar \frac{d}{dt} \left\langle \left\langle A(t); B(0) \right\rangle \right\rangle = \\
&= \hbar \delta(t) \langle [\hat{A}(0), \hat{B}(0)] \rangle + \left\langle \left\langle i\hbar \frac{d}{dt} A(t); B(0) \right\rangle \right\rangle = \\
&= \hbar \delta(t) C + \left\langle \left\langle [\hat{A}(t), \hat{H}]; \hat{B}(0) \right\rangle \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Через  $C$  обозначим средние, независящие от времени. Для определения энергетического спектра возбуждения они в явной форме не требуются. Фурье-образ функции Грина (3.29) запишем таким образом:

$$\begin{aligned}
G_{11}(\vec{P}, \omega) &= \left\langle \left\langle d(\vec{P}) \middle| d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega; \\
G_{12}(\vec{P}, \omega) &= \left\langle \left\langle d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P}) \middle| d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega; \\
G_{13}(\vec{P}, \omega) &= \left\langle \left\langle \frac{\hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K})}{\sqrt{N}} \middle| d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega; \\
G_{14}(\vec{P}, \omega) &= \left\langle \left\langle \frac{\hat{D}(\vec{P} - \vec{K})}{\sqrt{N}} \middle| d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega;
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Эти два представления связаны друг с другом:

$$G(\vec{P}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} G(\vec{P}, t) dt = \int_0^{\infty} e^{i\omega t - \delta t} G(\vec{P}, t) dt$$

где бесконечно малое значение  $\delta \rightarrow +0$  гарантирует для запаздывающей функции Грина  $G(\vec{P}, t)$  сходимость интеграла в интервале  $(0, \infty)$ . Уравнение движения в частных производных могут быть получены на основе уравнения (31):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} i\hbar \frac{dG(t)}{dt} &= i\hbar \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t - \delta t} \frac{dG(t)}{dt} = -i\hbar \int_0^{\infty} dt G(t) \frac{de^{i\omega t - \delta t}}{dt} = \\
&= (\hbar\omega + i\delta)G(\omega) = C + \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\langle \left\langle [\hat{A}(t), \hat{H}]; \hat{B}(0) \right\rangle \right\rangle e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{3.33}$$



Функцию Грина (3.32) будем называть однооператорной функцией Грина, так как она содержит в левой стороне от вертикальной черты только один оператор типа  $d(P)$ ,  $d^\dagger(P)$ ,  $\hat{\rho}(P)$  и  $\hat{D}(P)$ . В то же самое время, эта функция Грина – двухчастичная функция Грина, так как операторы (3.1) выражены через произведение двух фермиевских операторов. В этом смысле функция Грина (3.32) эквивалентна двухчастичной функции Грина, введенной Келдышем и Козловым в [29]. В отличие от [29] мы используем операторы (3.1), которые представляют собой интегралы от парциальных вкладов со своими фазами. Уравнение движения для функции Грина (3.32) есть:

$$\begin{aligned}
& [\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\bar{P}) + i\delta]G_{11}(\bar{P}, \omega) = C - \\
& -2i\sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin}\left(\frac{[\bar{P}\times\bar{Q}]_z l^2}{2}\right) \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{Q})d(\bar{P}-\bar{Q}) \middle| d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} + \\
& + \eta e^{i\varphi} \left[ i\text{Sin}\left(\frac{[\bar{P}\times\bar{K}]_z l^2}{2}\right) G_{13}(\bar{P}, \omega) + \text{Cos}\left(\frac{[\bar{P}\times\bar{K}]_z l^2}{2}\right) G_{14}(\bar{P}, \omega) \right]; \tag{3.34} \\
& [\hbar\omega - \bar{\mu} + E(2\bar{K} - \bar{P}) + i\delta]G_{12}(\bar{P}, \omega) = C - \\
& -2i\sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin}\left(\frac{[(2\bar{K} - \bar{P})\times\bar{Q}]_z l^2}{2}\right) \left\langle \left\langle d^\dagger(2\bar{K} - \bar{P} - \bar{Q})\hat{\rho}(-\bar{Q}) \middle| d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} - \\
& - \eta e^{-i\varphi} \left[ i\text{Sin}\left(\frac{[\bar{P}\times\bar{K}]_z l^2}{2}\right) G_{13}(\bar{P}, \omega) + \text{Cos}\left(\frac{[\bar{P}\times\bar{K}]_z l^2}{2}\right) G_{14}(\bar{P}, \omega) \right]; \\
& [\hbar\omega + i\delta]G_{13}(\bar{P}, \omega) = C - \\
& -i\sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin}\left(\frac{[(\bar{P} - \bar{K})\times\bar{Q}]_z l^2}{2}\right) \left\langle \left\langle \left[ \frac{\hat{\rho}(\bar{P} - \bar{K} - \bar{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\bar{Q}) + \hat{\rho}(\bar{Q}) \frac{\hat{\rho}(\bar{P} - \bar{K} - \bar{Q})}{\sqrt{N}} \right] d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} - \\
& - 2i\eta \text{Sin}\left(\frac{[\bar{P}\times\bar{K}]_z l^2}{2}\right) \left[ e^{-i\varphi} G_{11}(\bar{P}, \omega) - e^{i\varphi} G_{12}(\bar{P}, \omega) \right]; \\
& [\hbar\omega + i\delta]G_{14}(\bar{P}, \omega) = C - \\
& -i\sum_{\bar{Q}} W_{\bar{Q}} \text{Sin}\left(\frac{[(\bar{P} - \bar{K})\times\bar{Q}]_z l^2}{2}\right) \left\langle \left\langle \left[ \hat{\rho}(\bar{Q}) \frac{\hat{D}(\bar{P} - \bar{K} - \bar{Q})}{\sqrt{N}} + \frac{\hat{D}(\bar{P} - \bar{K} - \bar{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\bar{Q}) \right] d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} + \\
& + 2\eta \text{Cos}\left(\frac{[\bar{P}\times\bar{K}]_z l^2}{2}\right) \left[ e^{-i\varphi} G_{11}(\bar{P}, \omega) - e^{i\varphi} G_{12}(\bar{P}, \omega) \right];
\end{aligned}$$

Уравнение движения (3.34) для однооператорной функции Грина  $G_{ij}(\bar{P}, \omega)$ , где  $j = 1, 2, 3, 4$  приводит к появлению новых двухоператорных функций Грина типа  $\left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{Q})d(\bar{P}-\bar{Q}) \middle| d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega}$ ,

$$\left\langle \left\langle d^\dagger(2\bar{K} - \bar{P} - \bar{Q})\hat{\rho}(-\bar{Q}) \middle| d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega}, \quad \left\langle \left\langle \frac{\hat{\rho}(\bar{P} - \bar{K} - \bar{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\bar{Q}) \middle| d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} \quad \text{и} \quad \left\langle \left\langle \frac{\hat{D}(\bar{P} - \bar{K} - \bar{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\bar{Q}) \middle| d^\dagger(\bar{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega},$$

проистекающих из-за существования нелинейных членов в уравнениях движения (3.24) для операторов (3.1). Это хорошо известная ситуация, описанная Зубаревым [47] в его обзорной статье. Для этой двхоператорной функции Грина были получены новые уравнения движения. Это второй шаг в данном методе построения бесконечных цепочек уравнений

движения. Эти два уравнения, являются точными. Новые уравнения движения будут содержать новые трехоператорные функции Грина, и так далее. Можно продемонстрировать это на примере конкретной двухоператорной функции Грина, возникающей как одна из компонент уравнения (3.34) для стартовой функции Грина  $G_{13}(\vec{P}, \omega)$ . Получим результат:

$$\begin{aligned}
& [h\omega + i\delta] \left\langle \left\langle \left[ \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega = \\
& C + \left\langle \left\langle \left[ \left( \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \right), \hat{\mathcal{H}} \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega = \\
& C - i \sum_R W_R \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}) \times \vec{R}]_z L^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle \left[ \left[ \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{Q}) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{Q}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{R}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \right] \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega - \\
& - i \sum_R W_R \text{Sin} \left( \frac{[\vec{Q} \times \vec{R}]_z L^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle \left[ \left[ \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) + \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{R}) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} + \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \right] \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega - \\
& - 2i\eta \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle \left[ e^{-i\varphi} (d(\vec{P}-\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) d(\vec{P}-\vec{Q})) - e^{i\varphi} (d^\dagger(2\vec{K}-\vec{P}+\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) d^\dagger(2\vec{K}-\vec{P}+\vec{Q})) \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega - \\
& - 2i\eta \text{Sin} \left( \frac{[\vec{Q} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right) \times \\
& \times \left\langle \left\langle \left[ e^{-i\varphi} (\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}) d(\vec{Q}+\vec{K}) + d(\vec{Q}+\vec{K}) \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - e^{i\varphi} (\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}) d^\dagger(\vec{K}-\vec{Q}) + d^\dagger(\vec{K}-\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})) \right] \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_\omega
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Точно такое же развитие уравнений движения имеет место и для всех четырех начальных стартовых функций Грина  $G_{1j}(\vec{P}, \omega)$ . Расцепление этих бесконечных цепочек уравнений движения необходимо делать с использованием разумных приближений. Следуя методике Зубарева [47] мы преобразуем трехоператорные функции Грина в однооператорные функции Грина(3.32), умноженные на среднее двух других оставшихся операторов. Если этот метод применить к двухоператорным функциям Грина, то фактически это приведет к линеаризации уравнений.

Линеаризация может быть достигнута, сохраняя только макроскопически большие значения операторов, заменяя их средними для некоторых хорошо определенных значений волнового вектора.

$$d(\vec{P}) \simeq \delta_{kr}(\vec{P}, \vec{K}) e^{i\varphi} \sqrt{N_{ex}}; \quad d^\dagger(\vec{P}) \simeq \delta_{kr}(\vec{P}, \vec{K}) e^{-i\varphi} \sqrt{N_{ex}};$$

$$\hat{D}(\vec{P}) \simeq \delta_{kr}(\vec{P}, 0) \langle \hat{D}(0) \rangle \simeq \delta_{kr}(\vec{P}, 0) 2N_{ex}; \quad (3.36)$$

$$\rho(\vec{P}) \simeq \delta_{kr}(\vec{P}, 0) \langle \hat{\rho}(0) \rangle = 0;$$

Напомним, что процедура расщепления была успешно применена в случае электронно-фононого взаимодействия, не только для металлов в нормальных состояниях, но и в случае сверхпроводимости. Этот метод может быть применен так же и в случае БЭК магнитоэкситонов. Вычисления средних произведений двух операторов, входящих к трехоператорной функции Грина будут сделаны, используя волновую функцию основного состояния БЭК. Используя эти идеи будут произведены некоторые упрощения. Введя суммирование по  $\vec{Q}$  в (3.35) для функции Грина, записанной в виде (3.34) мы получим:

$$\begin{aligned} & -i \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \left\langle \left\langle \left[ \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} = \\ & = C - \frac{1}{(\hbar\omega + i\delta)} \sum_{\vec{Q}} \sum_{\vec{R}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}) \times \vec{R}]_z l^2}{2} \right) \times \\ & \times \left\langle \left\langle \left[ \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{Q}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{Q}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{R}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}-\vec{R})}{\sqrt{N}} \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} - \\ & - \frac{1}{(\hbar\omega + i\delta)} \sum_{\vec{Q}} \sum_{\vec{R}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{Q} \times \vec{R}]_z l^2}{2} \right) \times \\ & \times \left\langle \left\langle \left[ \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) + \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{R}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{\rho}(\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} + \hat{\rho}(\vec{Q}-\vec{R}) \hat{\rho}(\vec{R}) \frac{\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})}{\sqrt{N}} \right] d^\dagger(\vec{P}) \right\rangle \right\rangle_{\omega} - \\ & - \frac{2\eta}{(\hbar\omega + i\delta)} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{Q}) \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \times \\ & \times [e^{-i\varphi} \langle \langle (d(\vec{P}-\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) d(\vec{P}-\vec{Q})) | d^\dagger(\vec{P}) \rangle \rangle_{\omega} - \\ & - e^{i\varphi} \langle \langle (d^\dagger(2\vec{K}-\vec{P}+\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q}) + \hat{\rho}(\vec{Q}) d^\dagger(2\vec{K}-\vec{P}+\vec{Q})) | d^\dagger(\vec{P}) \rangle \rangle_{\omega} ] - \\ & - \frac{2\eta}{(\hbar\omega + i\delta)} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P}-\vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{Q} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \times \\ & \times [e^{-i\varphi} \langle \langle (\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}) d(\vec{Q}+\vec{K}) + d(\vec{Q}+\vec{K}) \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})) | d^\dagger(\vec{P}) \rangle \rangle_{\omega} - \\ & - e^{i\varphi} \langle \langle (\hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}) d^\dagger(\vec{K}-\vec{Q}) + d^\dagger(\vec{K}-\vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q})) | d^\dagger(\vec{P}) \rangle \rangle_{\omega} ] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Используя аппроксимации (3.36) мы можем исключить из рассмотрения в уравнении (3.37) последние два слагаемых, из-за существования векторных произведений и свойств симметрии. Но в других случаях, эти слагаемые не будут равны нулю. Произведем расщепление трехоператорных функций Грина (3.34) используя следующие приближения:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left\langle \frac{\hat{\rho}(\bar{P}-\bar{K}-\bar{Q}-\bar{R})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q}) \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \\
& \approx G_{13}(\bar{P}, \omega) [\delta_{kr}(\bar{Q}, \bar{P}-\bar{K}) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + (\delta_{kr}(\bar{R}, -\bar{Q}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}-\bar{K})) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle]; \\
& \left\langle \left\langle \frac{\hat{\rho}(\bar{P}-\bar{K}-\bar{Q})}{\sqrt{N}} \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q}-\bar{R}) \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx G_{13}(\bar{P}, \omega) [\delta_{kr}(\bar{Q}, 0) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + \\
& + (\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}-\bar{K}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{Q} + \bar{K} - \bar{P})) \langle \hat{\rho}(\bar{P}-\bar{K}-\bar{Q}) \hat{\rho}(\bar{Q} + \bar{K} - \bar{P}) \rangle]; \\
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q}-\bar{R}) \frac{\hat{D}(\bar{P}-\bar{K}-\bar{Q})}{\sqrt{N}} \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \delta_{kr}(\bar{Q}, 0) G_{14}(\bar{P}, \omega) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + \\
& + G_{13}(\bar{P}, \omega) (\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}-\bar{K}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{Q} + \bar{K} - \bar{P})) \langle \hat{\rho}(\bar{Q} + \bar{K} - \bar{P}) \hat{\rho}(\bar{P}-\bar{K}-\bar{Q}) \rangle; \\
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{Q}) \frac{\hat{D}(\bar{P}-\bar{K}-\bar{Q}-\bar{R})}{\sqrt{N}} \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \delta_{kr}(\bar{R}, -\bar{Q}) G_{14}(\bar{P}, \omega) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle + \\
& + G_{13}(\bar{P}, \omega) [\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}-\bar{K}) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{D}(-\bar{Q}) \rangle + \delta_{kr}(\bar{Q}, \bar{P}-\bar{K}) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{D}(-\bar{R}) \rangle]; \\
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(\bar{R}) d(\bar{P}-\bar{Q}-\bar{R}) \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \delta_{kr}(\bar{R}, -\bar{Q}) G_{11}(\bar{P}, \omega) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle + \\
& + G_{13}(\bar{P}, \omega) [\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}-\bar{K}) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) d(\bar{K}-\bar{Q}) \rangle + \delta_{kr}(\bar{Q}, \bar{P}-\bar{K}) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) d(\bar{K}-\bar{R}) \rangle] \sqrt{N}; \\
& \left\langle \left\langle \hat{\rho}(\bar{Q}-\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{R}) d(\bar{P}-\bar{Q}) \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \delta_{kr}(\bar{Q}, 0) G_{11}(\bar{P}, \omega) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + \\
& + G_{13}(\bar{P}, \omega) [\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}-\bar{K}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{Q} + \bar{K} - \bar{P})] \langle \hat{\rho}(\bar{Q} + \bar{K} - \bar{P}) d(\bar{P}-\bar{Q}) \rangle \sqrt{N}; \\
& \left\langle \left\langle d^\dagger(2\bar{K}-\bar{P}-\bar{Q}-\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx G_{12}(\bar{P}, \omega) \delta_{kr}(\bar{R}, -\bar{Q}) \langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle + \\
& + G_{13}(\bar{P}, \omega) [\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{K}-\bar{P}) \langle d^\dagger(\bar{K}-\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle + \delta_{kr}(\bar{Q}, \bar{K}-\bar{P}) \langle d^\dagger(\bar{K}-\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle] \sqrt{N}; \\
& \left\langle \left\langle d^\dagger(2\bar{K}-\bar{P}-\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}-\bar{R}) \hat{\rho}(\bar{R}) \left| d^\dagger(\bar{P}) \right. \right\rangle \right\rangle_\omega \approx \delta_{kr}(\bar{Q}, 0) G_{12}(\bar{P}, \omega) \langle \hat{\rho}(\bar{R}) \hat{\rho}(-\bar{R}) \rangle + \\
& + G_{13}(\bar{P}, \omega) [\delta_{kr}(\bar{R}, \bar{P}-\bar{K}) + \delta_{kr}(\bar{R}, \bar{K}-\bar{P}-\bar{Q})] \langle d^\dagger(2\bar{K}-\bar{P}-\bar{Q}) \hat{\rho}(\bar{K}-\bar{P}-\bar{Q}) \rangle \sqrt{N};
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Здесь средние  $\langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{\rho}(-\bar{Q}) \rangle$ ,  $\langle \hat{\rho}(\bar{Q}) \hat{D}(-\bar{Q}) \rangle$ ,  $\langle \rho(\bar{Q} + \bar{K} - \bar{P}) d(\bar{P} - \bar{Q}) \rangle \sqrt{N}$  и  $\langle d^\dagger(2\bar{K} - \bar{P} - \bar{Q}) \rho(\bar{K} - \bar{P} - \bar{Q}) \rangle \sqrt{N}$  будут рассчитаны на основе волновой функции основного состояния  $|\psi_g(k)\rangle$  БЭК 2D магнитоэкситонов. Будет показано, что эти средние по существу зависят и пропорциональны малому параметру  $v^2(1-v^2)$ , связанного с концентрацией e-h. После расщепления и линеаризации многооператорная функция Грина выражается через однооператорную функцию Грина  $G_{1j}(\bar{P}, \omega)$ , где  $j=1,2,3,4$ . После введения собственно-энергетических частей  $\Sigma_{ij}(\bar{P}, \omega)$  можно получить замкнутую систему из четырех уравнений движения, типа уравнений Дайсона:

$$\sum_{j=1}^4 G_{1j}(\bar{P}, \omega) \Sigma_{jk}(\bar{P}, \omega) = C_{1k}; \quad k=1,2,3,4 \tag{3.39}$$

Есть 16 различных компонент матрицы  $4 \times 4$  построенной из собственно-энергетических частей:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11}(\vec{P}, \omega) &= (\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{P}) + i\delta) - 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \frac{\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{P} - \vec{Q}) + i\delta} - \\
&\quad - \frac{4\eta v (W_{\vec{P}-\vec{K}} N) \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right)}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{K}) + i\delta}; \\
\Sigma_{21}(\vec{P}, \omega) &= \frac{4\eta e^{2i\varphi} v (W_{\vec{P}-\vec{K}} N) \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right)}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{K}) + i\delta}; \\
\Sigma_{31}(\vec{P}, \omega) &= -i\eta e^{i\varphi} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \left( 1 - \frac{2(W_{\vec{P}-\vec{K}} N)}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{K}) + i\delta} \right) + \\
&\quad + \frac{4W_{\vec{P}-\vec{K}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right)}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{K}) + i\delta} \sum_{\vec{R}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{R} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) d(\vec{K} - \vec{R}) \rangle \sqrt{N} + \\
&\quad + 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{P}-\vec{K}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \frac{\text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{Q}) \times (\vec{P} - \vec{K})]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) d(\vec{K} - \vec{Q}) \rangle \sqrt{N}}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{P} - \vec{Q}) + i\delta} + \\
&\quad + 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} (W_{\vec{Q}+\vec{K}-\vec{P}} - W_{\vec{P}-\vec{K}}) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \frac{\langle \hat{\rho}(\vec{Q} + \vec{K} - \vec{P}) d(\vec{P} - \vec{Q}) \rangle \sqrt{N}}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{P} - \vec{Q}) + i\delta}; \\
\Sigma_{41}(\vec{P}, \omega) &= -\eta e^{i\varphi} \text{Cos} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right);
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Эти матричные элементы формируют первый столбец матрицы  $\|\Sigma_{ij}\|$ . Второй столбец сформирован матричными элементами  $\Sigma_{j2}(\vec{P}, \omega)$  с  $j = 1, 2, 3, 4$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{12}(\vec{P}, \omega) &= 4\eta \frac{e^{-2i\varphi} v (W_{\vec{K}-\vec{P}} N) \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right)}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(\vec{K}) + i\delta}; \\
\Sigma_{22}(\vec{P}, \omega) &= \hbar\omega - \bar{\mu} + E(2\vec{K} - \vec{P}) + i\delta - 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \frac{\text{Sin}^2 \left( \frac{[(2\vec{K} - \vec{P}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(2\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) + i\delta} - \\
&\quad - 4\eta v \frac{(W_{\vec{P}-\vec{K}} N) \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2} \right)}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(\vec{K}) + i\delta};
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{32}(\vec{P}, \omega) &= i\eta e^{-i\varphi} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right) \left[ 1 + \frac{2(W_{\vec{P}-\vec{K}} N)}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(\vec{K}) + i\delta} \right] - \\
&- 4 \frac{W_{\vec{P}-\vec{K}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right)}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(\vec{K}) + i\delta} \sum_{\vec{R}} W_{\vec{R}} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{R} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right) \langle d^\dagger(\vec{K} - \vec{R}) \hat{\rho}(-\vec{R}) \rangle \sqrt{N} + \\
&+ 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{K}-\vec{P}} \text{Sin} \left( \frac{[(2\vec{K} - \vec{P}) \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[(2\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) \times (\vec{K} - \vec{P})]_z L^2}{2} \right) \frac{\langle d^\dagger(\vec{K} - \vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \sqrt{N}}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(2\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) + i\delta} + \\
&+ 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} (W_{\vec{P}-\vec{K}} - W_{\vec{P}-\vec{K}+\vec{Q}}) \text{Sin} \left( \frac{[(2\vec{K} - \vec{P}) \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \frac{\langle d^\dagger(2\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) \rangle \sqrt{N}}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(2\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) + i\delta}; \\
\Sigma_{42}(\vec{P}, \omega) &= \eta e^{-i\varphi} \text{Cos} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right);
\end{aligned}$$

Третий столбец матрицы  $\|\Sigma_{ij}(\vec{P}, \omega)\|$  состоит из энергетических частей  $\Sigma_{j3}(\vec{P}, \omega)$  с  $j = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{13}(\vec{P}, \omega) &= 2i\eta e^{-i\varphi} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right); \\
\Sigma_{23}(\vec{P}, \omega) &= -2i\eta e^{i\varphi} \text{Sin} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right); \\
\Sigma_{33}(\vec{P}, \omega) &= (\hbar\omega + i\delta) - \frac{4}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \times \\
&\times [(W_{\vec{Q}} - W_{\vec{P}-\vec{K}}) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle + (W_{\vec{P}-\vec{K}} - W_{\vec{P}-\vec{K}-\vec{Q}}) \langle \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{K} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{K} + \vec{Q} - \vec{P}) \rangle]; \\
\Sigma_{43}(\vec{P}, \omega) &= 0;
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Четвертый столбец составлен энергетическими частями  $\Sigma_{j4}(\vec{P}, \omega)$  с  $j = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{14}(\vec{P}, \omega) &= -2\eta e^{-i\varphi} \text{Cos} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right); \\
\Sigma_{24}(\vec{P}, \omega) &= 2\eta e^{i\varphi} \text{Cos} \left( \frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z L^2}{2} \right); \\
\Sigma_{34}(\vec{P}, \omega) &= \frac{4}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{K}-\vec{P}+\vec{Q}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q} + \vec{K} - \vec{P}) \hat{D}(\vec{P} - \vec{K} - \vec{Q}) \rangle + \\
&+ \frac{4}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} W_{\vec{P}-\vec{K}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) [\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{D}(-\vec{Q}) \rangle - \langle \hat{\rho}(\vec{Q} + \vec{K} - \vec{P}) \hat{D}(\vec{P} - \vec{K} - \vec{Q}) \rangle]; \\
\Sigma_{44}(\vec{P}, \omega) &= (\hbar\omega + i\delta) - \frac{4}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{P} - \vec{K}) \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle;
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Большинство собственно-энергетических частей  $\Sigma_{ij}(\vec{P}, \omega)$ , записанных формулами (3.40) – (3.43), содержат среднее произведение двух операторов. Они были рассчитаны на основе волновой функции основного состояния  $|\psi_g(k)\rangle$  (3.11) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_g(k) | \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) | \psi_g(k) \rangle &= 4u^2 v^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right); \\
\langle \psi_g(k) | \hat{\rho}(\vec{Q} + \vec{P} - \vec{K}) \hat{\rho}(\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) | \psi_g(k) \rangle &= 4u^2 v^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times (\vec{P} + \vec{Q})]_z L^2}{2} \right); \\
\langle \psi_g(k) | \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{D}(-\vec{Q}) | \psi_g(k) \rangle &= 2iu^2 v^2 N \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z L^2}{1} \right); \\
\langle \psi_g(k) | \hat{\rho}(\vec{Q} + \vec{P} - \vec{K}) \hat{D}(\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) | \psi_g(k) \rangle &= 2iu^2 v^2 N \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times (\vec{P} + \vec{Q})]_z L^2}{1} \right); \\
\langle \psi_g(k) | d^\dagger(\vec{K} - \vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) | \psi_g(k) \rangle \sqrt{N} &= 2iuv^3 N \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right); \\
\langle \psi_g(k) | d^\dagger(\vec{P} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{P} - \vec{Q} - \vec{K}) | \psi_g(k) \rangle \sqrt{N} &= -2iuv^3 N \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times (\vec{P} - \vec{Q})]_z L^2}{2} \right); \\
\langle \psi_g(k) | \hat{\rho}(\vec{Q}) d(\vec{K} - \vec{Q}) | \psi_g(k) \rangle \sqrt{N} &= -2iuv^3 N \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right); \\
\langle \psi_g(k) | \hat{\rho}(\vec{P} + \vec{Q}) d(\vec{K} - \vec{P} - \vec{Q}) | \psi_g(k) \rangle \sqrt{N} &= -2iuv^3 N \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times (\vec{P} + \vec{Q})]_z L^2}{2} \right);
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Все эти средние пропорциональны значению  $N$  и по существу зависят от волнового вектора и от малых параметров типа  $u^2 v^2$  или  $uv^3$ . Но только средние типа  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  реальны, положительны при любых значениях волнового вектора. Все остальные средние – комплексные числа, меняющие свой знак в зависимости от значений волновых векторов и параметров собственно-энергетических частей. Все они будут опущены, чтобы упростить громоздкие выражения (3.40) – (3.43). Принимая во внимание исключительную роль которую играет среднее  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  мы повторим, следуя [9]:

$$\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle = 4u^2 v^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z L^2}{2} \right) \tag{3.45}$$

Несмотря на сделанные приближения относительно многооператорной функции Грина и среднего от произведения двух операторов, полученные выражения очень сложны. Но есть один способ радикально упростить дальнейшие вычисления. Он связан с коллинеарной геометрией экспериментального наблюдения элементарных возбуждений, когда направление распространения совпадает или противоположно волновому вектору конденсата  $\vec{k}$ . Эта геометрия будет обсуждена в следующем параграфе.

### **III.3. Случай больших волновых векторов бозе-конденсата в условиях образования метастабильной диэлектрической жидкости.**

Сложное дисперсионное уравнение, в общем, случаи выражается матричным уравнением:

$$\det |\Sigma_{ij}(\vec{P}, \omega)| = 0; \quad \vec{P} = \vec{K} + \vec{q}; \quad (3.46)$$

Это уравнение может быть упрощено существенным образом при помощи коллинеарной геометрии, когда волновой вектор  $\vec{P}$  элементарных возбуждений параллелен или антипараллелен волновому вектору БЭК  $\vec{k}$ . Мы представим волновой вектор  $\vec{P}$  в виде  $\vec{P} = \vec{k} + \vec{q}$ , отсчитывая его от волнового вектора конденсата  $\vec{k}$ . Относительный волновой вектор  $\vec{q}$  также будет коллинеарен к вектору  $\vec{k}$ . В этом случае, проекция произведения  $[\vec{P} \times \vec{K}]_z$  волнового вектора, так же как и член  $\text{Sin}\left(\frac{[\vec{P} \times \vec{K}]_z l^2}{2}\right)$  и половина из матричных

элементов  $\Sigma_{ij}(\vec{P}, \omega)$  в уравнении (3.46) обращаются в ноль. Матричное уравнение (3.46) распадается на два независимых уравнения. Одно из них относится только к оптическим плазменным колебаниям и имеет простой вид:

$$\Sigma_{33}(\vec{K} + \vec{q}; \omega) = 0; \quad [\vec{q} \times \vec{K}]_z = 0 \quad (3.47)$$

Второе уравнение содержит только диагональные компоненты собственно-энергетических частей  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$ ,  $\Sigma_{44}$ , и константу теории квазисредних  $\eta$  следующим образом:

$$\Sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) \Sigma_{22}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) \Sigma_{44}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) - 2\eta^2 (\Sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) + \Sigma_{22}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)) = 0 \quad (3.48)$$

Надо иметь в виду, что каждая собственно-энергетическая часть нелинейно зависит от  $\omega$ , так что число ветвей спектра может быть больше трех. Это уравнение определяет три взаимно-связанные группы решений. Две из них описывают возбуждения БЭК магнитоэкситонов, а третья группа относится к акустическим плазмонам. Несмотря на коллинеарность состояния  $[\vec{q} \times \vec{K}]_z = 0$ , уравнения (3.47) и (3.48), и их энергетические спектры  $\omega(\vec{q})$  не являются инвариантами по отношению к операции инверсии, когда  $\vec{q}$  заменяется на  $-\vec{q}$ , так как в системе есть выбранное направление, определяемое волновым вектором конденсата  $\vec{k}$ . По этой причине энергия для элементарных возбуждений с волновыми векторами  $\vec{q}$  и  $-\vec{q}$  различна. Мы заинтересованы в изучении БЭК на одночастичное состояние экситона с безразмерным волновым вектором  $kl \approx 3,6$ , так как в этих условиях метастабильная диэлектрическая жидкость устойчива и имеет минимальную энергию, и положительную сжимаемость при факторе заполнения  $v_m^2 \approx 0,28$  [9].



Когда значения фактора заполнения  $\nu = \nu^2$  меньше чем  $\nu_m^2$  БЭК магнитоэкситонов существует в виде капли с квазиравновесным фактором заполнения  $\nu_m^2$ . При другом предельном значении волнового вектора  $kl = 0$  средние (3.44) равняются нулю и все вклады в электронно-дырочных системах, связанные с этими средними обращаются в ноль. Даже в коллинеарной геометрии диагональные компоненты энергетических частей  $\Sigma_{ii}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)$  с  $i = 1, 2, 3, 4$  и  $kl = 3, 6$  не могут быть рассчитаны аналитически для произвольных значений волнового вектора  $\vec{q}$ . По этой причине мы получим аналитические выражения в случае  $kl \approx 3, 6$  и  $ql \leq 1 < kl$ , используя разложение в ряд по малым значениям  $ql < 1$ , меньших по сравнению с  $kl \approx 3, 6$ .

Энергетические части  $\Sigma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$  и  $\Sigma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$  в коллинеарной геометрии имеют вид:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= (\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}) + i\delta) - 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{k} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\ &\times \frac{\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}) + i\delta} = \sigma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) + i\Gamma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega); \\ \Sigma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= (\hbar\omega - \bar{\mu} + E(\vec{k} - \vec{q}) + i\delta) - 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{k} - \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\ &\times \frac{\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle}{\hbar\omega - \bar{\mu} + E(\vec{k} - \vec{q}) + i\delta} = \sigma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) + i\Gamma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega); \end{aligned} \quad (3.49)$$

Они разбиты на действительные и мнимые части. Обе части удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \Sigma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= -\Sigma_{11}^*(\vec{k} - \vec{q}, -\omega) \\ \sigma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= -\sigma_{11}(\vec{k} - \vec{q}, -\omega) \\ \Gamma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= \Gamma_{11}(\vec{k} - \vec{q}, -\omega) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Реальные  $\sigma_{11}$  и мнимые  $\Gamma_{11}$  части выглядят как:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= \hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}) - 4 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{k} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \frac{\text{Pf} \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q} - \vec{Q})}; \\ \Gamma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= 4\pi \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{k} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \delta(\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q} - \vec{Q})); \end{aligned} \quad (3.51)$$

Они будут разложены в ряд по малому параметру  $ql < 1$ , который намного меньше чем  $kl \approx 3, 6$ . В то же самое время, мы разложим знаменатель  $\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{K} + \vec{q} - \vec{Q})$  в формуле (3.51), принимая во внимание, что наиболее вероятное значение для  $Ql$  это единица, и  $Ql$

меньше чем волновой вектор элементарного возбуждения  $|\vec{k} + \vec{q}|l$ . Тогда в этом приближении мы можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q} - \vec{Q})} &\approx \frac{1}{\hbar\omega + \mu - E(\vec{k} + \vec{q})} + \\ &+ \frac{1}{(\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}))^2} \cdot \frac{\vec{Q}\partial E(\vec{P})}{\partial \vec{P}} \Big|_{\vec{P}=\vec{k}+\vec{q}} + \frac{1}{2} \frac{1}{(\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}))^2} \cdot \frac{\vec{Q}^2 \partial^2 E(\vec{P})}{\partial P^2} \Big|_{P=|\vec{k}+\vec{q}|} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в выражение для вещественных частей (3.51) мы можем опустить средний член, из-за его нечетной зависимости от  $\vec{Q}$ . Вещественная часть  $\sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)$  может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) &= \hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}) - \\ &- \frac{4}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q})} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{k} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle - \\ &- \frac{2 \left( \frac{\partial^2 E(P)}{\partial P^2} \right) \Big|_{P=|\vec{k}+\vec{q}|}}{(\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}))^2} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 Q^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{k} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \end{aligned} \quad (3.53)$$

А мнимая часть запишется таким образом:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) &= 4\pi \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{K} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\ &\times \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \delta \left( \hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{K} + \vec{q}) + \frac{\vec{Q}\partial E(\vec{P})}{\partial \vec{P}} \Big|_{\vec{P}=\vec{k}+\vec{q}} - \frac{1}{2} \frac{\vec{Q}^2 \partial^2 E(\vec{P})}{\partial P^2} \Big|_{P=|\vec{k}+\vec{q}|} \right); \end{aligned} \quad (3.54)$$

Мы можем записать среднее  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  и химический потенциал  $\bar{\mu}$  в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= E(k)(1 - 2v^2); \\ \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle &= 4u^2 v^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right); \\ I_{ex}(k) &= I_l - E(k); \quad \bar{\mu} = \mu + I_l; \quad I_l = \frac{e^2}{\varepsilon_0 l} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad u^2 = 1 - v^2; \\ E(k) &= 2 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right); \quad \eta = (E(k) - \bar{\mu})v; \quad v = v^2; \end{aligned} \quad (3.55)$$

Подставляя явное выражение для среднего  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$ , можно переписать разложения в ряд для собственно-энергетических частей  $\sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)$  и  $\Gamma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) &\approx \hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}) - \frac{16u^2v^2}{\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q})} \times \\
&\times \left\{ \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^4 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) + \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) + \right. \\
&+ \left. \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Cos} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right)^2 \right\} - \\
&- \frac{8u^2v^2 \frac{\partial^2 E(P)}{\partial P^2} \Big|_{P=|\vec{k}+\vec{q}|}}{(\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q}))^2} \left\{ \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \bar{Q}^2 \text{Sin}^4 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) + \right. \\
&+ \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \bar{Q}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) + \\
&+ \left. \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \bar{Q}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Cos} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right)^2 \right\};
\end{aligned} \tag{3.56}$$

и

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega) &= 16\pi u^2 v^2 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\
&\times \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{K} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \delta(\hbar\omega + \bar{\mu} - E(\vec{k} + \vec{q} - \vec{Q}))
\end{aligned} \tag{3.57}$$

где:

$$\begin{aligned}
\text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{K} + \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) &\equiv \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) + \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) + \\
&+ \text{Cos} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Коэффициенты, определяющие реальную часть собственно-энергетических частей  $\sigma_{11}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)$ ,  $\sigma_{22}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)$  и  $\sigma_{44}(\vec{K} + \vec{q}, \omega)$  был рассчитаны аналитически. Были введены безразмерные волновые вектора элементарного возбуждения  $Pl = z$ , волновой вектор конденсата  $kl = y \approx 3,6$ , и относительный волновой вектор  $ql = x < 1$ . В коллинеарной геометрии  $x < y$  мы можем написать:

$$z = |y + x \text{Cos} \alpha|, \text{ где } \alpha = 0, \pi, \text{ Cos} \alpha = \pm 1 \tag{3.59}$$

Эти коэффициенты определены следующим образом [22]:

$$\begin{aligned}
C(y) &= \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^4 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) = I_l^2 C_1(y); \\
C_1(y) &= \frac{1}{8\pi} \{ E_i(-y^2) - 4E_i(-\frac{y^2}{4}) + 3 \ln(y^2) + 3C - 8 \ln 2 \} = \\
&= \frac{1}{8\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-y^2)^k}{k(k!)} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{y^2}{4}\right)^k}{k(k!)} \right\} \\
C &= 0,577216 - \text{Euler constant}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Где  $E_i(y)$  - интегрально-показательная функция [22]. В пределе  $y \rightarrow 0$  фигурная скобка будет пропорциональна  $y^4$ . Этот интеграл был рассчитан в работе [9] приближенными методами, и его значение отличается на значение  $\sqrt{\pi}$  от его точного значения. Второй коэффициент  $L(x, y)$  зависит от  $x \text{Cos} \alpha$ . Запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) = I_l^2 x \text{Cos} \alpha L_1(y); \\
L_1(y) &= \frac{1}{4\pi} y \left[ \exp \left( -\frac{y^2}{4} \right) {}_i F_1 \left( 1; 2; \frac{y^2}{4} \right) - \exp(-y^2) {}_i F_1 \left( 1; 2; y^2 \right) \right];
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Значение  $L(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  будет пропорциональным  $y^3$ . Третий  $P(x, y)$  коэффициент пропорционален  $x^2$ :

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Cos} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right)^2 = I_l^2 x^2 P_1(y); \\
P_1(y) &= \frac{1}{16\pi} \left\{ -\frac{1}{2} + \exp \left( -\frac{y^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \exp(-y^2) + \frac{y^2}{4} \left[ \exp(-y^2) {}_i F_1 \left( 2; 3; y^2 \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{y^2}{4} \right) {}_i F_1 \left( 2; 3; \frac{y^2}{4} \right) \right] \right\};
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Значение  $P(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  будет пропорциональным  $y^2$ . Четвертый коэффициент  $F(y)$  будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
F(y) &= \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N Q^2 \text{Sin}^4 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) = \frac{I_l^2}{l^2} F_1(y); \\
F_1(y) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{y^2}{4} \right) + \frac{1}{8} \exp(-y^2) \right];
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Коэффициент  $N(x, y)$  пропорционален  $x \text{Cos} \alpha$ , где  $x = ql$  и  $\alpha$  - угол между волновыми векторами  $\vec{q}$  и  $\vec{k}$  в коллинеарной геометрии имеет два значения 0 и  $\pi$ . Этот коэффициент выглядит следующим образом:

$$N(x, y) = \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N Q^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) = \frac{I_l^2}{l^2} x \text{Cos} \alpha N_1(y); \quad (3.64)$$

$$N_1(y) = \frac{y}{8\pi} \left[ \exp \left( -\frac{y^2}{4} \right) - \exp(-y^2) \right];$$

Последний коэффициент  $S(x, y)$  пропорционален  $x^2$  и выглядит следующим образом:

$$S(x, y) = \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N Q^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Cos} \left( \frac{[\vec{K} \times \vec{Q}]_z l^2}{1} \right) \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right)^2 = \frac{I_l^2}{l^2} x^2 S_1(y); \quad (3.65)$$

$$S_1(y) = \frac{1}{16\pi} \left\{ -\frac{1}{2} + \exp \left( -\frac{y^2}{4} \right) {}_i F_1 \left( -1; 1; \frac{y^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \exp(-y^2) {}_i F_1 \left( -1; 1; y^2 \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{y^2}{4} \exp \left( -\frac{y^2}{4} \right) + \frac{y^2}{2} \exp(-y^2) \right\};$$

Теперь подставим коэффициенты (3.60) – (3.65) в выражение для  $\sigma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$ , и перейдем к безразмерным величинам:

$$\frac{\hbar \omega}{I_l} = \tilde{\omega}, \quad \frac{\bar{\mu}}{I_l} = \tilde{\mu}, \quad \frac{E(p)}{I_l} = \tilde{E}(p), \quad \frac{\sigma_{11}}{I_l} = \tilde{\sigma}_{11}, \quad \frac{\Gamma_{11}}{I_l} = \tilde{\Gamma}_{11}, \quad \frac{I_{ex}(k)}{I_l} = \tilde{I}_{ex}(k),$$

$$Pl = z, \quad Kl = y \quad ql = x \quad \text{Cos} \alpha = \pm 1 \quad \alpha = 0, \pi \quad (3.66)$$

Они преобразуют  $\tilde{\sigma}_{11}(x, y, \tilde{\omega})$  в выражение:

$$\tilde{\sigma}_{11}(x \text{Cos} \alpha, y, \tilde{\omega}) = u_{11}(x \text{Cos} \alpha, y, \tilde{\omega}) + v_{11}(x \text{Cos} \alpha, y, \tilde{\omega}) x \text{Cos} \alpha + x^2 W_{11}(x \text{Cos} \alpha, y, \tilde{\omega}) \quad (3.67)$$

где

$$u_{11}(x \text{Cos} \alpha, y, \tilde{\omega}) = \tilde{\omega} + \tilde{\mu} - \tilde{E}(y + x \text{Cos} \alpha) - \frac{16u^2 v^2 C_1(y)}{\tilde{\omega} + \tilde{\mu} - \tilde{E}(y + x \text{Cos} \alpha)} -$$

$$- \frac{8u^2 v^2 F_1(y) \frac{\partial^2 \tilde{E}(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=|y+x \text{Cos} \alpha|}}{(\tilde{\omega} + \tilde{\mu} - \tilde{E}(y + x \text{Cos} \alpha))^2},$$

$$v_{11}(x \text{Cos} \alpha, y, \tilde{\omega}) = - \frac{16u^2 v^2 L_1(y)}{\tilde{\omega} + \tilde{\mu} - \tilde{E}(y + x \text{Cos} \alpha)} -$$

$$- \frac{8u^2 v^2 N_1(y) \frac{\partial^2 \tilde{E}(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=|y+x \text{Cos} \alpha|}}{(\tilde{\omega} + \tilde{\mu} - \tilde{E}(y + x \text{Cos} \alpha))^2}, \quad (3.68)$$

$$W_{11}(x, y, \tilde{\omega}) = - \frac{16u^2 v^2 P_1(y)}{\tilde{\omega} + \tilde{\mu} - \tilde{E}(y + x \text{Cos} \alpha)} - \frac{8u^2 v^2 S_1(y) \frac{\partial^2 \tilde{E}(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=|y+x \text{Cos} \alpha|}}{(\tilde{\omega} + \tilde{\mu} - \tilde{E}(y + x \text{Cos} \alpha))^2},$$

Дисперсионное выражение  $\tilde{E}(y)$  для магнитоэкситона можно аппроксимировать более простым выражением:

$$\tilde{E}(y) = \frac{y^2}{4+y^2}; \quad \tilde{I}_{ex}(y) = \frac{4}{4+y^2}; \quad y = kl; \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial E(y)}{\partial y} = \frac{8y}{(4+y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} = \frac{8(4-3y^2)}{(4+y^2)^3};$$

$\tilde{E}(y)$  имеет квадратичную зависимость в области малых  $y$ , и стремится к единице, когда  $y$  стремится к бесконечности.

Раскладывая в ряд реальную энергетическую часть  $\sigma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$  подобным способом, как и для  $\sigma_{11}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$  мы, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}(x \cos \alpha, y, \tilde{\omega}) &= u_{22}(x \cos \alpha, y, \tilde{\omega}) + x \cos \alpha v_{22}(x \cos \alpha, y, \tilde{\omega}) + \\ &+ x^2 w_{22}(x \cos \alpha, y, \tilde{\omega}) = -\sigma_{11}(-x \cos \alpha, y, -\tilde{\omega}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Как и раньше здесь мы пользовались следующими обозначениями:  $x = ql$ ,  $y = kl$ ,  $\alpha = 0, \pi$ ,

$\cos \alpha = \pm 1$ ,  $\tilde{\omega} = \frac{\hbar \omega}{I_l}$ . Коэффициенты  $u_{22}$ ,  $v_{22}$  и  $w_{22}$  тогда запишутся как:

$$\begin{aligned} u_{22}(x \cos \alpha, y, \tilde{\omega}) &= \tilde{\omega} - \tilde{\mu} + \tilde{E}(y - x \cos \alpha) - \frac{16u^2 v^2 C_1(y)}{(\tilde{\omega} - \tilde{\mu} + \tilde{E}(y - x \cos \alpha))} + \\ &+ \frac{8u^2 v^2 F_1(y) \frac{\partial^2 \tilde{E}(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=|y-x \cos \alpha|}}{(\tilde{\omega} - \tilde{\mu} + \tilde{E}(y - x \cos \alpha))^2} = -u_{11}(-x \cos \alpha, y, -\tilde{\omega}); \\ v_{22}(x \cos \alpha, y, \tilde{\omega}) &= \frac{16u^2 v^2 L_1(y)}{(\tilde{\omega} - \tilde{\mu} + \tilde{E}(y - x \cos \alpha))} - \\ &- \frac{8u^2 v^2 N_1(y) \frac{\partial^2 \tilde{E}(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=|y-x \cos \alpha|}}{(\tilde{\omega} - \tilde{\mu} + \tilde{E}(y - x \cos \alpha))^2} = v_{11}(-x \cos \alpha, y, -\tilde{\omega}); \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} w_{22}(x \cos \alpha, y, \tilde{\omega}) &= -\frac{16u^2 v^2 P_1(y)}{(\tilde{\omega} - \tilde{\mu} + \tilde{E}(y - x \cos \alpha))} + \\ &+ \frac{8u^2 v^2 S_1(y) \frac{\partial^2 \tilde{E}(z)}{\partial z^2} \Big|_{z=|y-x \cos \alpha|}}{(\tilde{\omega} - \tilde{\mu} + \tilde{E}(y - x \cos \alpha))^2} = -w_{11}(-x \cos \alpha, y, -\tilde{\omega}) \end{aligned}$$

Мнимая часть  $\Gamma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$  определена выражением:

$$\Gamma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) = 4\pi \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \sin^2 \left( \frac{[(\vec{k} - \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \delta(\hbar \omega - \bar{\mu} + E(\vec{k} - \vec{q} - \vec{Q})) \quad (3.72)$$

Теперь рассмотрим диагональные собственно-энергетические части  $\Sigma_{33}$  и  $\Sigma_{44}$ . Их мнимые компоненты равны нулю.

Начальное выражение есть:

$$\Sigma_{44}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) = (\hbar\omega + i\delta) - \frac{4}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \quad (3.73)$$

и формула (3.45) для среднего  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  приводит к реальным и мнимым частям. Для действительной части  $\Sigma_{44}$  и мнимой части  $\Sigma_{22}$  получены выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_{44}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= \hbar\omega - \frac{16u^2 v^2}{\hbar\omega} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{k} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right); \\ \Gamma_{22}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= 16\pi u^2 v^2 \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}}^2 N \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{k} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \text{Sin}^2 \left( \frac{[(\vec{k} - \vec{q}) \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\ &\times \delta(\hbar\omega - \bar{\mu} + E(\vec{k} - \vec{q} - \vec{Q})) = \Gamma_{11}(\vec{k} - \vec{q}, -\omega) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Мы рассматриваем диапазон волновых векторов  $ql < 1$ . Принимая во внимание, что самое вероятное значение  $\vec{Q}$  это  $\bar{Q}l \cong 1$ , то мы можем заменить  $\text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right)$  на  $\left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right)^2$ . Это приближение приводит к финальному выражению для  $\sigma_{44}$  в зависимости от безразмерной частоты  $\tilde{\omega}$  и волновых векторов  $x = ql$  и  $y = kl$

$$\sigma_{44}(x, y, \tilde{\omega}) = \tilde{\omega} - \frac{x^2}{\tilde{\omega}} \left[ u^2 v^2 \frac{2}{\pi} A_1(y) \right] \quad (3.75)$$

Где коэффициент  $A_1(y)$  записывается таким образом:

$$A_1(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{y^2}{4}} + \frac{y^2}{16} e^{-\frac{y^2}{4}} {}_1F_1 \left( 1; 3; \frac{y^2}{4} \right); \quad (3.76)$$

Последняя диагональная собственно-энергетическая часть  $\Sigma_{33}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$  имеет следующий начальный вид:

$$\begin{aligned} \Sigma_{33}(\vec{k} + \vec{q}, \omega) &= (\hbar\omega + i\delta) - \frac{4}{\hbar\omega + i\delta} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \times \\ &\times \{ W_{\vec{Q}} \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle - W_{\vec{Q}-\vec{q}} \langle \hat{\rho}(\vec{q} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q} - \vec{q}) \rangle + W_{\vec{q}} [\langle \hat{\rho}(\vec{q} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q} - \vec{q}) \rangle - \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle] \} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Эта собственно-энергетическая часть считалась отдельно от остальных. Такое разделение было сделано благодаря коллинеарной геометрии. Коллинеарная геометрия позволяет сделать и другие упрощения, так как средние  $\langle \hat{\rho}(\vec{q} - \vec{Q}) \hat{\rho}(\vec{Q} - \vec{q}) \rangle$  и  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  равны только в случае  $[\vec{q} \times \vec{k}]_z = 0$  и поэтому последний член в квадратной скобке обращается в ноль.

Упрощенное выражение для  $\sigma_{33}(\vec{k} + \vec{q}, \omega)$  выглядит так:

$$\sigma_{33}(x, y, \tilde{\omega}) = \hbar\omega - \frac{4}{\hbar\omega} \sum_{\vec{Q}} W_{\vec{Q}} (W_{\vec{Q}} - W_{\vec{Q}-\vec{q}}) \text{Sin}^2 \left( \frac{[\vec{q} \times \vec{Q}]_z l^2}{2} \right) \langle \hat{\rho}(\vec{Q}) \hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle \quad (3.78)$$

Уравнение (3.78) в случае БЭК магнитоэкситонов зависит от среднего  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  (3.45). В свою очередь среднее значение  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle$  существенным образом зависит от волнового вектора конденсата  $\vec{k}$  и обращается в ноль в точке  $\vec{k} = 0$ . Как было показано в работе [65] и в предыдущей главе, в случае ЭДЖ собственно-энергетическая часть  $\sigma_{33}(q, \omega)$ , описывающая возбуждения электронно-дырочной системы в рамках НУЛ, имеет подобную форму, но со средним  $\langle \hat{\rho}(\vec{Q})\hat{\rho}(-\vec{Q}) \rangle = 2v^2(1-v^2)N$ .



### III.4. Спектр элементарных возбуждений

Используя вышеизложенные преобразования для  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$ ,  $\Sigma_{44}$  можно получить решения уравнения (3.48). Энергетический спектр элементарных коллективных возбуждений характеризуется взаимозависящими ветвями спектров экситона и акустических плазмонов, потому что в 2D электронно-дырочной системе в сильном перпендикулярном магнитном поле спектр элементарных возбуждений плазменного типа не имеет энергетической щели и лежит в той же спектральной области, что и элементарные экситонные возбуждения. Присутствие конденсата экситонов приводит к появлению квазиэнергетических областей спектра, что отражается дополнительной ветвью спектра экситонов, известной как квазиэнергетической ветви экситонного спектра. Это подобно случаю лазерного излучения, взаимодействующего с электронно-дырочными парами в полупроводнике и приводящему к различным оптическим эффектам Штарка. Квазиэнергетическая ветвь спектра появляется и у акустических плазмонов. Важно отметить, что спектр элементарных коллективных возбуждений в условиях БЭК магнитоэкситонов различен при учете и без учета концентрационных поправок. Это связано с участием плазменных ветвей спектра, квадрат энергии которых пропорционален концентрации носителей  $\frac{v^2}{2\pi l^2}$ , где  $v^2$  есть фактор заполнения. Без учета концентрационных поправок плазмоны отсутствуют. В этом случае и химический потенциал не имеет концентрационных поправок и экситонный спектр элементарных возбуждений такой же, как у идеального экситонного газа, но с волновым вектором  $k \neq 0$ . Из-за присутствия Бозе-конденсата имеются две экситонные ветви спектра, одна энергетическая, а другая квазиэнергетическая. Учет концентрационных поправок добавляет две плазменные ветви спектра с энергиями отличными от нуля. Их две, так же благодаря присутствию конденсата. Экситонные ветви спектра преобразуются. Из-за изменения химического потенциала появляются энергетические щели у экситонных ветвей и что более существенно, меняется их число. Концентрационные добавки к экситонному спектру появляются в виде плазменных спутников с добавлением плазмона к энергии экситонных ветвей и с отнятием энергии плазмона от энергии экситонных ветвей. Экситонные ветви теперь превращаются в экситон-плазменные ветви и их число отличается от числа исходных экситонных ветвей.

Рассмотрены графики спектров элементарных коллективных возбуждений двумерных магнитоэкситонов в условиях БЭК и образования метастабильной диэлектрической жидкости. На рисунках представлены следующие варианты:

Если мы предположим, что волновой вектор движения конденсата будет равен нулю, тогда мы получим идеальный экситонный газ, а плазменная ветвь будет в точности равна нулю. Это изображено на Рис.12. Это в точности совпадает с результатами, полученными Пакетом, Райсом и Уедой [8].

Рассмотрим теперь БЭК магнитоэкситонов с волновым вектором  $kl \neq 0$ . Сперва пренебрежем концентрационными поправками. Приняв равным нулю фактор заполнения НУЛ  $v^2$  в уравнении для собственно-энергетических частей (3.48) мы получим спектр идеального экситонного газа, изображенного на Рис. 13. Так как конденсат имеет волновой вектор  $kl = 3.6$  и движется как единое целое относительно лабораторной системы отсчета, то закон дисперсии видоизменяется. В дисперсионное уравнение входит слагаемое, содержащее скалярное произведение групповой скорости конденсата и вектора элементарного возбуждения, отсчитанного от вектора конденсата. Как следствие дисперсионные кривые имеют наклон, что и видно на Рис. 12. Спектр акустического плазмона будет в точности равен нулю, так как плазменные колебания, как было отмечено выше, должны быть пропорциональны концентрации носителей зарядов на НУЛе.

На Рис. 14 изображен вид элементарных возбуждений БЭК магнитоэкситонов и спектр акустического плазмона при факторе заполнения  $v^2 = 0.28$ . Энергетическая щель в спектре экситонных возбуждений обусловлена тем, что для появления элементарных возбуждений вначале требуется затратить энергию для выхода экситона из состояния метастабильной диэлектрической жидкости. Величина этой щели точно соответствует значению химического потенциала. Квазиэнергетическая ветвь получается из энергетической ветви с помощью двух операций симметрии. Одна связана с отражением относительно оси абсцисс, а другая с отражением относительно оси ординат. Поведение акустической плазменной ветви обусловлено тем, что конденсат находится в движении и поэтому мы имеем возникновение элементарных возбуждений как вперед, по направлению движения конденсата, когда  $\text{Cos}(\alpha) = 1$ , так и назад при  $\text{Cos}(\alpha) = -1$ . Видно, что энергия экситонного элементарного возбуждения в случае БЭК магнитоэкситонов входит не в чистом виде, а с добавкой энергии акустического плазмона. Экситонная ветвь спектра имеет два спутника с добавлением и отнятием энергии плазмона. Так же можно заметить, что у спектра плазмонов появляется акустическая квазиэнергетическая ветвь, которая так же является отражением присутствия конденсата.

На Рис. 15 показана та же самая ситуация, но для фактора заполнения  $v^2 = 0.028$ . Можно заметить, что при этом резко уменьшается энергетическая щель между спектрами энергии и квазиэнергии. Можно объяснить этот факт уменьшением энергии связи в

метастабильной жидкости, в результате чего нужно затратить меньше энергии на ее возбуждение.

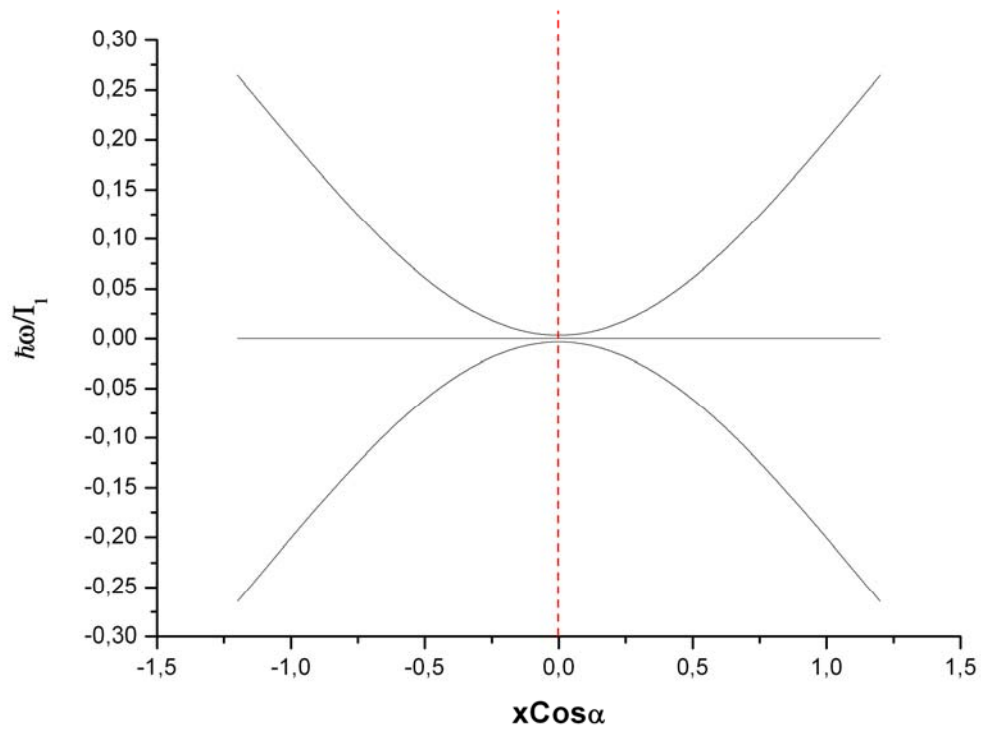


Рис. 12. Идеальный экситонный газ. Фактор заполнения  $\nu^2 = 0.28$ , волновой вектор  $y = 0$ .

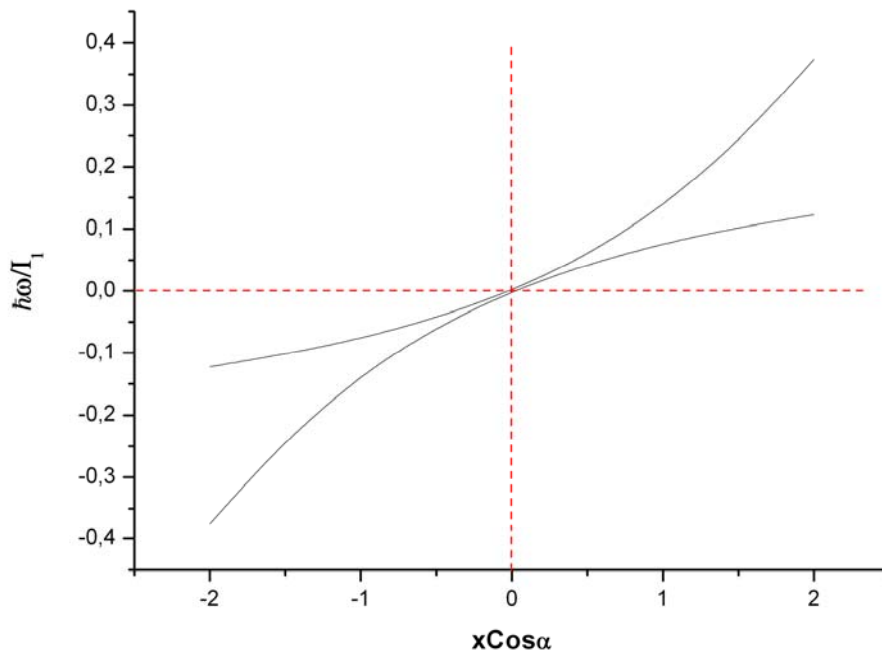


Рис. 13. Идеальный экситонный газ. Фактор заполнения  $\nu^2 = 0$ , волновой вектор  $y = 3.6$

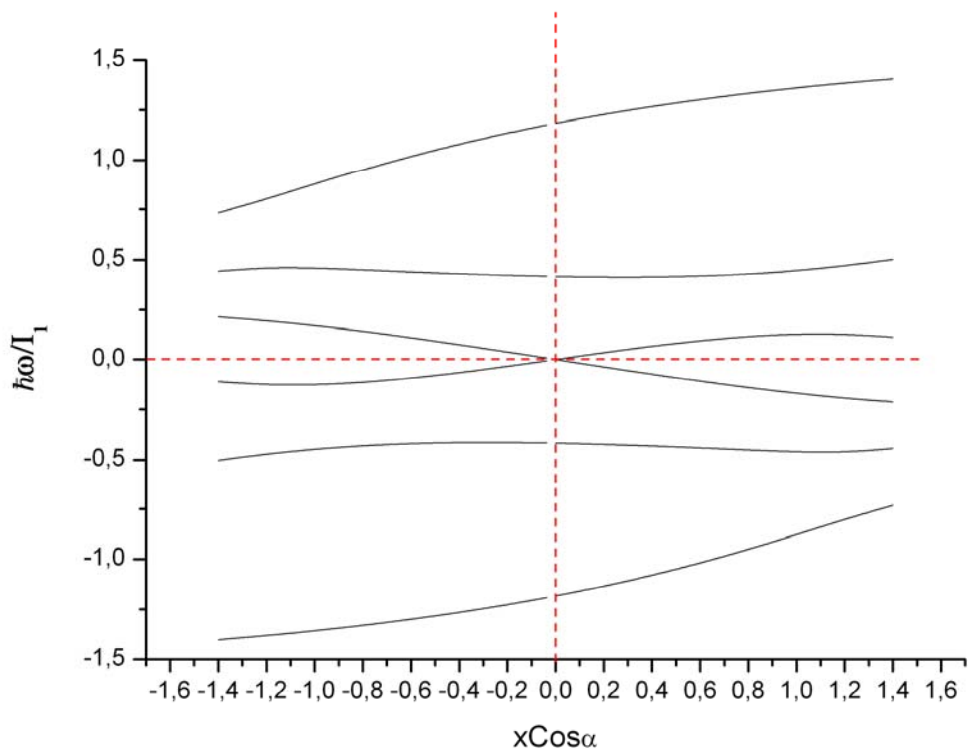


Рис. 14. Элементарные возбуждения БЭК магнитоэкситонов и спектр акустического плазмона при факторе заполнения  $\nu^2 = 0.28$ , волновой вектор  $y = 3.6$ .

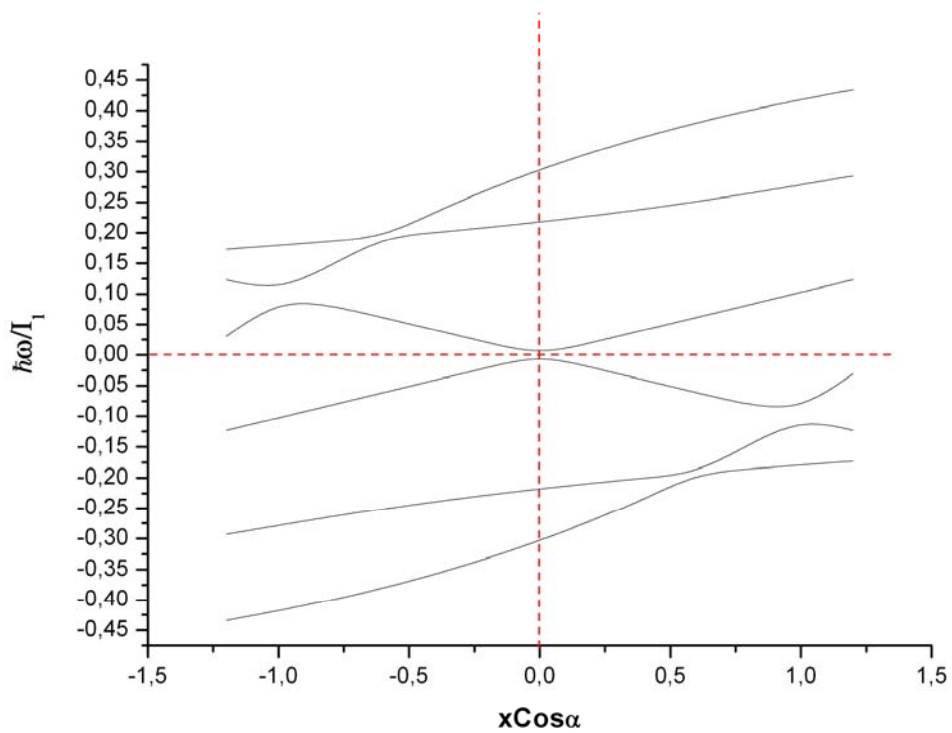


Рис. 15. Элементарные возбуждения БЭК магнитоэкситонов и спектр акустического плазмона при факторе заполнения  $\nu^2 = 0.028$ , волновой вектор  $y = 3.6$ .

### *Основные результаты, выводы, рекомендации*

- Выведен гамильтониан описывающий дополнительное косвенное взаимодействие между частицами находящимися на НУЛ обусловленное влиянием ВУЛ, при котором две частицы в процессе кулоновского взаимодействия совершают виртуальные переходы с НУЛ на разноименные и одноименные ВУЛ и возвращаются обратно. Косвенное двухчастичное взаимодействие за счет прямых членов при усреднении приводит к общему притяжению, и понижению энергии всей системы. На этом фоне обменные члены при усреднении приводят к стабилизации состояния БЭК магнитоэкситонов с волновыми векторами  $kl < 0.5$ . Значение химического потенциала при БЭК магнитоэкситонов и энергия, приходящаяся на одну  $e-h$  пару в основном состоянии ЭДЖ, оказываются близко расположенными на энергетической шкале и сосуществование двух фаз возможно.
- Гамильтониан данной работы может быть использован для изучения других состояний, например в случае однокомпонентной двумерной плазмы (OC2DP).
- Показано, что в электронно-дырочной системе существует возможность формирования различных виртуальных квазиэнергетических комплексов с различным затуханием, которое по существу зависит от их свободной энергии. Найдены такие уравнения движения для операторов флуктуации плотности, при которых затухание плазменных колебаний равно нулю, в рамках данного приближения. Имеются два типа плазменных колебаний: оптические и акустические. В диапазоне малых значений волнового вектора акустическая ветвь плазменных колебаний имеет линейную зависимость. В диапазоне больших волновых векторов, спектр колебаний является монотонным с насыщением. Оптическая ветвь имеет квадратичную зависимость в диапазоне малых значений волнового вектора, немонотонное поведение ротонного типа в средней области и монотонное возрастание с насыщением при больших значениях волнового вектора. Существенно то, что существуют осцилляции плотности в пределах НУЛ, несмотря на то, что 2D система находится под действием сильного перпендикулярного магнитного поля и у квазичастиц отсутствует кинетическая энергия.
- Показано, что энергетический спектр коллективных элементарных возбуждений над основным состоянием системы, представляющим собой Бозе-Эйнштейновский конденсат магнитоэкситонов, состоит из экситонных энергетических ветвей сопровождаемых плазмонными спутниками и чисто плазменными ветвями. Важно

отметить, что концентрационные поправки у экситонных ветвей спектра появляются в виде плазмонных спутников и фактически имеются экситон-плазмонные ветви и чисто плазменные ветви спектра. Экситонная компонента экситон-плазмонных ветвей имеет энергетическую щель определяемую значением химического потенциала, который в условиях метастабильной диэлектрической жидкости имеет отрицательные значения, зависящие от фактора заполнения. Энергетическая щель в спектре связана с затратой энергии на освобождение магнитного экситона из состава диэлектрической жидкости в процессе возникновения элементарного коллективного возбуждения. Такая ситуация не встречалась в теории бозе-газов. При рассмотрении БЭК магнитных экситонов с волновым вектором  $k = 0$  все члены кулоновского взаимодействия в пределах НУЛ взаимно точно уничтожаются, как это впервые показали Лернер и Лозовик [5, 6], если не учитывать ВУЛ, и спектр элементарных коллективных возбуждений совпадает со спектром возбуждения отдельного свободного магнитоэкситона. При этом спектр плазмонов в точности равен нулю при всех значениях волнового вектора элементарного плазменного возбуждения, которые в нашем случае отсчитываются от волнового вектора конденсата. Существенно отметить, что собственно энергетические части, определяющие усеченные функции Грина в технике развитой Д.Н.Зубаревым зависят от фактора когерентности, который зависит от волнового вектора конденсата  $k$  и в точности обращается в нуль в точке  $k = 0$ , что подтверждает ранее полученные результаты Лернера и Лозовика [5, 6], Пакета, Райса и Уеды [8] и объясняют поведение акустических плазмонов, описанное выше.

**Основные результаты диссертации опубликованы в работах:**

1. S.A.Moskalenko, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny and M.I.Shmiglyuk Coexistence of two Bose-Einstein condensates of two-dimensional magnetoexcitons with and without motional dipole moments. *Mold.Jour.Phys. Sciences* vol. 2, №3, p. 336 - 352, 2003
2. S.A.Moskalenko, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny. Coulomb scattering processes of electrons and holes between Landau levels and energy spectrum of two-dimensional magnetoexcitons. *MJPS*, vol 3, №1, p. 71 – 94, 2004
3. Е.Думанов, Влияние возбужденных уровней Ландау на бозе-эйнштейновскую конденсацию 2D магнитоэкситонов в сильном перпендикулярном магнитном поле, *Analele Stiint. ale Universit. de Stat din Moldova*, 2004, стр 47-52
4. S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, V.V.Botan, E.V.Dumanov, and Ig.V.Podlesny, Collective elementary excitations of Bose-Einstein condensed two-dimensional magnetoexcitons strongly interacting with electron-hole plasma, *MJPS*, Vol. 4, № 2, p. 142 – 196, 2005.
5. S.A.Moskalenko, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny and M.I.Shmiglyuk, Bose-Einstein Condensation of two-dimensional magnetoexcitons. The influence of the excited Landau levels, *Proc. SPIE*, 2006 ICONO, vol. 6256, p.62560X. 1-14
6. S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, P.I.Khadzhi, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny and V.Boțan, Influence of the excited Landau levels on the two-dimensional electron-hole system in a strong perpendicular magnetic field, *Solid State Comm.*, 140/5, 236-239, 2006
7. S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, P.I.Khadzhi, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny and V.Boțan, Influence of Coulomb scattering of electrons and holes between Landau levels on energy spectrum and collective properties of two-dimensional magnetoexcitons, *Physica E*, 39, 137-149, 2007
8. E.V.Dumanov, M.A.Liberman, S.A.Moskalenko, M.I.Shmiglyuk, A.G.Stefan, The plasma oscillations in a two-dimensional electron-hole liquid, *Journal of Physical Studies*, Vol. 12, № 4, 2008, 4 pages (in press)
9. S.A.Moskalenko, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny, M.I.Shmiglyuk Coulomb scattering processes of electrons and holes between Landau levels and energy spectrum of two-dimensional magnetoexcitons Abstract of 2<sup>nd</sup> International Conference on Materials Science and Condensed Matter Physics (dedicated to the 40<sup>th</sup> anniversary of Institute of Applied Physics of the Academy of Sciences of Moldova), (Kishinev, Moldova, September 21-26, 2004)
10. Е.Думанов Влияние возбужденных уровней Ландау на Бозе-Эйнштейновскую конденсацию 2D магнитоэкситонов. *Conferinta Tinerilor Cercetatorii din Moldova*, 11 Noiembrie 2004, Chisinau, Moldova
11. S.A.Moskalenko, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny and M.I.Shmiglyuk Bose-Einstein Condensation of two-dimensional magnetoexcitons. The influence of the excited of Landau levels. *ICONO – 2005 conference* 11 – 15 May St.Petersburg Russia *ICONO / LAT – SYS – 2005*, Oral presentation
12. Е.В.Думанов Влияние возбужденных уровней Ландау на Бозе-Эйнштейновскую конденсацию 2D магнитоэкситонов. *Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005"*, секция "Физика", сборник тезисов, Том 2, Физический факультет МГУ, 15-17 апреля 2005, стр.152-153
13. E.V. Dumanov. Bose-Einstein Condensation of two-dimensional magnetoexcitons. The influence of the excited Landau levels. *Материалы IV Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в образовании, науке и производстве»*, г. Тирасполь, 5-9 июня 2005 г, стр. 68-69
14. S.A. Moskalenko, M.A. Liberman, V.V. Botan, E.V. Dumanov, Ig.V. Podlesny, A. Stefan. Exciton-plasmon collective elementary excitations of Bose-Einstein condensed two-dimensional magnetoexcitons. *Rezumatele Lucrărilor ale Conferinței fizicienilor din Moldova CFM-2005* (Chișinău, R. Moldova, 19-20 octombrie 2005), p.12

15. S.A. Moskalenko, E.V. Dumanov, Ig.V. Podlesny, M.I. Smigliuk and Ig.A. Leleakov. Influence of the excited Landau levels on two-dimensional magnetoexcitons. *Rezumatel Lucrărilor ale Conferinței fizicienilor din Moldova CFM-2005* (Chișinău, R. Moldova, 19-20 octombrie 2005), p.82
16. S.A. Moskalenko, E.V. Dumanov, Ig.V. Podlesny, M.I. Shmiglyuk. Bose-Einstein condensation of two-dimensional magnetoexcitons. The influence of the excited Landau levels. Energy spectrum of two-dimensional magnetoexcitons. *Proceedings of the 4-th International Conference on "Microelectronics and Computer Science"* (vol. 1), Chisinau, Moldova, September 15-17, 2005, p.100
17. Е.В. Думанов. Влияние возбужденных уровней Ландау на Бозе-Эйнштейновскую конденсацию 2D магнитоэкситонов. *Материалы Форума "Всемирный год физики в Московском университете", Научная конференция молодых ученых, Секция 2, Теоретическая физика, Физический факультет МГУ, 15-17 сентября 2005, стр.24-25, Plenary session*
18. Dumanov E.V., Moscalenco S.A., Shmiglyuc M.I., The plasma oscillations in a two-dimensional electron-hole system in a strong perpendicular magnetic field, 3<sup>rd</sup> Intern. Conf. Mat. Sci. Chișinău, Moldova Cond. Mat. Phys., 2006, p. 225
19. Е.В.Думанов, Влияние возбужденных уровней Ландау на образование двумерной электрон-дырочной, *Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых «Ломоносов-2006»*, Том 2, стр. 107-108, (12-16 апреля 2006 г., МГУ им. М. В. Ломоносова) Москва
20. Е.В.Думанов, Возбуждения двумерной электронно-дырочной жидкости в пределах нижайшего уровня Ландау, *Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых «Ломоносов-2007»*, (11-14 апреля 2007г., МГУ им. М.В.Ломоносова) Москва, стр. 220-221 (Диплом за лучший доклад на секции «Физика»).
21. E.V.Dumanov, M.A.Liberman, S.A.Moskalenko, M.I.Shmiglyuk, A.G.Stefan, The plasma oscillations in a two-dimensional electron-hole liquid, 3 Ukrainian Conference on Semiconductor Physics, 17-22 June 2007, Odessa, Ukraine
22. S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, E.V.Dumanov, A.G.Stefan and M.I.Shmiglyuk, The plasma oscillations in the two-dimensional electron-hole systems, *Rezumatel Lucrărilor ale Conferinței fizicienilor din Moldova CFM-2007* (Chișinău, R. Moldova, 11-12 octombrie 2007), p. 30
23. S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, E.V.Dumanov, A.G.Stefan and M.I.Shmiglyuk, Intra-Landau level plasmon excitations in two-dimensional electron-hole system Conference dedicated to prof. E.P. Pokatilov, 8 June 2007, Chisinau.
24. E.V.Dumanov, Collective properties of 2D magnetoexcitons and plasmons, *International Conference of Young Researchers*, November 9, 2007, Chisinau Moldova
25. Е.В.Думанов, С.В.Колун, Элементарные коллективные возбуждения в системе бозе-эйнштейновских конденсированных 2D магнитоэкситонов. *Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и мол. ученых «Ломоносов-2008»*, (7-11 апреля 2008г., МГУ им. М.В.Ломоносова) Москва, [Электронный ресурс] — М.: Издательство МГУ; СП МЫСЛЬ, 2008. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); ISBN 978-5-91579-003-1



### Список литературы:

- [1] L.V.Butov and A.I.Finin Anomalous transport and luminescence of indirect excitons in AlAs/GaAs coupled quantum wells as evidence for exciton condensation. Phys.Rev.B, 1998, 58, pp. 1980 - 2000
- [2] V.Negoita, D.W.Snoko and K.Eberl, Harmonic-potential traps for indirect excitons in coupled quantum wells. Phys.Rev.B, 1999, 60, pp. 2661-2669
- [3] V.V.Krivolapchuk, E.S.Moskalenko and A.L.Zhmodikov, Specific features of the indirect exciton luminescence line in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As double quantum wells, Phys.Rev.B, 2001, 64, 045313 - 045318
- [4] А.В. Ларионов, В.Б. Тимофеев, П.А. Ни, С.В. Дубонос, И. Хвам, К. Соеренсен, Бозе-конденсация межъямных экситонов в двойных квантовых ямах Письма в ЖЭТФ, 2002, том 75, вып. 11, с. 689-694
- [5] I.V.Lerner and Yn.E.Lofovik, Phase transitions in two-dimensional electron-hole systems in high magnetic fields. J.Low Temper.Phys., 1980, 38, 333 - 352;  
И.В.Лернер, Ю.Е.Лозовик, Экситон Мотта в квазидвумерных полупроводниках в сильном магнитном поле, ЖЭТФ, 1980, 78, с. 1167 - 1174
- [6] И.В.Лернер и Ю.Е.Лозовик, Двумерные электронно-дырочные системы в сильном магнитном поле как почти идеальный газ экситонов. ЖЭТФ, 1981, 80, вып. 4, с. 1488 - 1503
- [7] A.B.Dzyubenko and Yn.E.Lofovik, Exact solutions and Bogoliubov transformations for zero-dimensional electron-hole systems, Fiz.Tverd.Tela (Leningrad), 1983, 25, 1519; Quasi-two-dimensional condensate of electron-hole pairs in a strong magnetic field, 1984 26, 1540 [Sov.Phys.Solid State 25,874 (1983); 26, 938 (1984)]
- [8] D.Paquet, T.M.Rice and K.Ueda Two-dimensional electron-hole fluid in a strong perpendicular magnetic field: Exciton Bose condensate or maximum density two-dimensional droplet, Phys.Rev.B, 1985, 32, 5208 - 5221
- [9] S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, D.W.Snoko and V.V.Botan, Polarizability, correlation energy, and dielectric liquid phase of Bose-Einstein condensate of two-dimensional excitons in a strong perpendicular magnetic field, Phys.Rev.B, 2002, 66, p. 245316 - 245330
- [10] S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, D.W.Snoko, V.V.Botan and B.Johansson, Bose-Einstein condensation of excitons in ideal two-dimensional system in a strong magnetic field. Physica E, 2003, 19, 278 - 288
- [11] V.V.Bořan, M.A.Liberman, S.A.Moskalenko, D.W.Snoko, B.Johansson, Bose-Einstein condensation of magnetoexcitons in ideal two-dimensional system in a strong magnetic field, Physica B: Condensed Matter, 2004, Vol 346-347, p. 460-464

- [12] S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, D.W.Snoke and V.V.Botan, Bose-Einstein condensation of excitons in ideal 2D system in strong magnetic field, *Mold.Jour.Phys. Sciences*, 2002, 1, №4, pp. 5-18,
- [13] Березинский В.Л. Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии, *Журн. Эксперим. и Теор. Физ.*, 1970, т. 59, вып. 3(9), с. 907
- [14] J.M.Kosterlitz and D.J.Thouless Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems, *J.Phys. C*. 1973, 6, pp. 1181 - 1203
- [15] J.M.Kosterlitz, The critical properties of the two-dimensional xy model, *J.Phys. C*. 1974, 7, pp. 1046 - 1060
- [16] М.А. Либерман, Б. Йоханссон, Вещество в сверхсильном магнитном поле и структура поверхности нейтронных звезд, *Успехи Физ. Наук*, 1995, 165, с. 121-142
- [17] Dong Lai, Matter in strong magnetic fields, *Rev. Mod. Phys.*, 2001, 73, 629 - 662
- [18] H.L.Stormer, D.C.Tsui, C.Gossard The fractional quantum Hall effect, *Rev. Mod. Phys.*, 1999, 71, S298 - S305
- [19] *Perspectives in Quantum Hall Effects*, edited by S. Das Sarma, and A.Pinczuk (John Wiley & sons, Inc., New York, 1997).
- [20] Yu.A.Bychkov and E.I.Rashba, Deexcitons in an inverted 2D semiconductor magnetoplasma, *JETP Lett.*, 1990, 52, 624 - 629; idem, Excitons and deexcitons in a neutral two-dimensional magnetoplasma with a strong population inversion, *Phys. Rev. B*, 1991, 44, 6212 - 6219.
- [21] *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D.W. Snoke, and S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [22] I.S.Gradshcheyn and I.M.Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and products*, (Academic, New York, 1965).
- [23] L.L.Landau and E.M.Lifshitz, *Quantum mechanics*, (Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1981)
- [24] A.S.Davydov, *Teorija Tverdogo tela*, (Nauka, Moscow 1976)
- [25] L.V.Butov, A.L.Ivanov, A.Imamoglu, P.B.Littlewood, A.A.Shashkin, V.T.Dolgoplov, K.L.Campman, and A.C.Gossard, Stimulated Scattering of Indirect Excitons in Coupled Quantum Wells: Signature of a Degenerate Bose-Gas of Excitons, *Phys. Rev. Lett.*, 2001, 86, 5608 - 5611
- [26] C.Comte and P.Nozieres, Exciton Bose condensation: the ground state of an electron-hole gas. I. Mean field description of a simplified model, *J. Phys.(France)*, 1982, 43, 1069 - 81

- [27] S.A.Moskalenko and D.W.Snoke "Bose - Einstein condensation of excitons and biexcitons and coherent nonlinear optics with excitons". Cambridge University Press, Cambridge UK, New York USA, (1000), 415 pages
- [28] P.W.Anderson, New Method in the Theory of Superconductivity Phys.Rev., 1958, 110, 985 – 986
- [29] Л.В.Келдыш, А.Н.Козлов, Коллективные свойства экситонов в проводниках, ЖЭТФ, 1968, 54, 978 A968
- [30] R.J.Glauber, The Quantum Theory of Optical Coherence, Phys. Rev., 1963, 130, 2529 - 2539, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, 1963, 131, 2766 - 2788
- [31] M.Combescot and C.Tanguy, New criteria for bosonic behavior of excitons, Europhys. Lett., 2001, 55, pp. 390-396
- [32] S.Schmitt-Rink, D.S.Chemla and H.Haug, Nonequilibrium theory of the optical Stark effect and spectral hole burning in semiconductors, Phys. Rev. B 1988, 37, pp. 941 - 955
- [33] S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, V.Botan and D.W.Snoke, Coexistence of two Bose-Einstein condensates of two-dimensional magnetoexcitons. Exciton-plasmon collective elementary excitations, Sol. State Comm. 2005, 134, 23 - 26
- [34] C.Kallin and B.I.Halperin, Excitations from a filled Landau level in the two-dimensional electron gas, Phys. Rev. B, 1984, 30, 5655 - 5668
- [35] D.Pines Elementary Excitations in Solids (Benjamin, New York, 1963)
- [36] S.Das Sarma and A.Madhukar, Collective modes of spatially separated, two-component, two-dimensional plasma in solids, Phys.Rev.B, 1981, 23, 805 - 815
- [37] A.I.Kasyan, P.I.Rusu, The effect of collective electron-hole plasma modes on charge carrier mobility in polar semiconductors, Phys.Stat.Solid (b), 1985, 127, 439 – 447
- [38] А.И.Касиян, И.В.Шур, И.И.Балмуш, Подвижность 2D электронов при их рассеянии на связанных плазмонах – фононных колебаниях, Физ. Тех. Полупров., 1991 25, 689
- [39] S.M.Girvin, A.H.MacDonald, and P.M.Platzman, Magneto-roton theory of collective excitations in the fractional quantum Hall effect, Phys.Rev.B, 1986, 33 №4, 2481 - 2494
- [40] R.B.Laughlin, Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations, Phys. Rev. Lett., 1983, 50, 1395 - 1398
- [41] R.P.Feynman Statistical Mechanics (Benjamin, Reading, Mass, 1972. Chap. 11)
- [42] H.A.Fertig, Energy spectrum of a layered system in a strong magnetic field, Phys.Rev.B, 1989, 40, 1087 - 1095
- [43] Y.N.Joglekar and A.H.MacDonald, Microscopic functional integral theory of quantum fluctuations in double-layer quantum Hall ferromagnets, Phys. Rev. B, 2001, 64, 155315 - 155324

- [44] V.M.Apalkov and E.I.Rashba, Interaction of excitons with an incompressible quantum liquid, Phys. Rev. B, 1992, **46**, 1628 - 1638; *ibid.* Doublet structure of emission spectra from fractional quantum Hall states, 1993, **48**, 18312 - 18315; *idem.*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **54**, (1991) 160; *ibid.* **55**, (1992) 38.
- [45] A.I.Baz', Ya.B.Zeldovich and A.M.Perelomov Scattering, Reactions and delays in Nonrelativistic Quantum mechanics (Nauka, Moscow, 1971) (in Russian)
- [46] J.K.Jain, Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect, Phys. Rev. Lett., 1989, **63**, pp. 199 - 202
- [47] Д.Н.Зубарев, Двухвременные функции Грина в статистической физике, Успехи Физ. Наук, 1960, **71**, с. 71 - 116
- [48] E.I.Rashba, Excitons in incompressible quantum liquids, Pure and Applied Chem., 1995, **67**, pp. 409 - 418
- [49] D.C.Tsui, H.L.Stormer, and A.C.Gossard, Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, pp. 1559- 1562
- [50] A.H.MacDonald, E.H.Rezayi, and D.Keller, Photoluminescence in the fractional quantum Hall regime, Phys. Rev. Lett., 1992, **68**, pp. 1939 - 1942
- [51] F.D.M.Haldane, Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States, Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, pp. 605 - 608
- [52] B.I. Halperin, Statistics of Quasiparticles and the Hierarchy of Fractional Quantized Hall States, Phys. Rev Lett., 1984, **52**, pp. 1583 - 1586
- [53] D.Arovas, J.R.Schriffer, and F.Wilczek, Fractional Statistics and the Quantum Hall Effect, Phys. Rev. Lett., 1984, **53**, pp. 722 - 723
- [54] E.H.Rezayi and F.D.M.Haldane, Off-Diagonal Long-Range Order in Fractional Quantum-Hall-Effect States Phys. Rev. Lett., 1988, **61**, pp. 1985 - 1988
- [55] S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, P.I.Khadzhi, E.V.Dumanov, Ig.V.Podlesny and V.Botan, Influence of excited Landau levels on a two-dimensional electron-hole system in a strong perpendicular magnetic field, Sol. State Comm., 2006, **140/5**, 236 - 239
- [56] X.M.Chen and J.J.Quinn, Numerical study of fractional quantum Hall electron-hole systems: Evidence of stable anyonic ions, Phys. Rev. Lett., 1993, **70**, 2130 - 2133
- [57] L.V.Butov, A.L.Ivanov, A.Imamoglu, P.B.Littlewood, A.A.Shashkin, V.T.Dolgoplov, K.L.Campman, and A.C.Gossard, Stimulated Scattering of Indirect Excitons in Coupled Quantum Wells: Signature of a Degenerate Bose-Gas of Excitons, Phys. Rev. Lett., 2001, **86**, 5608 - 5611
- [58] R.P.Feynman Statistical Mechanics (Benjamin, Reading, Mass, 1972. Chap. 11)

- [59] Y.Kuramoto and C.Horie, Two-dimensional excitonic phase in strong magnetic fields, *Solid State Commun*, 1978, 25, 713 - 716
- [60] J.Eisenstein Abstracts of the International Conference on Spontaneous Coherence in Excitonic system. Champion, Pennsylvania, USA 25-28 May 2004, Edited by University of Pittsburgh, p.28.
- [61] A.MacDonald Ibidem p.29
- [62] X.M.Chen and J.J.Quinn, Excitonic charge-density-wave instability of spatially separated electron-hole layers in strong magnetic fields, *Phys.Rev.Lett.*, 1991, 67, 895 - 898
- [63] X.M.Chen and J.J.Quinn, Correlated charge-density-wave states of double-quantum-well systems in a strong magnetic field, *Phys.Rev.B*, 1992 45, 11054 - 11066
- [64] N.N.Bogoliubov Collection of papers in three volumes (*Naukova Dumka*, Kiev, 1971) vol.2 and vol. 3 (in Russian)
- [65] S.A.Moskalenko, M.A.Liberman, V.V.Botan, E.V.Dumanov and Ig.V.Podlesny, collective elementary excitations of Bose-Einstein condensed two-dimensional magnetoexcitons strongly interacting with electron-hole plasma, *Mold. Journ. of Phys. Scien.*, 2005, **Vol.4**, N2, pp. 142 - 197
- [66] A.A.Abrikosov, L.P.Gor`kov and I.E. Dzyaloshinskii *Methods of quantum field theory in statistical physics* (Dover, New York, 1975).
- [67] P.I.Khadzhi, "Error function", *Kishinev Academy of Sciences of Moldova*, 1971 (in Russian), 284 pages
- [68] Vitalie Botan, *Bose-Einstein Condensation of Magnetic Excitons in Semiconductor Quantum Wells*. *Acta Universitatis Upsaliensis. Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertations from the Faculty of Science and Technology* 211. 67 pp. Uppsala, ISBN 91-554-6636-2, 2006

## АННОТАЦИЯ

Диссертационной работы «**Коллективные свойства двумерных магнитоэкситонов, взаимодействующих с плазмонами**», представленной **Евгением Думановым** на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Диссертация посвящена решению двух взаимосвязанных задач теории двумерных электронно-дырочных пар и экситонов большой плотности в сильном перпендикулярном магнитном поле. Имеется в виду определение влияния Возбужденных уровней Ландау (ВУЛ) на два различных основных состояния этой системы, такие как бозе-эйнштейновская конденсация (БЭК) магнитоэкситонов и электронно-дырочная жидкость (ЭДЖ), и определения спектра коллективных элементарных возбуждений над этими двумя основными состояниями, когда возбуждения квазичастиц происходят в пределах нижайших уровнях Ландау (НУЛ) и в отсутствии кинетической энергии.

В данной работе был выведен гамильтониан описывающий дополнительное косвенное взаимодействие между частицами находящимися на НУЛ обусловленное влиянием ВУЛ, при котором две частицы в процессе кулоновского взаимодействия совершают виртуальные переходы с НУЛ на разноименные и одноименные ВУЛ и возвращаются обратно. Косвенное двухчастичное взаимодействие за счет прямых членов спаривания операторов, возникающих при усреднении, приводит к общему притяжению, и понижению энергии своей системы. На этом фоне обменные члены спаривания операторов, при усреднении и члены, возникающие при  $u$ - $v$  преобразовании Боголюбова, приводят к стабилизации состояния БЭК магнитоэкситонов с волновыми векторами  $kl < 0.5$ . Значение химического потенциала при БЭК магнитоэкситонов и энергия, приходящаяся на одну  $e$ - $h$  пару в основном состоянии ЭДЖ, оказываются близко расположенными на энергетической шкале и сосуществование двух фаз возможно.

Было показано, что в электронно-дырочной системе существует возможность формирования различных виртуальных квазиэнергетических комплексов с различным затуханием, которое по существу зависит от их свободной энергии. Найдены такие уравнения движения для операторов флуктуации плотности, при которых затухание плазменных колебаний равно нулю в нашем приближении для определения функций Грина. Имеются два типа плазменных колебаний: оптические и акустические. В диапазоне малых значений волнового вектора акустическая ветвь плазменных колебаний имеет линейную зависимость. В диапазоне больших волновых векторов, спектр колебаний является монотонным с насыщением. Оптическая ветвь имеет квадратичную зависимость в диапазоне малых значений волнового вектора, немонотонное поведение ротонного типа в средней области и монотонное возрастание с насыщением при больших значениях волнового вектора. Существенно то, что существуют осцилляции плотности в пределах НУЛ, несмотря на то, что 2D система находится под действием сильного перпендикулярного магнитного поля и у квазичастиц отсутствует кинетическая энергия.

Энергетический спектр коллективных элементарных возбуждений над основным состоянием системы, представляющим собой бозе-эйнштейновский конденсат магнитоэкситонов, состоит из экситонных энергетических ветвей сопровождаемых плазмонными спутниками и чисто плазмонными ветвями. Важно отметить, что концентрационные поправки у экситонных ветвей спектра появляются в виде плазмонных спутников и фактически имеются экситон-плазмонные ветви и чисто плазмонные ветви спектра. Экситонная компонента экситон-плазмонных ветвей имеет энергетическую щель определяемую значением химического потенциала, который в условиях метастабильной диэлектрической жидкости имеет отрицательные значения, зависящие от фактора заполнения. Энергетическая щель в спектре связана с затратой энергии на освобождение магнитного экситона из состава диэлектрической жидкости в процессе возникновения элементарного коллективного возбуждения.

Основные результаты диссертационной работы были опубликованы в виде 25 научных работ (8 статей и 17 тезисов). Диссертационная работа содержит 105 страницы, 15 рисунков и 68 библиографических ссылок.

## ADNOTAREA

tezei „**Proprietățile colective ale excitonilor magnetici bidimensionali care interacționează cu plasmonii**”, elaborată de dl. Dumanov Evghenii și prezentată pentru obținerea gradului științific de doctor în științe fizico-matematice.

Disertația este dedicată rezolvării a două probleme interdependente ale teoriei sistemelor bidimensionale excitonice și electron-gol de înalta densitate într-un câmp magnetic perpendicular puternic. Se are în vedere în primul rând influența nivelelor Landau excitate (NLE) asupra stărilor de baza care apar în aceste condiții și anume Condensarea Bose-Einstein a excitonilor magnetici și lichidul metalic electron-gol. A doua problema este determinarea spectrului energetic al excitațiilor colective elementare, care apar în prezența acestor două stări de bază, atunci când cvasiparticulele sunt excitate în cadrul celor mai de jos nivelele Landau în absența energiei lor cinetice.

În lucrarea dată a fost dedus Hamiltonianul, care descrie interacțiunea suplimentară indirectă între particulele ce se găsesc pe NLJ. Ea este determinată de influența NLE în felul următor. Două particule în procese de interacțiuni Coulombiene exercită tranziții virtuale de pe NLJ pe NLE cu aceleași numere de cuantificare Landau sau cu numere diferite și după aceasta să întorc înapoi pe NLJ. Influența interacțiunii biparticule indirecte, care apare în urmă medierii și înperecherii directe a operatorilor aduce la o atracție generală în sistem și la coborârea pe scară energetică a energiei întregului sistem. Pe acest fondal termenii care apar în cazul unei înperecherii de schimb a operatorilor în timpul medierii și termenii care apar în urma transformării u-v Bogoliubov aduc la stabilizarea stării de condensare Bose-Einstein (CBE) a excitonilor magnetici cu vectorii de undă  $kl < 0.5$ . Valorile potențialului chimic în cadrul CBE a excitonilor magnetici și energia care revine la o pereche electron-gol (e-h), în cadrul lichidului e-h, sunt situate pe scara energetică în apropiere și coexistența a doua faze este posibilă.

S-a demonstrat că în sisteme e-h există posibilitatea de a forma diferiți complecși virtuali cuasienergetici cu diferite atenuări, care depind de energiile libere ale complecșilor. Au fost găsite și alese astfel de ecuații de mișcare ale operatorilor fluctuației densității pentru care atenuarea oscilațiilor plasmonice este egală cu zero. Se are în vedere în cadrul aproximațiilor făcute pentru determinarea funcțiilor lor Green. Sunt două tipuri de oscilații plasmonice: oscilații optice și oscilații acustice. În regiunea valorilor mici ale vectorilor de undă ramura plasmonică a oscilațiilor acustice are o dependență liniară. În regiunea vectorilor de undă mari spectrul oscilațiilor plasmonice crește monoton și ajunge la saturare. Ramura optică are o dependență pătratică în regiune valorilor mici ale vectorilor de undă. În regiunea valorilor medii ale vectorilor de undă ramura optică se caracterizează printr-o comportare nemonotonă de tip roton și are o comportare similară cu ramura acustică în regiunea valorilor mari ale vectorilor de undă. Este important faptul că există oscilațiile densității perechilor e-h în cadrul NLJ, necătînd la faptul că sistema 2D să găsește sub influența câmpului magnetic puternic perpendicular și quasiparticulele nu posedă energie cinetică.

Spectrul energetic al excitațiilor colective elementare, care apare atunci când starea de bază a sistemului este condensatul Bose-Einstein al excitonilor magnetici, constă din ramuri energetice excitonice acompaniate de sateliți plasmonici și din ramuri curat plasmonice. Este important de menționat că ramurile excitonice ale spectrului au corecții în dependență de concentrație în formă de sateliți plasmonici. De fapt avem de a face cu ramuri exciton-plasmonice ale spectrului și cu ramuri curat plasmonice. Componenta excitonică o ramurii exciton-plasmonice are un gap energetic determinat de valoarea potențialului chimic, care în condițiile de formare a lichidului metastabil dielectric are valori negative, care depind de factorul de completare. Gapul energetic al ramurii date determină energia necesară pentru eliberarea excitonului din componenta lichidului dielectric metastabil în procesul de apariție a excitației colective elementare.

Rezultatele obținute au fost publicate în 25 de lucrări științifice.

Teza este scrisă în limba rusă, conține 105 pagini de text, 15 desene și 68 referințe bibliografice.

## ANNOTATION

For a thesis work “**Collective properties of 2D magnetoexcitons interacting with plasmons**” presented by **Evgeny Dumanov** for a doctor’s degree of physical-mathematical sciences.

The dissertation is dedicated to the solution of two interdependent problems of the theory of high-density two-dimensional excitons and electron-hole pairs in a strong perpendicular magnetic field. One of them is the influence of the excited Landau levels (ELLS) on two ground states of these systems such as Bose-Einstein condensation of magnetoexcitons and another one is the metallic-type electron-hole liquid. The second problem is the determination of the energy spectrum of the collective elementary excitations arising in the presence of these two ground states, when the excitations of the quasiparticles take place in the frame of the lowest Landau levels (LLLs) and in the absence of their kinetic energy.

In the present work a supplementary Hamiltonian of indirect interaction was calculated. It describes the additional indirect interaction between particles existing in the frame of the LLL, brought about by influence of ELL, under which two particles in the process of Coulomb interaction make virtual transitions from LLL to heteronymous and homonymous ELL and return back. The indirect supplementary e-e and h-h interaction gives rise to direct pairing terms and exchanges pairing terms. The first terms being negative increase the binding energy of magnetoexcitons and energy per pair in the EHL phase, whereas the second terms are repulsive. They diminish the influence of the direct pairing terms, but do not surpass them, so that the resulting influence of both terms remains attractive. The supplementary e-h attraction after the u-v transformation in the case of BEC of magnetoexcitons on the state with wave vector  $k$  gives rise to repulsive-type Bogoliubov self-energy terms. They stabilize the BEC in the small region of wave vectors  $kl < 0.5$ . The energy per one e-h pair inside the EHL happens to be situated on the energy scale very close to the value of the chemical potential of the Bose-Einstein condensed magnetoexcitons with wave vector  $k = 0$ . These two phases can coexist.

It was shown that in the electron-hole system exists a possibility of different virtual quasi-energy complexes with different free energies and rates damping formation, which in fact depend on their free energies. We have found out such equations of motion for operators of density fluctuations which permits obtain plasma oscillations without damping in our approximation for the Green function. The intra-Landau level excitations of the two-dimensional electron-hole liquid are characterized by two branches of the energy spectrum. One of them is the acoustical plasmon type branch with the linear dispersion law in the range of small wave vectors and monotonically increasing with saturation behavior at higher wave vectors. The second branch of the elementary excitations is an optical-plasmon branch with quadratic dispersion law at small wave vectors with a roton-type dispersion at intermediary wave vectors and with a similar behavior as the acoustical branch at higher wave vectors. It is essential that there exist density oscillations within the LLL, even though 2D system is under the influence of strong perpendicular magnetic field and quasi-particles have no kinetic energy.

Energy spectrum of collective elementary excitations in the ground state of the system, representing the Bose-Einstein condensation of magnetoexcitons, consists of excitonic energy branches accompanied by plasmon satellites and pure plasma branches. It is important to note, that concentration corrections of excitonic branches of spectrum appear in the form of plasmon satellites and actually the system has exciton-plasmon branches and pure plasma branches of spectrum. Excitonic component of exciton-plasmon branches has an energy gap defined by the value of chemical potential, which in conditions of metastable dielectric liquid phase has negative values, depending on the filling factor. An energy gap in the spectrum results from the energy required for detachment of magnetic exciton from the composition of dielectric liquid in the process of formation of elementary collective excitation.

Basic results of the dissertation paper were published in the form of 25 scientific works (8 articles and 17 abstracts). The dissertation paper consists of 105 pages, 15 illustrations and 68 bibliographical references.



В заключении автор выражает большую благодарность научному руководителю, доктору хабилитат физико-математических наук, академику АНМ, профессору С.А.Москаленко за плодотворные обсуждения результатов и неоценимую помощь в процессе научных исследований и подготовке диссертации.

Автор очень признателен профессору П.И.Хаджи и профессору И.В.Белоусову за полезные обсуждения полученных результатов и диссертационной работы.

Также автор благодарен фонду CRDF и его представительству в Республике Молдова ассоциации MRDA (грант MYSSP - 1401), а также Академии Наук Молдовы (гранты 08.819.05.07F и 08.822.05,07F) за финансовую поддержку проведённых исследований