НАХОЖДЕНИЕ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИОННО-КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ НАГРУЗКИ

Е.В. Колузаева

В статье рассматривается применение метода многомерных производящих функций для нахождения средних характеристик сетевых стохастических моделей информационно-компьютерных сетей произвольной архитектуры, функционирующих в условиях высокой нагрузки. В качестве моделей применяются открытые марковские сети массового обслуживания с зависимыми от времени параметрами входящего потока заявок и обслуживания. Выражения для характеристик получены в виде многократных функциональных рядов, поэтому их несложно находить с помощью ПЭВМ.

В настоящее время происходит интенсивное развитие и внедрение информационно-компьютерных сетей (ИКС) в различные сферы производственной и научной деятельности. Актуальной проблемой при этом является создание теоретических основ анализа и синтеза таких сетей. Адекватными математическими моделями ИКС служат сети массового обслуживания (МО), с помощью которых можно решить ряд задач, связанных с нахождением качественных характеристик функционирования ИКС, таких как производительность, коэффициенты загрузки их систем и др. В данной работе рассматривается сетевая модель беспроводной локальной сети (БЛС), функционирующей в условиях высокой нагрузки [1].

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО произвольной архитектуры с однотипными заявками и однолинейными системами обслуживания (СМО). Под состоянием сети в момент времени t будем понимать вектор $k(t)$ (k,t) $(k_1,k_2,\ldots,k_n,t)$, где k_i – число заявок в системе S_i, $i=\overline{1,n}$. Пусть p_{ij} – вероятность перехода заявки после обслуживания в системе S_i в систему S_j, $i,j=\overline{0,n}$, под системой S_0 при этом мы понимаем внешнюю среду; $P(k,t)$ – вероятность того, что сеть находиться в состоянии (k,t). Будем рассматривать случай, когда параметры входящего потока заявок в сеть $\lambda(t)$ и параметры времени обслуживания в системах $\mu_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, зависят от времени.

Обозначим через $_n(z,t)$, где $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, n-мерную производящую функцию:

$$\Psi_n(z,t) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty} P(k_1,k_2,..,k_n,t)z_1^{k_1}z_2^{k_2}\dots z_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty} P(k,t)\prod_{i=1}^{n} z_i^{k_i}, \quad (1)$$

и пусть

$$\Lambda(t) = \int \lambda(t)dt,\ M_i(t) = \int \mu_i(t)dt,\ i = \overline{1,n}. \quad (2)$$

Пусть в начальный момент времени сеть находится в состоянии $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0),\ \alpha_i \geq 0$. В работе [1] получено выражение для производящей функции (1), которое имеет вид

$$\Psi_n(z,t) = a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\dots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)^{\sum_{i=1}^{n} l_i} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i}p_{i0}^{q_i}\left(\prod_{\substack{j=1,\\ p_{ij}\neq 0}}^{n} p_{ij}\right)^{r_i}}{l_i!q_i!r_i!}\left(M_i(t)-M_i(0)\right)^{q_i+r_i} z_i^{\alpha_i+l_i-q_i-r_i+R}\right], \quad (3)$$

где

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i,\quad a_0(t) = \exp\left\{-\left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(M_i(t)-M_i(0)\right)\right\}.$$

Известно, что математическое ожидание c-ой компоненты многомерной случайной величины можно найти, продифференцировав производящую функцию по z_c и положив $z_i = 1,\ i = \overline{1,n}$. Поэтому для среднего числа заявок в системе S_c сети будем использовать соотношение:

$$\frac{\partial\Psi_n(z,t)}{\partial z_c} = a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\dots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\left(\alpha_c + l_c - q_c - r_c + R\right)\times$$

$$\times \left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} l_i} \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i} p_{i0}^{q_i}\left(\prod\limits_{\substack{j=1,\\ p_{ij}\neq 0}}^{n} p_{ij}\right)^{r_i}}{l_i!\,q_i!\,r_i!}\left(M_i(t)-M_i(0)\right)^{q_i+r_i}\right]\times$$

$$\times z_i^{\alpha_c+l_c-q_c-r_c+R}\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq c}}^{n} z_i^{\alpha_i+l_i-q_i-r_i+R}.$$

Отсюда следует, что среднее число заявок в системе S_c определяется по формуле

$$N_c(t)=\left.\frac{\partial \Psi_n(z,t)}{\partial z_c}\right|_{z=(1,1,\dots,1)}=a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\infty}\dots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\left(\alpha_c+l_c-q_c-r_c+R\right)\times$$

$$\times \left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} l_i} \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{0i}^{l_i} p_{i0}^{q_i}\left(\prod\limits_{\substack{j=1,\\ p_{ij}\neq 0}}^{n} p_{ij}\right)^{r_i}}{l_i!\,q_i!\,r_i!}\left(M_i(t)-M_i(0)\right)^{q_i+r_i}\right]. \quad (4)$$

Сделаем в выражении (4) замену переменных $k_c=\alpha_c+l_c-q_c-r_c+R$, тогда $l_c=k_c-\alpha_c+q_c+r_c-R$ и

$$N_c(t)=a_0(t)\sum_{q_1=0}^{\infty}\dots\sum_{q_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{k_1=\alpha_1-q_1-r_1+R}^{\infty}\dots\sum_{k_n=\alpha_n-q_n-r_n+R}^{\infty}k_c\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(\left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)p_{0i}\right)^{k_i-\alpha_i+q_i+r_i-R}p_{i0}^{q_i}\left(\prod_{\substack{j=1,\\ p_{ij}\neq 0}}^{n}p_{ij}\right)^{r_i}}{\left(k_i-\alpha_i+q_i+r_i-R\right)!\,q_i!\,r_i!}\left(M_i(t)-M_i(0)\right)^{q_i+r_i}\right].$$

Так как системы сети функционируют в условиях высокой загрузки, то $k_i-\alpha_i+q_i+r_i-R\geq 1$ и, следовательно, $q_i-\alpha_i+r_i-R\leq -1$, поэтому

$$N_c(t)=a_0(t)\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}k_c\sum_{r_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\alpha_1-r_1+R-1}\ldots\sum_{q_n=0}^{\alpha_n-r_n+R-1}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(\left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)p_{0i}\right)^{k_i-\alpha_i+q_i+r_i-R}p_{i0}^{q_i}\left(\prod_{\substack{j=1,\\ p_{ij}\neq 0}}^{n}p_{ij}\right)^{r_i}}{\left(k_i-\alpha_i+q_i+r_i-R\right)!\,q_i!\,r_i!}\left(M_i(t)-M_i(0)\right)^{q_i+r_i}\right].$$

Для нахождения числа заявок в системах сети была написана программав среде программирования Delphi 6.

Пример 1. Рассмотрим модель БЛС, изображенную на рис. 1. Системы $S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}$ соответствуют терминалам (периферийные компьютеры), система S_n – локальному серверу. Запросы (пакеты, заявки) могут поступать на сервер не только из терминалов, но и из внешней среды через базовую станцию. Будем рассматривать случай, $\lambda(t)=\lambda$, $\mu_i(t)=\mu_i$, $i=\overline{1,n}$. В этом случае $\Lambda(t)=\lambda t$, $\Lambda(0)=0$, $M_i(t)=\mu_i t$, $M_i(0)=0$, $i=\overline{1,n}$, $a_0(t)=\exp\left\{-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)t\right\}$, и выражение (4) принимает вид

$$N_c(t)=\exp\left\{-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)t\right\}\sum_{k_1=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=1}^{\infty}k_c\sum_{r_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{q_1=0}^{\alpha_1-r_1+R-1}\ldots\sum_{q_n=0}^{\alpha_n-r_n+R-1}\times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{(\lambda t p_{0i})^{k_i - \alpha_i + q_i + r_i - R}\, p_{i0}^{q_i} (\mu_i t)^{q_i + r_i}}{(k_i - \alpha_i + q_i + r_i - R)!\, q_i!\, r_i!} \right] \prod_{j=0}^{n-1} \left(p_{jn}^{r_j} p_{nj}^{r_n}\right) \quad (5)$$

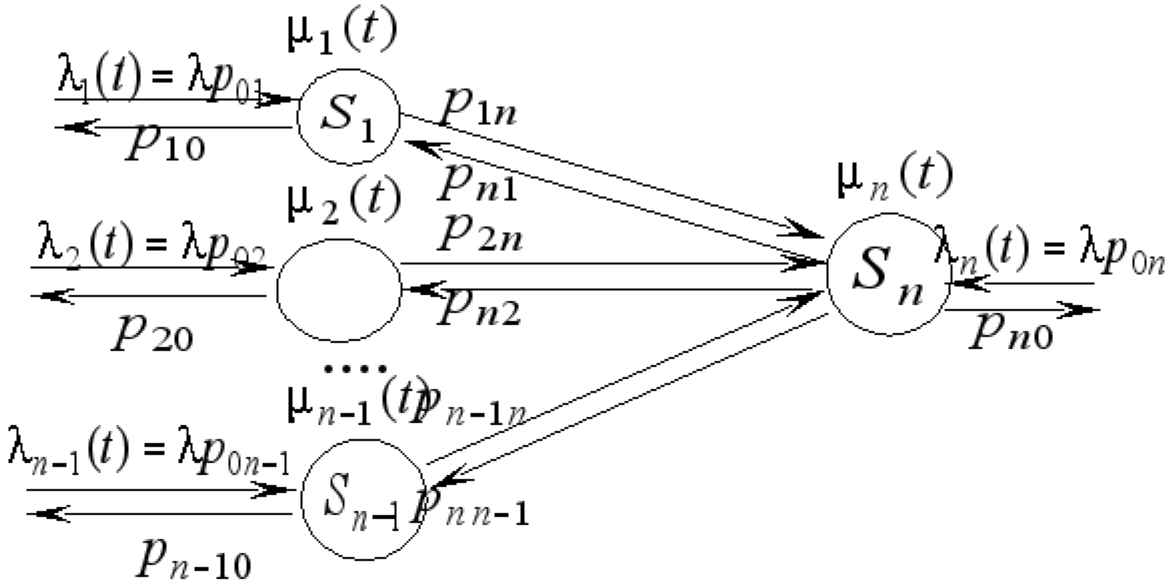

Рис. 1. Модель локальной сети.

Пусть, например, $n = 5$, $\lambda = 20$, $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 20$, $\mu_3 = 10$, $\mu_4 = 25$; $p_{i5} = p_{i0} = 0.5,\ i = \overline{1,4}$, $p_{0i} = 0.2$, $p_{ii} = 0,\ i = \overline{1,5}$, $p_{50} = 0.3$, $p_{51} = 0.25$, $p_{52} = 0.2$, $p_{53} = 0.1$, $p_{54} = 0.15$, $(1,4,2,3,5,0)$.

Приведем значения среднего числа заявок в системах сети (в очереди и на обслуживании) в момент времени $t = 0.15$, найденные с помощью программы: $N_1(t) = 3.194 \cdot 10^{-3}$, $N_2(t) = 3.94 \cdot 10^{-3}$, $N_3(t) = 3.517 \cdot 10^{-3}$, $N_4(t) = 3.761 \cdot 10^{-3}$, $N_5(t) = 3.938 \cdot 10^{-3}$.

Пример 2. Рассмотрим сеть, описанную в примере 1, когда $(t) \quad t$,

$_i(t) \quad _i \cos(\ _it) \quad 1$, $i \quad \overline{1,n}$ и $(t) \quad \frac{}{2}t^2$, $(0) \quad 0$,

$M_i(t) \quad _i \left(\frac{\sin(\ _it)}{\ _i} \quad t \right)$, $M_i(0) \quad 0$, $i \quad \overline{1,n}$,

$a_0(t) = \exp\left\{ - \left[\left(\lambda + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \right) t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \right] \right\}$. В этом случае при $t \quad 0.47$ получаем: $N_1(t) \quad 1.693 \quad 10^{28}$, $N_2(t) \quad 1.86 \quad 10^{28}$, $N_3(t) \quad 1.781 \quad 10^{28}$, $N_4(t) \quad 1.832 \quad 10^{28}$, $N_5(t) \quad 1.857 \quad 10^{28}$.

Литература:

1. Колузаева Е.В., Маталыцкий М.А. Нахождение вероятностей состояний моделей информационно-компьютерных сетей с зависимыми от времени параметрами потока и обслуживания, функционирующих в условиях высокой нагрузки // Вестник ГрГУ. Сер.2. – 2008.– № 3.

Екатерина Владимировна Колузаева, аспирантка кафедры стохастического анализа и эконометрии факультета математики и информатики Гродненского государственного университета им. Янки Купалы, koluzaeva@gmail.com.