# Самоподобие в системах массового обслуживания с ограниченным буфером.

М.Н. Петров, Д.Ю. Пономарев

Красноярский государственный технический университет
660074, Красноярск, ул. Киренского, 26
E-mail: kafaes@public.krasnet.ru

Развитие высокоскоростных сетей пакетизированной передачи различных видов информации приводит к возникновению ситуаций, объяснение которых на основе классических положений теории телетрафика связано с некоторыми трудностями. Например, проявление свойства самоподобия, возникающего в высокоскоростных сетях связи, приводит к тому, что при обслуживании такой нагрузки емкости буфера, рассчитанной по классической теории распределения информации, недостаточно, что ведет к увеличению очереди, времени задержки и потерь. Поэтому необходимо произвести изменения в методах расчета вероятностно-временных характеристик систем массового обслуживания при возникновении свойства самоподобия поступающей нагрузки.

Понятие самоподобной нагрузки введено В.И. Нейманом в [1]. Попробуем, используя данные этой статьи и методику, изложенную в [2], учесть свойство самоподобия для расчета вероятностно-временных характеристик различных систем массового обслуживания с ограниченным буфером.

## Обслуживание самоподобной нагрузки в системе массового обслуживания M/M/1/N.

Система массового обслуживания M/M/1/N является классической и довольно изученной. Но, как приводится в [1], результаты, полученные ранее, дают довольно большую погрешность. Для того чтобы учесть влияние самоподобия введем функцию, зависящую от некоторого коэффициента самоподобия H, причем при H=0.5 свойство самоподобия отсутствует, а при увеличении коэффициента самоподобия до единицы влияние самоподобности нагрузки усиливается. Используя методику, предложенную в [2], попробуем решить данную задачу.

Применив метод нахождения вероятноятно-временных характеристик, изложенный в [2], получим выражения для средней очереди и времени задержки.

Средняя очередь в системе M/M/1/N равна:

Петров М.Н., Пономарев Д.Ю. Самоподобие в системах массового обслуживания с ограниченным буфером. // Электросвязь. – 2002. – №2. – С.35-39.

$$\overline{N}=\frac{\frac{\rho}{\pi}f(H)}{1-\left[\frac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N+2}}\cdot\frac{\left\{1-(N+1)\left[\frac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N}+N\left[\frac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N+1}\right\}}{1-\frac{\rho}{\pi}f(H)} \qquad (1)$$

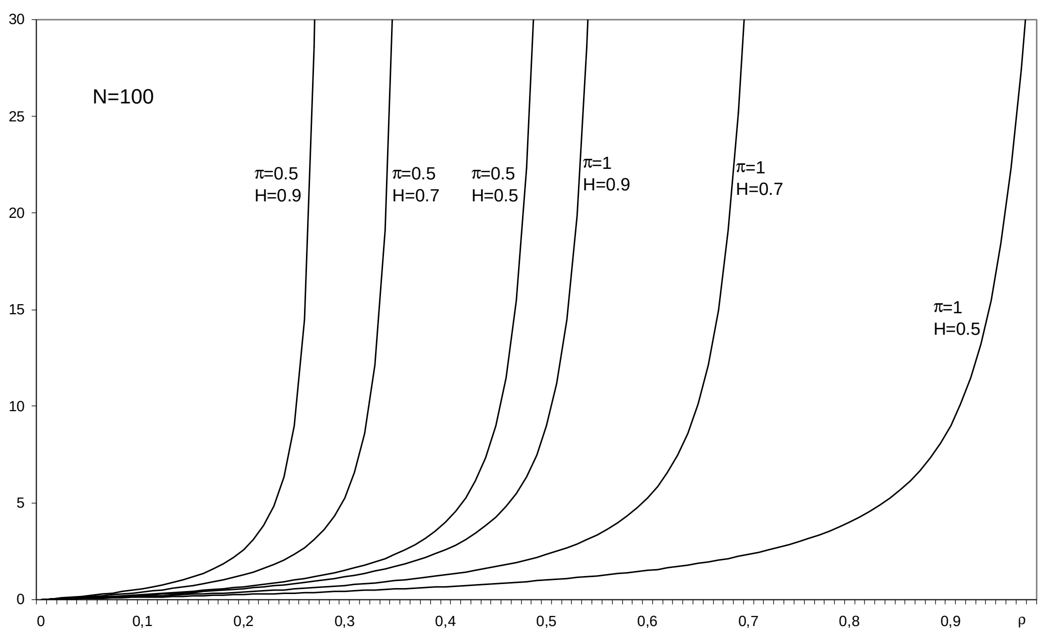
Время задержки для данной системы будет равно:

$$T зад=\frac{\overline{N}}{\lambda f(H)}+\frac{1}{\mu}=\frac{\frac{1}{\pi\mu}}{1-\left[\frac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N+2}}\cdot\frac{\left\{1-(N+1)\left[\frac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N}+N\left[\frac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N+1}\right\}}{1-\frac{\rho}{\pi}f(H)}+\frac{1}{\mu} \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) $\rho$ -загрузка системы, $\pi$ - вероятность отсутствия повторного вызова, $\mu$ - интенсивность обслуживания нагрузки, $f(H)$- функция учитывающая влияние самоподобности нагрузки.

Из (1) и (2) видно, что для определения средней очереди и времени задержки необходимо определиться с функцией $f(H)$. Например, если использовать линейный закон и значение данной функции для H=0.5 равное 1, то можно представить $f(H)$ в виде: $f(H)=2H$ .

Для такого представления функции самоподобия были проведены расчеты, результаты которых представлены на ис. 1.




Петров М.Н., Пономарев Д.Ю. Самоподобие в системах массового обслуживания с ограниченным буфером. // Электросвязь. – 2002. – №2. – С.35-39.

Рис. 1. Зависимость средней очереди от загрузки в СМО M/M/1/N.

Из рисунка видно, что для обслуживания самоподобной нагрузки в системе массового обслуживания M/M/1/N необходимо использовать буфер большего объема при тех же значениях загрузки системы, что совпадает с результатами, приведенными в [1].

**Самоподобие в системе массового обслуживания M/D/1/N.**

Рассмотрим теперь влияние свойство самоподобия на систему M/D/1/N с учетом возможности повторного обслуживания.

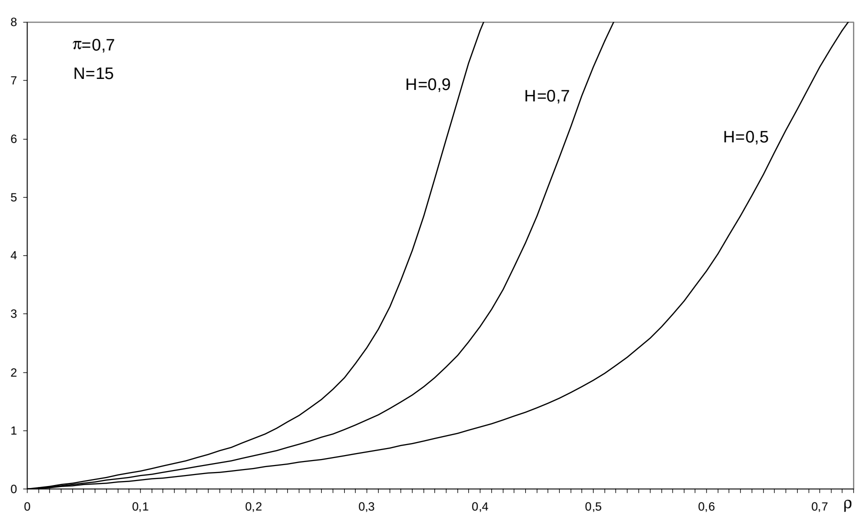
Используя методы определения вероятностно-временных характеристик систем массового обслуживания, приведенный в [2] для средней очереди в данной системе получим:

$$\overline{N}=\left\{\sum_{j=0}^{N+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}C_{j}^{i}e^{\rho f(H)i}\delta^{j-i}\frac{(-\rho f(H)i)^{N+1-j}}{(N+1-j)!}\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{\frac{1-e^{\rho f(H)}}{\pi}-2+N\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}C_{j}^{i}e^{\rho f(H)i}\delta^{j-i}\frac{(-\rho f(H)i)^{N-j}}{(N-j)!}-\right. \qquad (3)$$
$$\left.-\sum_{n=2}^{N-1}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}C_{j}^{i}e^{\rho f(H)i}\delta^{j-i}\frac{(-\rho f(H)i)^{n-j}}{(n-j)!}\right\}$$

Время задержки определяется по формуле:

$$T\text{зад}=\frac{\overline{N}}{\lambda f(H)}+\frac{1}{\mu} \qquad (4)$$

По формуле (3) были проведены расчеты, результаты которых представлены на рис. 2.




Петров М.Н., Пономарев Д.Ю. Самоподобие в системах массового обслуживания с ограниченным буфером. // Электросвязь. – 2002. – №2. – С.35-39.

Рис. 2 Зависимость средней очереди от загрузки в СМО M/D/1/N.

Анализируя графики, можно сделать вывод о том, что при обслуживании нагрузки, обладающей свойством самоподобия, требует применения буфера большего размера при тех же значениях загрузки. Причем, при линейном изменении коэффициента самоподобия происходит нелинейное изменение средней очереди.

## Система массового обслуживания M/g/1/N с учетом самоподобия поступающего потока.

Определение параметров систем массового обслуживания является достаточно необходимой задачей, так как позволяет произвести расчет требуемого оборудования и временные характеристики проектируемой системы. Кроме того, после появления сообщений [1] о том, что при высокоскоростной передаче информации возникает проблема с большой погрешностью в определении объема буфера из-за наличия явления самоподобия вызванного укрупнением двигающихся по сети пакетов. Поэтому приходится пересматривать результаты, полученные ранее. Например, особый интерес представляет система с геометрическим распределением времени обслуживания, так как под данное распределение попадают системы передачи дискретных сообщений (СПДС).

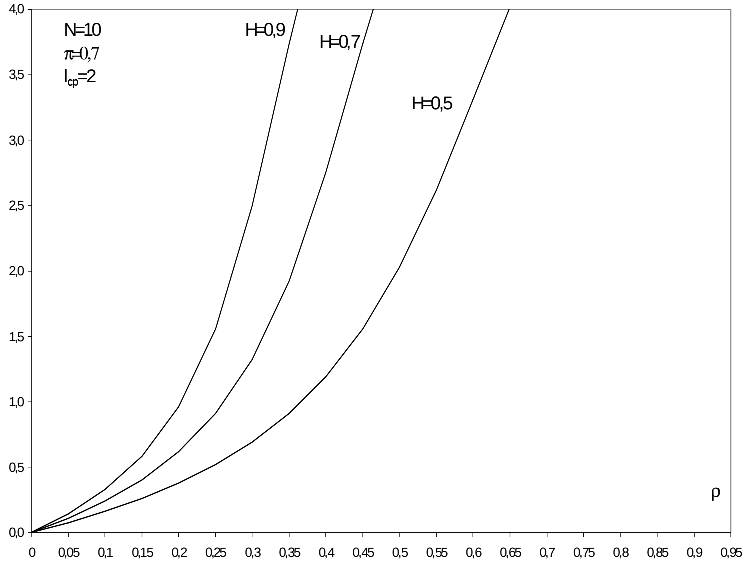
Применив методику нахождения средней очереди в системе массового обслуживания, предложенную в [2], получаем:

$$\begin{aligned}\overline{N} = \Bigg\{ & N\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{1}{p}\right)^{i}(-1)^{j-i}C_j^i\delta^{j-i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k q^k e^{\rho f(H)p(i-k)}\frac{[-\rho f(H)p(i-k)]^{N-j}}{(N-j)!} - \\ & -\sum_{n=2}^{N-1}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{1}{p}\right)^{i}(-1)^{j-i}C_j^i\delta^{j-i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k q^k e^{\rho f(H)p(i-k)}\frac{[-\rho f(H)p(i-k)]^{n-j}}{(n-j)!} + \\ & + \frac{2q-e^{\rho p f(H)}-1+2\delta p}{\pi p}\Bigg\}\times \\ & \times\left[\sum_{j=0}^{N+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{1}{p}\right)^{i}(-1)^{j-i}C_j^i\delta^{j-i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k q^k e^{\rho f(H)p(i-k)}\frac{[-\rho f(H)p(i-k)]^{N+1-j}}{(N+1-j)!}\right]^{-1}\end{aligned} \qquad (5)$$

Результаты расчетов, проведенных по данной формуле, представлены на рис. 3.

Данные графики показывают, что обслуживание самоподобной нагрузки приводит к большей загруженности системы массового обслуживания и требует увеличения буфера исследуемой системы массового обслуживания M/g/1/N.

Петров М.Н., Пономарев Д.Ю. Самоподобие в системах массового обслуживания с ограниченным буфером. // Электросвязь. – 2002. – №2. – С.35-39.




ис. 3 Зависимость средней очереди от загрузки в системе M/g/1/N.

**Потери в системах массового обслуживания с учетом свойства самоподобия.**

Развитие высокоскоростных сетей связи привело к появлению так называемого свойства самоподобия нагрузки [1], которое заключается в том, что пакеты следующие по сети способны сгруппировываться и образовывать пакет “большего” размера (пачку пакетов), что вызовет резкое увеличение очереди на обслуживание, а это приведет к увеличению потерь в системах обслуживания. Так как вероятность потерь является одной из основных характеристик качества обслуживания необходимо произвести оценку влияния свойства самоподобия на данный параметр систем массового обслуживания (СМО).

Были исследованы СМО с пуассоновским распределением времени поступления вызовов, ограниченным буфером и возможностью повторного вызова со следующими видами распределения времени обслуживания:

M/M/1/N- экспоненциальное распределение;

M/D/1/N- равномерное;

M/g/1/N- геометрическое.

На основе методики, изложенной в [2], были получены следующие выражения для вероятности потерь в вышеуказанных СМО:

для M/M/1/N:

$$p_{потерь}=\frac{1-\dfrac{\rho}{\pi}f(H)}{1-\left[\dfrac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N+2}}\left[\frac{\rho}{\pi}f(H)\right]^{N+1} \tag{6}$$

для M/D/1/N:

$$\begin{aligned}p_{потерь}=&\left\{1+\sum_{j=0}^{N+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}C_j^i e^{\rho f(H)i}\delta^{j-i}\frac{\left(-\rho f(H)i\right)^{N+1-j}}{(N+1-j)!}\right\}^{-1}\times\\ &\times\left[\sum_{j=0}^{N+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}C_j^i e^{\rho f(H)i}\delta^{j-i}\frac{\left(-\rho f(H)i\right)^{N+1-j}}{(N+1-j)!}-\right.\\ &\left.-\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}C_j^i e^{\rho f(H)i}\delta^{j-i}\frac{\left(-\rho f(H)i\right)^{N-j}}{(N-j)!}\right]\end{aligned} \tag{7}$$

для M/g/1/N:

$$\begin{aligned}p_{потерь}=&\left[\sum_{j=0}^{N+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{1}{p}\right)^{i}(-1)^{j-i}C_j^i\delta^{j-i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k q^k e^{\rho f(H)p(i-k)}\frac{\left[-\rho f(H)p(i-k)\right]^{N+1-j}}{(N+1-j)!}\right]^{-1}\times\\ &\times\left[\sum_{j=0}^{N+1}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}\left(-\frac{1}{p}\right)^{i}C_j^i\delta^{j-i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k q^k e^{\rho f(H)p(i-k)}\frac{\left[-\rho f(H)p(i-k)\right]^{N+1-j}}{(N+1-j)!}-\right.\\ &\left.-\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{j}\sum_{i=0}^{j}\left(-\frac{1}{p}\right)^{i}C_j^i\delta^{j-i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k C_i^k q^k e^{\rho f(H)p(i-k)}\frac{\left[-\rho f(H)p(i-k)\right]^{N-j}}{(N-j)!}\right]\end{aligned} \tag{8}$$

где:

ρ- загрузка системы; N- объем буфера;

π- вероятность того, что вызов покинет систему навсегда;

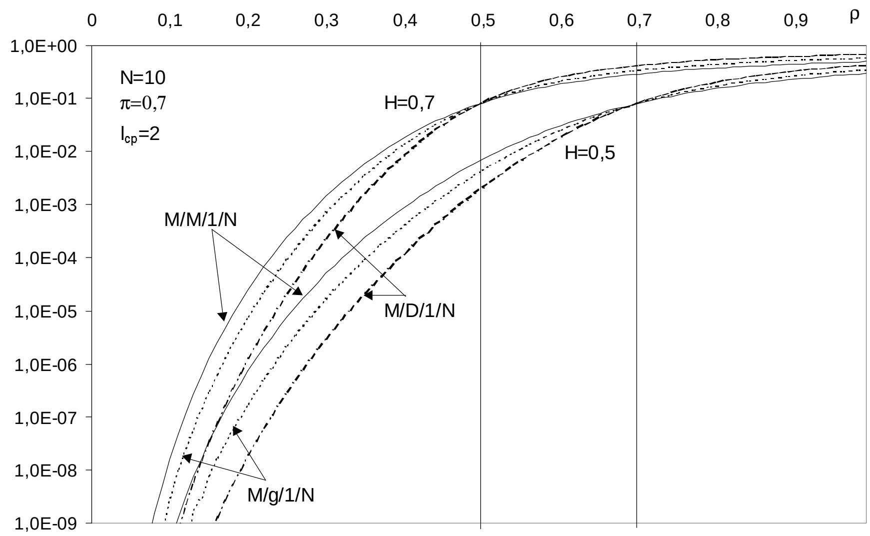
δ- вероятность того, что вызов поступит на повторное обслуживание ( $\delta=1-\pi$ );

$f(H)$- функция, учитывающая влияние самоподобия (H-коэффициент самоподобия, в данной работе $f(H)=2H$ );

$l_{cp}$- средняя длина, поступающих сообщений ( $p=1/l_{cp}$ , $q=1-p$ ).

По формулам (6)-(8) были проведены расчеты, результаты, которых представлены на рис. 4.

По данным результатам видно, что увеличение коэффициента самоподобия вызывает увеличение вероятности потерь на несколько порядков. Кроме того, наибольшее различие наблюдается в области средних значений загрузки, т.е. в области минимальных и максимальных значений загрузки влияние свойства самоподобия сказывается меньше. Также, можно сделать предположение, что кривые, соответствующие другим видам




распределения времени обслуживания, будут лежать в области, заключенной между графиками, соответствующими СМО M/M/1/N и M/D/1/N.

Рис. 4. Зависимость вероятности потерь от загрузки.

### Вероятность того, что система будет свободна при обслуживании самоподобной нагрузки.

Влияние свойства самоподобия на СМО сказывается и на такой вероятностной характеристике, как вероятности того, что обслуживающая система будет свободна. Для выявления характера влияния воспользуемся промежуточными результатами при выводе формул (6)-(8). Тогда, для вероятности свободности различных систем можно записать:

для M/M/1/N:

$$p_0 = \frac{1 - \dfrac{\rho}{\pi} f(H)}{1 - \left[\dfrac{\rho}{\pi} f(H)\right]^{N+2}} \qquad (9)$$

для M/D/1/N:

$$p_0 == \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{1}{\pi}\right)^j \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} C_j^i e^{\rho f(H) i} \delta^{j-i} \frac{\left(-\rho f(H) i\right)^{N+1-j}}{(N+1-j)!} \right\}^{-1} \qquad (10)$$

для M/g/1/N:

$$p_0 = \left[ \sum_{j=0}^{N+1} \left(\frac{1}{\pi}\right)^j \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{1}{p}\right)^i (-1)^{j-i} C_j^i \delta^{j-i} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k C_i^k q^k e^{\rho f(H) p(i-k)} \frac{\left[-\rho f(H) p(i-k)\right]^{N+1-j}}{(N+1-j)!} \right]^{-1} \qquad (11)$$

По формулам (9)-(11) были рассчитаны зависимости вероятности свободности системы от загрузки. Графики этих зависимостей представлены на рис. 5.

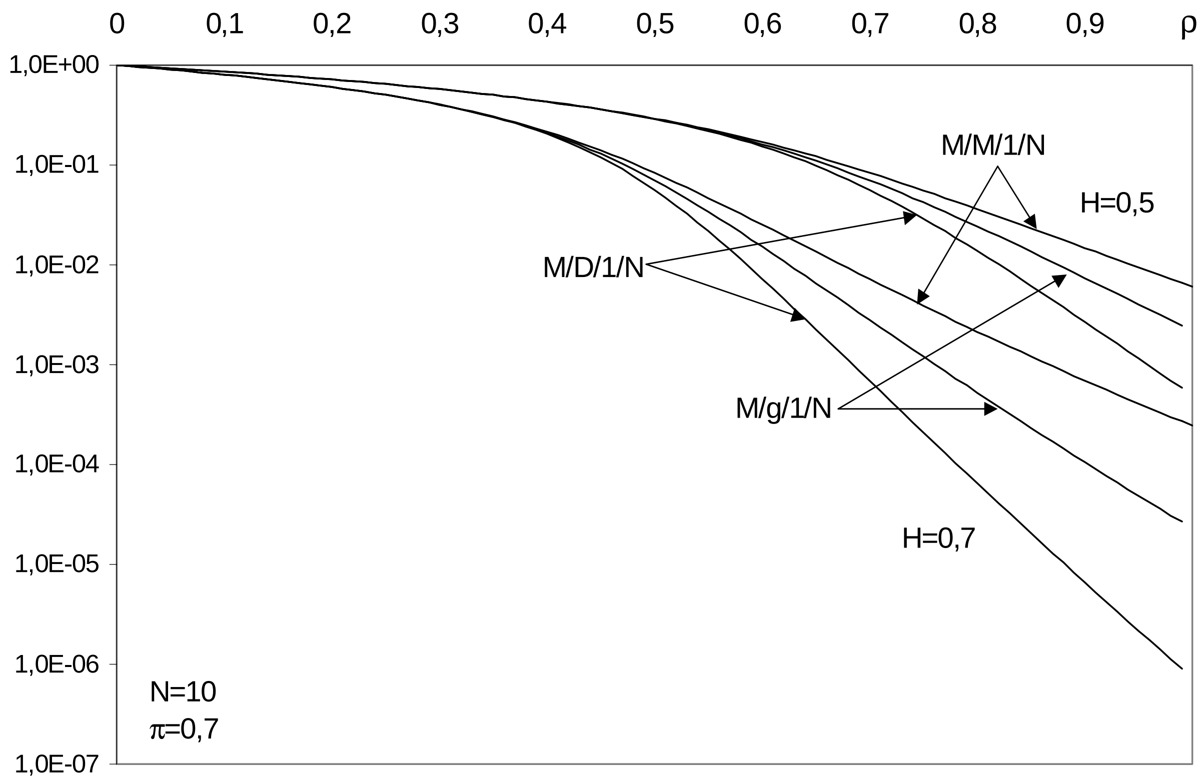



Рис. 5. Зависимость вероятности свободности СМО при обслуживании самоподобной нагрузки.

По данным графикам можно сделать следующие выводы:

1. При обслуживании самоподобной нагрузки при усилении влияния свойства самоподобия вероятность того, что система будет свободна, уменьшается на несколько порядков.
2. Вероятность того, что СМО будет свободна больше у системы M/M/1/N.

Кроме того, можно сделать аналогичное для потерь предположение о том, что зависимости данной вероятностной характеристики для СМО с распределением времени обслуживания отличным от постоянного и показательного, будут располагаться в области лежащей между графиками, соответствующими СМО M/M/1/N и M/D/1/N.

Петров М.Н., Пономарев Д.Ю. Самоподобие в системах массового обслуживания с ограниченным буфером. // Электросвязь. – 2002. – №2. – С.35-39.

## Обслуживание самоподобной нагрузки.

На основании всего вышесказанного попробуем обобщить полученные результаты:

1. Для систем массового обслуживания с ограниченным буфером с возможностью повторного вызова с показательным, постоянным и геометрическим законами распределения времени обслуживания влияние свойства самоподобия обслуживаемой нагрузки оказывает значительное влияние на вероятностно-временные характеристики данных СМО. В частности для обслуживания самоподобной нагрузки необходимо размер буфера увеличить в несколько раз, для сохранения того же качества обслуживания, что и при отсутствии свойства самоподобия.
2. Самоподобность нагрузки увеличивает потери в исследуемых системах массового обслуживания.
3. Свойство самоподобия при отсутствии его учета при расчете требуемого оборудования вызывает работу системы массового обслуживания в режиме перегрузки.
4. Уменьшается вероятность свободности систем массового обслуживания M/M/1/N, M/D/1/N и M/g/1/N с возможностью повторного обслуживания при учете самоподобия поступающей нагрузки.

Поэтому, опираясь на данные утверждения можно сделать следующий вывод: при расчете оборудования узлов связи для высокоскоростной передачи пакетизированной информации, необходимо произвести учет самоподобия поступающей нагрузки, что позволит качественно производить обслуживание высокоскоростных цифровых потоков информации. Следовательно, для того, чтобы уменьшить погрешность при таких расчетах надо произвести исследования на действующих узлах связи.

Список литературы:

1. Нейман В.И. Самоподобные процессы и их применение в теории телетрафика. Труды МАС, №1, 1999.
2. Петров М.Н. Вероятностно-временные характеристики в сетях и системах передачи интегральной информации. Красноярск: КГТУ, 1997

Петров М.Н., Пономарев Д.Ю. Самоподобие в системах массового обслуживания с ограниченным буфером. // Электросвязь. – 2002. – №2. – С.35-39.