

А. А. Хусаинов

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
КАТЕГОРИЙ**

Комсомольск-на-Амуре 2009

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| 1 Категории множеств со структурой | 4 |
| 1.1 Определение категории | 4 |
| 1.2 Категория моноидов | 6 |
| 1.3 Категория групп | 7 |
| 1.3.1 Определение группы | 7 |
| 1.3.2 Гомоморфизмы групп | 7 |
| 1.3.3 Подгруппы и фактор-группы | 7 |
| 1.3.4 Подкатегории и надкатегории категории групп | 9 |
| 1.4 Категории множеств с бинарным отношением | 10 |
| 1.5 Категории топологических пространств | 11 |
| 2 Категории, функторы и естественные преобразования | 12 |
| 2.1 Направленные графы и категории | 12 |
| 2.2 Функторы | 14 |
| 2.3 Специальные классы объектов и морфизмов | 14 |
| 2.4 Естественные преобразования | 17 |
| 2.5 Представимые функторы | 18 |
| 2.5.1 Функторы морфизмов | 18 |
| 2.5.2 Представимые функторы и их свойства | 19 |
| 2.5.3 Лемма Йонеды | 19 |
| 3 Пределы и копределы | 22 |
| 3.1 Пределы | 22 |
| 3.2 Построение пределов | 26 |
| 3.3 Копределы | 26 |
| 3.4 Декартовы квадраты | 29 |
| 3.5 Пределы и мономорфизмы в категории функторов | 30 |
| 3.6 Относительно инъективные и проективные объекты | 31 |
| 3.7 Категория систем переходов | 33 |
| 4 Сопряженные функторы | 35 |
| 4.1 Универсальные стрелки | 35 |
| 4.2 Свободные категории | 36 |
| 4.3 Сопряженные функторы | 36 |

| | |
|-------------------------------|----|
| <i>Оглавление</i> | 3 |
| 4.4 Теорема Фрейда | 38 |
| 4.5 Расширения Кана | 39 |

Глава 1

Категории множеств со структурой

Поскольку совокупность всех множеств не является множеством, то при рассмотрении множеств и связей между ними появляется необходимость работать с *классами*. В частности, всякое множество является классом.

Если для каждого элемента $A \in \mathcal{C}$ класса \mathcal{C} задано множество $F(A)$, то мы будем говорить, что $\{F(A)\}_{A \in \mathcal{C}}$ является семейством множеств $F(A)$.

1.1 Определение категории

Категорией \mathcal{C} называется тройка $(\text{Об } \mathcal{C}, \{\mathcal{C}(A, B)\}_{A, B \in \text{Об } \mathcal{C}}, \circ)$, состоящая из

- класса $\text{Об } \mathcal{C}$, элементы которого называются *объектами*,
- семейства попарно непересекающихся множеств $\{\mathcal{C}(A, B)\}_{A, B \in \text{Об } \mathcal{C}}$, элементы которых $f \in \mathcal{C}(A, B)$ называются *морфизмами из A в B* и обозначаются через $A \xrightarrow{f} B$,
- и семейства отображений $\circ : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$, определенных для каждой упорядоченной тройки объектов $A, B, C \in \text{Об } \mathcal{C}$ значения которых на $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ называются *композицией $A \xrightarrow{g \circ f} B$* .

При этом композиция должна удовлетворять для любых объектов A, B, C, D и морфизмов $A \xrightarrow{f} B, B \xrightarrow{g} C, C \xrightarrow{h} D$ закону ассоциативности:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

и для каждого объекта A должен существовать морфизм $A \xrightarrow{1_A} A$, удовлетворяющий для любых морфизмов $A \xrightarrow{f} B$ и $C \xrightarrow{g} A$ равенствам

$$f \circ 1_A = f, \quad 1_A \circ g = g.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.1 Доказать, что для каждого $A \in \text{Об } C$ морфизм 1_A , удовлетворяющий этим условиям, является единственным.

Морфизм 1_A называется *тождественным* морфизмом объекта A .

Элементы класса $\text{Мор } C = \bigcup_{A \in \text{Об } C, B \in \text{Об } C} C(A, B)$ называются *морфизмами* категории C .

УПРАЖНЕНИЕ 1.2 Например, категорию составляет класс всех множеств, семейство множеств $\text{Set}(A, B)$, каждое из которых состоит из отображений $A \rightarrow B$, и обычная композиция, сопоставляющая каждой паре отображений $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$ отображение $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Эта категория обозначается через Set и называется *категорией множеств и отображений*.

Данная часть посвящена категориям, в которых объектами являются множества со структурой, морфизмами – отображения этих множеств, “уважающих” эту структуру, а композиция определяется по формуле $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Под *классом объектов и морфизмов заданного типа* мы будем подразумевать некоторый класс K объектов вместе с семейством множеств $\{E_{A,B}\}_{(A,B) \in K}$, каждое из которых состоит из морфизмов заданного типа.

Для того, чтобы доказать, что множества с заданной структурой вместе с заданным классом отображений составляют категорию, достаточно установить выполнение следующих условий:

- Если g и f принадлежат классу K , то $g \circ f$ принадлежит классу K .
- Тождественные отображения принадлежат классу K .

УПРАЖНЕНИЕ 1.3 Будет ли категорией класс всех пунктированных множеств и отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную?

УПРАЖНЕНИЕ 1.4 Будет ли категорией

1. класс частично упорядоченных множеств и неубывающих отображений
2. класс частично упорядоченных множеств и убывающих отображений
3. класс частично упорядоченных множеств и возрастающих отображений
4. класс частично упорядоченных множеств и невозрастающих отображений

1.2 Категория моноидов

Полугруппой называется пара (M, \cdot) , состоящая из множества M и отображения $\cdot : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, определенного для всех $x, y \in M$ и удовлетворяющего закону ассоциативности

$$(\forall x, y, z \in M) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

В некоторых случаях символ операции \cdot мы будем опускать.

Отображение между полугруппами $f : M \rightarrow M'$ называется *сохраняющей операцией*, если $(\forall x_1, x_2 \in M) f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.5 Будет ли класс всех полугрупп и сохраняющих операцию отображений категорией?

Элемент $1 \in M$ называется *нейтральным*, если

$$(\forall x \in M) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

Если 1 и $1'$ – любые два нейтральных элемента, то из $1' \cdot x = x$ следует, что $1' \cdot 1 = 1$, а из $x \cdot 1 = x$ вытекает $1' \cdot 1 = 1'$. Следовательно, нейтральные элементы равны между собой.

Полугруппа (M, \cdot) называется *моноидом*, если она обладает нейтральным элементом. Для того, чтобы указать нейтральный элемент моноида, мы иногда будем описывать моноид как тройку $(M, \cdot, 1)$. Например, для произвольного множества X тройка $(P(X), \cap, X)$, состоящая из множества всех подмножеств множества X с операцией пересечения будет моноидом.

УПРАЖНЕНИЕ 1.6 Будет ли категорией класс всех моноидов и отображений, сохраняющих операцию?

УПРАЖНЕНИЕ 1.7 Будет ли сохраняющее операцию отображение моноидов переводить нейтральный элемент в нейтральный?

КОНТРИМЕР. Для подмножества $A \subset X$ рассмотрим отображение $f : P(X) \rightarrow P(X)$ множества подмножеств в себя, $f(S) = S \cap A$. Оно будет гомоморфизмом полугрупп $(P(X), \cap) \rightarrow (P(X), \cap)$. Но оно отображает единицу X моноида $P(X)$ не в единицу, а в элемент $A \in P(X)$. Следовательно, ответ отрицательный.

Отображение моноидов $f : M \rightarrow M'$ называется *гомоморфизмом моноидов*, если оно сохраняет операцию и переводит нейтральный элемент в нейтральный.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8 Доказать, что класс моноидов и их гомоморфизмов является категорией.

1.3 Категория групп

1.3.1 Определение группы

Моноид (M, \cdot) называется *группой*, если для каждого $x \in M$ найдется такой $x' \in M$, что $x \cdot x' = 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.9 Доказать, что элемент, обладающий этим свойством, является единственным.

Решение. $x'' = x'x'' = x'$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.10 Доказать, что множество $n \times n$ -матриц с ненулевым определителем является группой.

УПРАЖНЕНИЕ 1.11 Будет ли сохраняющая операцию отображение $f : G \rightarrow G'$ между группами переводить нейтральный элемент в нейтральный и обратный — в обратный.

РЕШЕНИЕ. $f(1)f(1) = f(1) \Rightarrow f(1)f(1) = f(1) \cdot 1 \Rightarrow f(1)^{-1}f(1)f(1) = f(1)^{-1}f(1) \cdot 1 \Rightarrow f(1) = 1$. $f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(1) = 1$.

1.3.2 Гомоморфизмы групп

Отображение групп $f : G \rightarrow G'$ называется гомоморфизмом, если для всех $x_1, x_2 \in G$ имеет место $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.12 Доказать, что класс всех групп и гомоморфизмов является категорией.

1.3.3 Подгруппы и фактор-группы

Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой, если для всех ее элементов $x, y \in G$ выполнены условия

1. $1 \in H$
2. $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$
3. $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

УПРАЖНЕНИЕ 1.13 Пусть G — группа, а $H \subseteq G$ — её подгруппа. Доказать, что отношение $R = \{(x, y) : x^{-1}y \in H\}$ является отношением эквивалентности на G . Доказать, что классы эквивалентности состоят из множеств $gH = \{gh : h \in H\}$

Решение: $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1}$ ибо $y^{-1}x(x^{-1}y) = 1$, отсюда следует симметричность $x^{-1}y \in H \Rightarrow (x^{-1}y)^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1}x \in H$. Рефлексивность и транзитивность очевидны.

Для произвольного $g \in G$ опишем класс эквивалентности, содержащий g . Если x эквивалентен g , то $g^{-1}x \in H$, и значит $x \in gH$. Наоборот, если $x \in gH$, то $g^{-1}x \in g^{-1}gH = H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1 Эти классы эквивалентности называются левыми классами смежности по подгруппе H . Классы Hg называются правыми классами смежности.

Подгруппа $H \subseteq G$ называется нормальной, если $(\forall g \in G) g^{-1}Hg \subseteq H$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.14 Будет ли всегда в этом случае $g^{-1}Hg = H$?

Решение. $g = (g^{-1})^{-1} \Rightarrow gHg^{-1} \subseteq H \Rightarrow H \subseteq g^{-1}Hg$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.15 Пусть $f : G \rightarrow G'$ – гомоморфизм групп. Доказать, что подмножество $f^{-1}(1) =_{\text{def}} \{g \in G : f(g) = 1\}$ будет нормальным делителем.

Решение. $f(g_1) = 1$ и $f(g_2) = 1 \Rightarrow f(g_1^{-1}g_2) = 1$. Значит, $f^{-1}(1)$ – подгруппа. $f(h) = 1 \Rightarrow f(g^{-1}hg) = 1$, стало быть эта подгруппа нормальна.

Прообраз $f^{-1}(1)$ нейтрального элемента группы называется ядром и обозначается $\text{Ker } f$.

Пусть $H \subseteq G$ – подгруппа. Разобьем группу G на левые классы смежности по H .

УПРАЖНЕНИЕ 1.16 Определим произведение классов смежности по формуле $gH \cdot fH = \{xy : x \in gH \& y \in fH\}$. Доказать, что произведение любых двух классов смежности будет классом смежности тогда и только тогда, когда H будет нормальной.

Если H нормальна, то $gHfH = gfHH = gfH$. Наоборот, $gHfH = tH$ влечет $t^{-1}gHfH = H$, откуда $t^{-1}gf \in H$ и $gfH = tH$. Получаем $gHfH = gfH$. При $g = 1$ будем иметь $HfH \subseteq fH$, и вместе с тем $Hf \subseteq fH$. Получаем $f^{-1}Hf \subseteq H$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.17 Если H нормальна в G , то классы составляют группу.

УПРАЖНЕНИЕ 1.18 Первая теорема об изоморфизме. Пусть $f : G \rightarrow G'$ – сюръективный гомоморфизм групп. Тогда $G' \cong G/\text{Ker } f$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.19 Доказать, что подмножество $H \subseteq G$ будет подгруппой тогда и только тогда, когда верна импликация $x, y \in H \Rightarrow x^{-1}y \in H$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.20 Описать все подгруппы аддитивной группы целых чисел.

Решение. Пусть $H \subset \mathbb{Z}$ – ненулевая подгруппа. Возьмем наименьший положительный элемент $n \in H$. Для произвольного положительного $m \in H$ существуют такие неотрицательные $p, q \in \mathbb{Z}$, что $m = pn + q$ и $0 \leq q < n$. Получим $q \in H$, значит $q = 0$. Следовательно всякий положительный элемент из H делится на n . Отсюда вытекает, что все элементы из H кратны n .

УПРАЖНЕНИЕ 1.21 *Описать все подгруппы аддитивной группы перестановок трех элементов. Какие из них нормальны?*

УПРАЖНЕНИЕ 1.22 *Вторая теорема об изоморфизме. Для цепочки подгрупп $N \subset H \subset G$ таких, что N и H – нормальные делители группы G имеет место изоморфизм $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.*

УПРАЖНЕНИЕ 1.23 *Третья теорема об изоморфизме. Для нормального делителя $H \subset G$ и подгруппы $A \subseteq G$ имеет место изоморфизм $AH/H \cong A/A \cap H$.*

1.3.4 Подкатегории и надкатегории категории групп

Рассмотрим категории, содержащие категорию групп и содержащиеся в категории групп.

Пусть \mathcal{C} – категория. Категория \mathcal{D} называется *подкатегорией* категории \mathcal{C} , если $\text{Ob } \mathcal{D} \subseteq \text{Ob } \mathcal{C}$ и $\mathcal{D}(D_1, D_2) \subseteq \mathcal{C}(D_1, D_2)$ для любых $D_1, D_2 \in \text{Ob } \mathcal{D}$.

Например, имеет место цепь подкатегорий

$$\text{Grp} \subset \text{Mon} \subset \text{SGrp},$$

где Grp – категория групп и гомоморфизмов, Mon – категория моноидов и отображений, сохраняющих операцию и нейтральный элемент, SGrp – категория полугрупп и сохраняющих операцию отображений.

Подкатегория $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ называется *полной подкатегорией*, если $\mathcal{D}(D_1, D_2) = \mathcal{C}(D_1, D_2)$ для любых $D_1, D_2 \in \text{Ob } \mathcal{D}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.24 *В частности $\text{Grp} \subset \text{SGrp}$ – полная подкатегория, а $\text{Mon} \subset \text{SGrp}$ – не будет полной подкатегорией.*

Рассмотрим подкатегории категории групп

$$\text{Mat} \subset \text{FAb} \subset \text{Ab} \subseteq \text{Grp},$$

где

- Объектами Mat служат абелевы группы \mathbb{Z}^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, морфизмы $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ задаются $m \times n$ -матрицами $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$
- FAb – категория абелевых групп без кручения
- Ab – категория абелевых групп и гомоморфизмов

УПРАЖНЕНИЕ 1.25 *Доказать, что все эти категории являются полными подкатегориями категории абелевых групп.*

УПРАЖНЕНИЕ 1.26 *Пусть $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{C}$ и $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{C}$ – полные подкатегории, и $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ – подкатегория. Будет ли \mathcal{D}_1 полной подкатегорией категории \mathcal{D}_2 ?*

1.4 Категории множеств с бинарным отношением

Рассмотрим цепь подкатегорий

$$\Delta \subset Totord \subset Ord \subset Preord \subset Rel \subset Graph$$

- Объектами Δ служат конечные линейно упорядоченные множества $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ и неубывающие отображения $[m] \rightarrow [n]$
- *Totord* – категория линейно упорядоченных множеств и неубывающих отображений
- *Ord* – категория частично упорядоченных множеств и неубывающих отображений
- *Preord* – категория предупорядоченных множеств и неубывающих отображений
- *Rel* – категория множеств с бинарным отношением и отображений $f : (X, R) \rightarrow (X', R')$, сохраняющих отношение, $(x, y) \in R \Rightarrow (f(x), f(y)) \in R'$
- *Graph* – категория ориентированных графов $A \xrightarrow{(s,t)} X \times X$ и морфизмов, состоящих из пар отображений $f : X \rightarrow X'$ и $g : A \rightarrow A'$, делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(s,t)} & X \times X \\ \downarrow g & & \downarrow f \times f \\ A' & \xrightarrow{(s',t')} & X' \times X' \end{array}$$

Бинарное отношение определяется как вложение $R \subseteq X \times X$, а морфизм – как отображение $f : X \rightarrow X'$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\subseteq} & X \times X \\ \downarrow g & & \downarrow f \times f \\ R' & \xrightarrow{\subseteq} & X' \times X' \end{array}$$

в которой $g(x, y) = (f(x), f(y))$ для всех $(x, y) \in R$. Это позволяет рассматривать *Rel* как подкатеорию из *Graph*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.27 Будет ли эта подкатеория полной? (Ответ: Да)

УПРАЖНЕНИЕ 1.28 Какие из подкатегорий будут полными?

1.5 Категории топологических пространств

Рассмотрим цепь категорий топологических пространств

$$\text{Metr}_c \subset \text{Metr}_1 \subset \text{Metr}_L \subset \text{Metr}_u \subset \text{Metr} \subset \text{Haus} \subset \text{Top}$$

- Metr_c – категория метрических пространств и сжимающих отображений
- Metr_1 – категория метрических пространств и отображений $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$ удовлетворяющих $(\forall x, y \in M) d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$
- Metr_L – категория метрических пространств и отображений $f : (M, d) \rightarrow (M', d')$, для каждого из которых существует константа $C > 0$ такая, что $(\forall x, y \in M) d'(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$
- Metr_u – категория метрических пространств и равномерно непрерывных отображений
- Haus – категория хаусдорфовых пространств и непрерывных отображений
- Top – категория всех топологических пространств и непрерывных отображений

УПРАЖНЕНИЕ 1.29 Доказать, что эта последовательность классов топологических пространств и различных классов отображений состоит из подкатегорий. Какие из подкатегорий будут полными?

Глава 2

Категории, функторы и естественные преобразования

Рассматривая модель как объект некоторой категории, мы отвлекаемся от ее элементов. В общем случае объекты категории могут не иметь элементов. Тем не менее, как будет показано в данной главе, морфизмы в произвольной категории можно рассматривать как семейства отображений.

2.1 Направленные графы и категории

В первой главе мы рассматривали категории, объекты которых являются множествами со структурой. В данной части мы определяем категорию как ориентированный граф с законом композиции для стрелок. Вершины этого графа - неделимые объекты.

(Ориентированным) графом Γ называется пара классов A, V , и пара отображений $cod, dom : A \rightarrow V$. Элементы из A называются *стрелками*, а элементы из V - *вершинами* графа. Если A и V - конечные множества, то граф можно нарисовать на плоскости, изображая стрелки с помощью направленных криволинейных отрезков, а вершины - точками. Например, рисунок

$$a \xrightarrow{\alpha} b \xleftarrow{\beta} c$$

задает граф, определенный парой множеств и парой отображений

$$A = \{\alpha, \beta\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \{a, b, c\} = V,$$

где $dom\alpha = a$, $dom\beta = c$, $cod\alpha = cod\beta = b$.

Для произвольных графа Γ и его вершин a, b обозначим через $\Gamma(a, b)$ класс $\{\alpha \in A : dom\alpha = a, cod\alpha = b\}$. Пусть $A \times_V A = \{(\alpha, \beta) \in A \times A : dom\alpha = cod\beta\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.1 Каждой категории соответствует ориентированный граф

$$\text{Mor } \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \text{Ob } \mathcal{C},$$

где $\text{Mor } \mathcal{C} = \bigcup_{(a,b) \in \text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Ob } \mathcal{C}} \mathcal{C}(a,b)$, и для стрелок $\alpha \in \mathcal{C}(a,b)$ начало и конец определены по формулам $\text{dom}(\alpha) = a$, $\text{cod}(\alpha) = b$. Для этого графа заданы отображения $1_{(-)} : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}$ и $(-)\circ(=) : \text{Mor } \mathcal{C} \times_{\text{Ob } \mathcal{C}} \text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{C}$, удовлетворяющие следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \text{cod}(\alpha \circ \beta) &= \text{cod}(\alpha), \quad \text{dom}(\alpha \circ \beta) = \text{dom}(\beta), \quad \text{при } \text{dom}(\alpha) = \text{cod}(\beta); \\ 1_a \circ \alpha &= \alpha \circ 1_b = \alpha, \quad \text{для всех } \alpha \in \mathcal{C}(a,b); \\ (\alpha \circ \beta) \circ \gamma &= \alpha \circ (\beta \circ \gamma), \quad \text{если } \text{dom } \alpha = \text{cod } \beta \text{ и } \text{dom } \beta = \text{cod } \gamma. \end{aligned}$$

Наоборот, всякому ориентированному графу с этими свойствами соответствует категория. Это позволяет дать равносильное определение категории.

УПРАЖНЕНИЕ 2.2 Частичным отображением $f : A \rightarrow B$ называется четверка, состоящая из тройки множеств $A, B, D \subseteq A$ и определенной на D функции $f : D \rightarrow B$. Композиция $f \circ g$ для частичных отображений является частичным отображением, определенным для x , принадлежащим области определения g , для которых $g(x)$ принадлежат области определения f . Рассмотрим категорию, объектами которой являются множества, а морфизмами – частичные отображения. Добавляя к каждому множеству отмеченную ("бесконечно удаленную") точку и доопределяя отображения до переводящих точки неопределенности в отмеченную точку, получаем, что категорию множеств и частичных отображений можно рассматривать как категорию множеств с отмеченной точкой, морфизмами между которыми являются отображения, определенные на всех элементах и переводящих отмеченную точку в отмеченную.

Категория \mathcal{C} называется малой, если класс $\text{Ob } \mathcal{C}$ является множеством.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3 Пусть M – моноид. Рассмотрим M как категорию, имеющую единственный объект M , морфизмами в которой являются элементы моноида. Таким образом $\text{Mor } M = M$. Закон композиции определен операцией умножения элементов моноида. Морфизм 1_M определим как нейтральный элемент моноида M . Легко видеть, что аксиомы категории выполнены.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4 Пусть (X, \leq) – предупорядоченное множество. Его можно рассматривать как категорию X , имеющей множество морфизмов $\text{Mor } X = \{(x, y) : x \leq y\}$ и множество объектов $\text{Ob } X = X$. Отображение $1_{(-)}$ определяется значениями $1_x = (x, x)$, композиция действует по формуле $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$. Легко видеть, что предупорядоченное множество можно определить как малую категорию \mathcal{C} , у которой для любой пары объектов a, b множество $\mathcal{C}(a, b)$ состоит не более, чем из одного элемента.

Пусть \mathcal{C} – категория. *Двойственной* (или *дуальной*) категорией \mathcal{C}^{op} называется категория, имеющая класс объектов $Ob\mathcal{C}^{op} = Ob\mathcal{C}$, класс морфизмов $Mor\mathcal{C}^{op} = Mor\mathcal{C}$ у которых начала и концы меняются ролями – $cod^{op}(\alpha) = dom(\alpha)$, $dom^{op}(\alpha) = cod(\alpha)$. Композиция $\alpha \circ \beta$ в \mathcal{C}^{op} определяется как композиция $\beta \circ \alpha$ в категории \mathcal{C} .

2.2 Функторы

Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – категории. *Функтором* $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ называется отображение классов $F : Ob\mathcal{A} \rightarrow Ob\mathcal{B}$ и семейство отображений множеств $F = F_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(F(A), F(A'))$, такие что

$$F(\alpha \circ \beta) = F(\alpha) \circ F(\beta),$$

для всех $\alpha, \beta \in Mor\mathcal{A}$, удовлетворяющих соотношению $dom\alpha = cod\beta$; и

$$F(1_A) = 1_{F(A)},$$

для всех $A \in Ob\mathcal{A}$.

ПРИМЕР 2.2.1 Пусть I – направленное множество. Его можно рассматривать как малую категорию I . Функтор $F : I^{op} \rightarrow Set$ будет в точности семейством множеств $F(i)$ и отображений $F(i \geq j) : F(i) \rightarrow F(j)$, удовлетворяющих $F(j \geq k) \circ F(i \geq j) = F(i \geq k)$ для всех $i \geq j \geq k$. Следовательно, каждый обратный спектр $(\{A_i\}_{i \in I}, \rho)$ над направленным множеством можно рассматривать как функтор $F : I^{op} \rightarrow Set$, принимающий значения $F(i) = A_i$ на объектах и $F(i \geq j) = \rho_j^i$ – на морфизмах.

ПРИМЕР 2.2.2 Пусть \mathcal{A} – категория множеств, наделенных структурой, и отображений, сохраняющих эту структуру. Тогда определен функтор, сопоставляющий каждому объекту этой категории его множество, а каждому морфизму – задающее этот морфизм отображение. Этот функтор называется *забывающим*. Например, забывающий функтор $U : Grp \rightarrow Set$ ставит в соответствие каждой группе G множество G , а каждому гомоморфизму $f : G_1 \rightarrow G_2$ – отображение f .

2.3 Специальные классы объектов и морфизмов

Морфизм $\alpha : a \rightarrow b$ в категории \mathcal{C} называется *изоморфизмом* если существует такой морфизм $\beta : b \rightarrow a$, что имеют место равенства $\beta \circ \alpha = 1_a$ и $\alpha \circ \beta = 1_b$. Мы будем писать $a \cong b$, если существует изоморфизм $a \rightarrow b$.

ПРИМЕР 2.3.1 В случае $\mathcal{C} = Set$ морфизм α будет изоморфизмом, если и только если он является биекцией. В категории $\mathcal{C} = Top$ топологических пространств и непрерывных отображений существуют непрерывные отображения, которые биективны, но не являются изоморфизмами. Изоморфизмы в Top называются *гомеоморфизмами*.

УПРАЖНЕНИЕ 2.5 Доказать, что композиция изоморфизмов является изоморфизмом.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6 Привести пример непрерывной биекции, не являющейся гомеоморфизмом.

Объект $e \in \mathcal{C}$ называется *инициальным* (соотв. *терминальным*), если для каждого $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ множество $\mathcal{C}(e, c)$ (соотв. $\mathcal{C}(c, e)$) содержит в точности один элемент.

ПРИМЕР 2.3.2 Если $\mathcal{C} = \text{Set}$ или $\mathcal{C} = \text{Top}$, то инициальный объект в \mathcal{C} является пустым множеством (или пустым топологическим пространством). Каждый терминальный объект состоит из одной точки.

Предложение 2.3.1 Если a и b – инициальные (или терминальные) объекты, то $a \cong b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.3 Морфизм $\alpha : a \rightarrow b$ называется *эпиморфизмом*, если для любых объекта $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ и морфизмов $\beta, \gamma : b \rightarrow c$ в случае равенства $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$

$$A \xrightarrow{\alpha} B \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} C$$

будет иметь место $\beta = \gamma$. Иными словами, эпиморфизмами будут морфизмы, на которые можно сокращать справа.

УПРАЖНЕНИЕ 2.7 Доказать, что композиция эпиморфизмов является эпиморфизмом.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8 Предположим, что композиция двух морфизмов

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ & \searrow & \downarrow \beta \\ & & C \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta \circ \alpha \\ \searrow \end{array}$$

- эпиморфизм. Доказать, что в этом случае β будет эпиморфизмом. Должен ли быть в этом случае α эпиморфизмом?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.4 *Мономорфизмом* называется эпиморфизм в двойственной категории \mathcal{C}^{op} .

УПРАЖНЕНИЕ 2.9 Морфизм $\alpha : A \rightarrow B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда из равенства композиций

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} A \xrightarrow{\alpha} B$$

$\alpha\beta = \alpha\gamma$ следует равенство морфизмов $\beta = \gamma$. Иными словами, мономорфизмами являются морфизмы, на которые можно сокращать слева.

Если $\alpha \circ \beta = 1_b$, то α называется *ретракцией*, а β – *коретракцией*.

Очевидно, что функторы переводят ретракции в ретракции.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10 *Пользуясь тем, что существует ретракция групп подстановок $S_3 \rightarrow S_2$, доказать, что не существует функтора $Grp \rightarrow Grp$, сопоставляющего каждой группе G ее центр $Z(G)$.*

Предложение 2.3.2 *Если α – ретракция и мономорфизм, то α – изоморфизм. Аналогичное верно для коретракции и эпиморфизма.*

В категориях Set , Grp , Ab , Mod_R эпиморфизмы – сюръективные морфизмы, мономорфизмы – инъективные. В Top мономорфизмами являются инъективные непрерывные отображения.

Существуют примеры не сюръективных эпиморфизмов. Эти примеры показывают, что для того, чтобы морфизм был изоморфизмом, ему недостаточно быть эпиморфизмом и мономорфизмом:

ПРИМЕР 2.3.5 *Пусть Mon – категория всех моноидов, \mathbb{N} – аддитивный моноид неотрицательных целых чисел, \mathbb{Z} – моноид всех целых чисел, $inc : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ – каноническое вложение. Тогда для любого моноида M и гомоморфизма моноидов $f : \mathbb{Z} \rightarrow M$ будет иметь место равенство $f(n) + f(-n) = 0$, для всех $n \in \mathbb{Z}$. Значит, поскольку в случае выполнения $f(n) = g(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ будет верно $f(n) + f(-n) = g(n) + g(-n) = f(n) + g(-n)$, то, прибавляя слева к частям последних равенств $f(-n)$, получим $f(-n) = g(-n)$. Следовательно, $f \circ inc = g \circ inc$ влечет равенство $f = g$, откуда inc – эпиморфизм. Ясно, что он является и мономорфизмом, не будучи изоморфизмом.*

ПРИМЕР 2.3.6 *Вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ метрического пространства рациональных чисел в пространство действительных чисел является эпиморфизмом и мономорфизмом, но не изоморфизмом в категории метрических пространств и непрерывных отображений.*

ПРИМЕР 2.3.7 *Пусть $TopAb$ – категория топологических хаусдорфовых абелевых групп и непрерывных гомоморфизмов. Вложение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ подгруппы рациональных чисел в группу действительных чисел является эпиморфизмом, ибо для любого объекта A и морфизма $f : \mathbb{Q} \rightarrow A$ существует единственное продолжение $\mathbb{R} \rightarrow A$ равное на \mathbb{Q} отображению f . Но вложение не сюръективно. Поскольку инъекция будет также мономорфизмом, то это вложение является эпиморфизмом и мономорфизмом, но не изоморфизмом.*

Введем понятие, обобщающее определения подмножеств, подгрупп и подпространств. В этих определениях подобъект задается с помощью канонического мономорфизма. Поскольку в общем случае канонического мономорфизма может не быть, то определим его как класс эквивалентных мономорфизмов. Будем говорить, что мономорфизм $f : B \rightarrow A$ делится на мономорфизм $g : C \rightarrow A$, если существует такой $h : B \rightarrow C$, что $f = g \circ h$.

В этом случае h – мономорфизм. Легко видеть, что отношение делимости будет отношением предпорядка на классе всех мономорфизмов в \mathcal{A} , если игнорировать тот факт, что этот класс может не быть множеством. Будем считать морфизмы f и g эквивалентными, если f делится на g и g делится на f . Всякий морфизм, связывающий эквивалентные мономорфизмы, будет изоморфизмом, отсюда области определения эквивалентных мономорфизмов изоморфны. Классы эквивалентных мономорфизмов с кообластью A называются *подобъектами* объекта A . Класс всех подобъектов объекта A частично упорядочен отношением делимости и обозначается через $Sub(A)$. Двойственно определяются *факторобъекты* объекта A . Они будут задаваться эпиморфизмами $f : A \rightarrow B$, определяемыми эквивалентными $f \cong g$, если существуют такие h_1 и h_2 , что $h_1 \circ f = g$ и $h_2 \circ g = f$.

2.4 Естественные преобразования

Дадим определение естественного преобразования. Пусть $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ – функторы. *естественным преобразованием* $\eta : F \rightarrow G$ называется семейство морфизмов $\eta_c : F(c) \rightarrow G(c)$, $c \in Ob\mathcal{C}$, таких что для каждого морфизма $\alpha : a \rightarrow b$ of \mathcal{C} коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\eta_a} & G(a) \\ \downarrow F(\alpha) & & \downarrow G(\alpha) \\ F(b) & \xrightarrow{\eta_b} & G(b) \end{array} \quad (2.1)$$

ПРИМЕР 2.4.1 Пусть Fld – категория полей и гомоморфизмов, $n \geq 1$ – положительное целое число, $Gl_n : Fld \rightarrow Grp$ – функтор, сопоставляющий каждому полю K общую линейную группу $Gl_n(K)$ обратимых $n \times n$ -матриц над полем K . Пусть $(-)^*$ – функтор, сопоставляющий полю мультипликативную группу K^* этого поля. Тогда $Det : Gl_n(-) \rightarrow (-)^*$ будет естественным преобразованием.

Для любых функторов F, G и H из малой категории \mathcal{C} в произвольную категорию \mathcal{A} и естественных преобразований $\eta : F \rightarrow G$, $\sigma : G \rightarrow H$ определим композицию $\sigma\eta$, полагая $(\sigma\eta)_c = \sigma_c \circ \eta_c$ для всех $c \in Ob\mathcal{C}$. Тожественное естественное преобразование $1_F : F \rightarrow F$ определим как семейство $\{1_{Fc}\}_{c \in Ob\mathcal{C}}$, состоящее из тождественных морфизмов. Получим категорию $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, объектами которой являются функторы $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, а морфизмами – естественные преобразования.

Предложение 2.4.1 Пусть $\eta : F \rightarrow G$ – естественное преобразование функторов $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Тогда η является изоморфизмом $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ тогда и только тогда, когда все морфизмы $\eta_c : F(c) \rightarrow G(c)$ являются изоморфизмами в \mathcal{A} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех морфизмов $\alpha : a \rightarrow b$ категории \mathcal{C} коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 F(a) & \xrightarrow{\eta_a} & G(a) \\
 \downarrow F(\alpha) & & \downarrow G(\alpha) \\
 F(b) & \xrightarrow{\eta_b} & G(b)
 \end{array} \quad (2.2)$$

Поскольку η_a – изоморфизмы, то существует семейство морфизмов σ_a , где $a \in \text{Mor } \mathcal{C}$, таких что $\sigma_a \circ \eta_a = 1_{F_a}$ и $\eta_a \circ \sigma_a = 1_{G_a}$. Докажем естественность семейства σ_a . Из коммутативности квадрата вытекает, что $\eta_b F(\alpha) \sigma_a = G(\alpha) \eta_a \sigma_a = G(\alpha)$. Умножая полученное равенство слева на σ_b , получаем $\sigma_b \eta_b F(\alpha) \sigma_a = \sigma_b G(\alpha)$. В силу $\sigma_b \eta_b = 1_{F_b}$ отсюда получаем равенство $F(\alpha) \sigma_a = \sigma_b G(\alpha)$, откуда следует, что семейство σ_a является естественным преобразованием. Поскольку выполнены соотношения $\sigma \eta = 1_F$ и $\eta \sigma = 1_G$, то η – изоморфизм.

Существует естественное преобразование, которое не является ретракцией, хотя все его компоненты – ретракции.

2.5 Представимые функторы

2.5.1 Функторы морфизмов

Пусть \mathcal{C} – категория, $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ – ее объект. Обозначим через h^A – пара отображений, первое из которых действует на объектах категории \mathcal{C} как

$$\text{Ob } \mathcal{C} \ni B \mapsto \mathcal{C}(A, B),$$

А второе на морфизмах категории \mathcal{C} , по формуле:

$$\begin{array}{ccccc}
 B & h^A(B) = \mathcal{C}(A, B) & \ni \alpha & A \xrightarrow{\alpha} B \\
 \downarrow \beta & \downarrow & \downarrow & \searrow \beta \circ \alpha \quad \downarrow \beta \\
 C & h^A(C) = \mathcal{C}(A, C) & \ni \beta \circ \alpha & C
 \end{array}$$

Предложение 2.5.1 h^A – функтор $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$

Этот функтор называется функтором морфизмов.

Контравариантный функтор $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ можно рассматривать как пару отображений

$$\text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}, \quad A \mapsto F(A)$$

$$\text{Mor } \mathcal{C} \rightarrow \text{Mor } \mathcal{D}, \quad (A \xrightarrow{\alpha} B) \mapsto (F(B) \xrightarrow{F(\alpha)} F(A))$$

таких, что

- $(\forall A \in \text{Ob}(\mathcal{C})) \quad F(1_A) = 1_{F(A)}$
- $F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$, для любых $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$

Положим $h_A(B) = \mathcal{C}(B, A)$. Для $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\alpha} A$ определим $h_A(\alpha)(\beta)$.

Предложение 2.5.2 h_A – функтор $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$

Этот функтор называется *контравариантным функтором морфизмов*.

2.5.2 Представимые функторы и их свойства

Функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ называется представимым, если он изоморфен для некоторого $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ функтору h^A . Соответственно контравариантный функтор представим, если он изоморфен h_A . Докажем, что представимый функтор переводит мономорфизмы в инъекции.

Лемма 2.5.3 *Функтор морфизмов $h^A : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ переводит мономорфизмы в инъекции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $B \xrightarrow{\beta} C$ $\alpha \xrightarrow{h^A(\beta)} \beta \circ \alpha$

$\swarrow \alpha$

A

$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \beta \circ \alpha_1 \neq \beta \circ \alpha_2 \Rightarrow h^A(\beta)(\alpha_1) \neq h^A(\beta)(\alpha_2)$

Лемма 2.5.4 *Если β – эпиморфизм, то $h_A(\beta)$ – инъекция.*

Предложение 2.5.5 *Всякий представимый функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ переводит мономорфизмы в инъекции. Контравариантный представимый функтор $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ переводит эпиморфизмы в инъекции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует изоморфизм $\eta : h^C \rightarrow F$. Тогда для

любого $A \xrightarrow{\alpha} B$ коммутативен квадрат из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} h^C(A) & \xrightarrow[\cong]{\eta_A} & F(A) \\ \downarrow h^C(\alpha) & & \downarrow F(\alpha)^g \\ h^C(B) & \xrightarrow[\cong]{\eta_B} & F(B) \end{array}$$

$\begin{array}{c} \curvearrowright f \\ E \\ \curvearrowleft \end{array}$

Если α – мономорфизм, то $h^C(\alpha)$ – инъекция. В категории множеств всякий мономорфизм является инъекцией, и наоборот. Отсюда вытекает импликация

$$F(\alpha) \circ f = F(\alpha) \circ g \Rightarrow f = g$$

Следовательно, $F(\alpha)$ – инъекция.

2.5.3 Лемма Йонеды

Пусть \mathcal{C} – категория, $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ – ее объект. Для каждого $(\alpha : a \rightarrow b) \in \text{Mor } \mathcal{C}$ будем обозначать через $\mathcal{C}(c, \alpha) : \mathcal{C}(c, a) \rightarrow \mathcal{C}(c, b)$ отображение, действующее как $\mathcal{C}(c, \alpha)(\beta) = \alpha \circ \beta$ на элементах $\beta \in \mathcal{C}(c, a)$. Пусть $h^c : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ – функтор, принимающий значения $h^c(a) = \mathcal{C}(c, a)$ и $h^c(\alpha) = \mathcal{C}(c, \alpha)$ на объектах c и морфизмах $\alpha : a \rightarrow b$ in \mathcal{C} .

Лемма 2.5.6 *Для любых функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ и объекта $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ существуют биекции*

$$\text{Set}^{\mathcal{C}}(h^c, F) \xrightarrow{\cong} F(c),$$

естественные по c и F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $\text{Set}^{\mathcal{C}}(h^c, F) \rightarrow F(c)$ как $\eta \mapsto \eta_c(1_c)$. Проверим, что это отображение биективно. В силу естественности преобразования η коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} h^c(c) & \xrightarrow{\eta_c} & F(c) & & 1_c & \mapsto & \eta_c(1_c) = x \\ \downarrow \mathcal{C}(c, \gamma) & & \downarrow F(\gamma) & & \downarrow & & \downarrow \\ h^c(a) & \xrightarrow{\eta_a} & F(a) & & \gamma & \mapsto & \eta_a(\gamma) = F(\gamma)(x) \end{array}$$

Определим для каждого $x \in F(c)$ семейство \tilde{x} как $\tilde{x}_a(\gamma) = F(\gamma)(x)$. Ясно, что $\tilde{x}_a(1_a) = F(1_a)(x) = x$. Проверим, что \tilde{x} является естественным преобразованием:

$$\begin{array}{ccc} h^c(a) & \xrightarrow{\tilde{x}_a} & F(a) & & \gamma & \mapsto & F(\gamma)(x) \\ \downarrow \mathcal{C}(c, \alpha) & & \downarrow F(\alpha) & & \downarrow & & \downarrow \\ h^c(b) & \xrightarrow{\tilde{x}_b} & F(b) & & \alpha \circ \gamma & \mapsto & F(\alpha \circ \gamma)(x) = F(\alpha)(F(\gamma)(x)) \end{array}$$

Стало быть, \tilde{x} – естественное преобразование.

Имеем функции $\varphi : \text{Set}^{\mathcal{C}}(h^c, F) \rightarrow F(c)$, $\psi : F(c) \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}}(h^c, F)$, принимающие значения $\varphi(\eta) = \eta_c(1_c)$, $\psi(x) = \tilde{x}$. Легко видеть, что композиции $\psi\varphi$ и $\varphi\psi$ являются тождественными морфизмами.

Для любых объекта c и морфизма $\alpha : a \rightarrow b$ обозначим через $\mathcal{C}(a, c) : \mathcal{C}(b, c) \rightarrow \mathcal{C}(a, c)$ отображение $\beta \mapsto \beta \circ \alpha$.

Пусть $Y : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}}$ будет функтором, принимающим значения $Y(c) = h^c$ на $c \in \text{Ob}\mathcal{C}$, для которого естественные преобразования $Y(\alpha) : h^b \rightarrow h^a$ имеют компоненты $Y(\alpha)_c = \mathcal{C}(a, c) : \mathcal{C}(b, c) \rightarrow \mathcal{C}(a, c)$. Функтор F называется *полным*, если отображения $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{A}(F(A), F(B))$ сюръективны. Он называется *универсальным*, если $F_{A,B}$ – инъекции для всех $A, B \in \mathcal{C}$. *Вложением* называется универсальный функтор, инъективный на классе $\text{Ob}\mathcal{C}$.

Следствие 2.5.7 Пусть \mathcal{C} – малая категория. Тогда функтор $Y : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}}$ является полным вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Ионеды мы имеем $\text{Set}^{\mathcal{C}}(h^b, h^a) \cong h^a(b) = \mathcal{C}(a, b)$. Следовательно, Y – полный и универсальный. Если $a \neq b$, то $h^a(c) \cap h^b(c) = \emptyset$. Следовательно, Y является полным вложением.

Обозначим через $h_c : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ функтор $h_c(a) = \mathcal{C}(a, c)$, $h_c(\alpha) = f \circ \alpha$. Подставляя вместо \mathcal{C} категорию \mathcal{C}^{op} , получаем

Следствие 2.5.8 Для любых функтора $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \text{Set}$ и объекта $c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ существуют естественные по c и F биекции

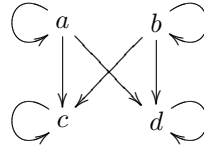
$$\text{Set}^{\mathcal{C}^{op}}(h_c, F) \xrightarrow{\cong} F(c).$$

Следствие 2.5.9 Пусть $h_* : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ – функтор, ставящий в соответствие каждому $c \in \text{Ob}\mathcal{C}$ функтор h_c и каждому $\alpha \in \mathcal{C}(a, b)$ естественное преобразование $h_\alpha : h_a \rightarrow h_b$, компоненты которого $(h_\alpha)_c : \mathcal{C}(c, a) \rightarrow \mathcal{C}(c, b)$ действуют как $(h_\alpha)_c(f) = \alpha \circ f$. Тогда функтор $h_* : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ является полным вложением.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.1 Категорию можно представлять себе как набор множеств со структурой и отображений между этими множествами, сохраняющими эту структуру. Но под формальное определение подходят и категории, объекты которых не являются множествами. Например, моноид - это категория, имеющая один объект. Предупорядоченное множество - категория, в которой для каждой пары объектов (a, b) существует не больше одного морфизма $a \rightarrow b$. Можно ли интерпретировать объекты как множества?

Лемма Йонеды показывает, что можно. Будем рассматривать малую категорию \mathcal{C} . Объект категории \mathcal{C} можно рассматривать как контравариантный функтор морфизмов. Стало быть, каждый объект a категории \mathcal{C} можно задать как семейство множеств $\{C(x, a)\}_{x \in \text{Об } \mathcal{C}}$ вместе с семейством отображений $\{C(y, a) \xrightarrow{C(\alpha, a)} C(x, a)\}_{x \xrightarrow{\alpha} y}$, удовлетворяющим условиям, вытекающим из функториальности h_a . Морфизм категории \mathcal{C} можно рассматривать как естественное преобразование между контравариантными функторами морфизмов. Отсюда следует, что морфизм можно задать как семейство отображений множеств.

ПРИМЕР 2.5.2 Пусть (X, \leq) - частично упорядоченное множество. Тогда функторы $h_a : X^{op} \rightarrow \text{Set}$, а значит и объекты категории X , можно задать как множества $V_a = \{x \in X : x \leq a\}$. Морфизмы будут задаваться как включения подмножеств. Рассмотрим, например, малую категорию, соответствующую частично упорядоченному множеству a, b, c, d с отношением порядка $\{a \leq a, a \leq c, a \leq d, b \leq b, b \leq c, b \leq d, c \leq c, d \leq d\}$:



Ее объекты можно рассматривать как множества $V_a = a$, $V_b = b$, $V_c = a, b, c$ и $V_d = a, b, d$. Морфизмами между этими множествами будут включения.

Глава 3

Пределы и копределы

Понятие *предела* является одним из самых важных в теории категорий. Переход к пределу позволяет строить объекты из других объектов. Рассматривая пределы в двойственных категориях, мы получаем *копределы*.

3.1 Пределы

Пусть $P(x, y, z)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что мы изучаем решения уравнения

$$P(x, y, z) = 0$$

в целых числах. Каждому решению можно сопоставить решение, имеющее место для всех натуральных $n \geq 1$

$$P(x, y, z) = 0 \pmod{2^n},$$

и мы приходим к необходимости изучать последовательности целых чисел

$$(x_1 \pmod{2}, x_2 \pmod{2^2}, x_3 \pmod{2^3}, \dots),$$

удовлетворяющих условиям $x_k = x_{k+1} \pmod{p^k}$, для $k = 1, 2, 3, \dots$. Множество таких последовательностей будет удовлетворять некоторому свойству универсальности, оно будет кольцом и может быть построено как предел колец вычетов по модулю 2^n .

Обобщение этой конструкции приводит к понятию *предела*. Декартовы произведения и ядра групп являются частными случаями предела.

Пусть \mathcal{C} – малая категория, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ – функтор. *Пределом* $\varprojlim_{\mathcal{C}} F$ называется пара, состоящая из такого объекта $\varprojlim_{\mathcal{C}} F \in \text{Ob}\mathcal{A}$ и семейства морфизмов $\{p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \rightarrow F(c)\}_{c \in \text{Ob}\mathcal{C}}$, что для каждого морфизма $\alpha : a \rightarrow b$

категории \mathcal{C} коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \varprojlim_{\mathcal{C}} F & \\ p_a \swarrow & & \searrow p_b \\ F(a) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(b) \end{array}$$

и если для любой другой пары, состоящей из объекта $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ и семейства морфизмов $\{\pi_c : A \rightarrow F(c)\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}}$, делающих коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \pi_a \swarrow & & \searrow \pi_b \\ F(a) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(b) \end{array}$$

существует единственный морфизм $u : A \rightarrow \varprojlim_{\mathcal{C}} F$, для которого коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\exists! u} & \varprojlim_{\mathcal{C}} F \\ \pi_c \searrow & & \swarrow p_c \\ & F(c) & \end{array}$$

при всех $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Морфизмы $p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \rightarrow F(c)$ называются *проекциями* предела.

Лемма 3.1.1 Семейство проекций предела $p_c : \varprojlim_{\mathcal{C}} F \rightarrow F(c)$ мономорфно в том смысле, что одновременное выполнение равенств $p_c \circ f = p_c \circ g$ для всех $c \in \mathcal{C}$ влечет $f = g$.

В случае, когда \mathcal{C} – дискретная категория, функтор $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ будет в точности семейством объектов $F(c) = A_c \in \mathcal{A}$. В этом случае предел называется произведением $\prod_{c \in \mathcal{C}} A_c$, а проекции предела – проекциями произведения.

ПРИМЕР 3.1.1 Если категория \mathcal{A} является частично упорядоченным множеством, то произведением $\prod_{i \in I} A_i$ будет точная нижняя грань $\inf\{A_i : i \in I\}$ элементов $A_i \in \mathcal{A}$.

Если \mathcal{C} состоит из двух объектов a, b и двух морфизмов $p, q : a \rightarrow b$ (и тождественных морфизмов $1_a, 1_b$), то предел функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *уравнителем* пары морфизмов $(F(p), F(q))$. Будем говорить, что категория \mathcal{A} имеет пределы для функторов из заданного класса, если для каждого функтора из этого класса существует предел. В частности, утверждение "имеет произведения" означает, что для любых множества I и семейства объектов $\{A_i\}_{i \in I}$ существует произведение $\prod_{i \in I} A_i$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1 Описать произведения в категории $\mathcal{C}at$ малых категорий и функторов.

Уравнителем пары морфизмов $A \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} B$ является пара (E, λ) , состоящая из объекта E и морфизма $\lambda : E \rightarrow A$ таких, что $\alpha \circ \lambda = \beta \circ \lambda$, и для любых других (E', λ') , удовлетворяющих $\alpha \circ \lambda' = \beta \circ \lambda'$, существует единственный морфизм $f : E \rightarrow E'$, для которого $\lambda \circ f = \lambda'$. Обозначим пару (E, λ) через $Eq(\alpha, \beta)$.

Предложение 3.1.2 Пусть (E, λ) – уравнитель некоторой пары морфизмов. Тогда λ – мономорфизм.

Такие мономорфизмы называются *строгими*.

Предложение 3.1.3 В категории множеств $\mathcal{S}et$ каждый мономорфизм является уравнителем некоторой пары.

Теорема 3.1.4 Пусть \mathcal{A} – категория. Следующие свойства категории \mathcal{A} равносильны:

- (i) Для любых малой категории \mathcal{C} и функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ существует предел $\varprojlim_{\mathcal{C}} F$ в категории \mathcal{A} ;
- (ii) Категория \mathcal{A} имеет произведения и уравнители.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii) \Rightarrow (i). Пусть $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ – функтор. Для каждого $\alpha \in \mathit{Mor} \mathcal{C}$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \prod_{c \in \mathit{Ob} \mathcal{C}} F(c) & & \prod_{\gamma \in \mathit{Mor} \mathcal{C}} F(\mathit{cod} \gamma) \\ \downarrow p_{\mathit{dom} \alpha} & & \downarrow \bar{p}_{\alpha} \\ F(\mathit{dom} \alpha) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(\mathit{cod} \alpha) \end{array} \quad (3.1)$$

где \bar{p}_{α} – проекции произведения $A_{\alpha} = F(\mathit{cod} \alpha)$. Обозначим через

$$q_0 : \prod_{c \in \mathit{Ob} \mathcal{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in \mathit{Mor} \mathcal{C}} F(\mathit{cod} \gamma)$$

(единственный) морфизм, делающий диаграмму (3.1) коммутативной. Проекции

$$p_{\mathit{cod} \alpha} : \prod_{c \in \mathit{Ob} \mathcal{C}} F(c) \longrightarrow F(\mathit{cod} \alpha)$$

тоже дают единственный морфизм $q_1 : \prod_{c \in \mathit{Ob} \mathcal{C}} F(c) \longrightarrow \prod_{\gamma \in \mathit{Mor} \mathcal{C}} F(\mathit{cod} \gamma)$, для которого $\bar{p}_{\alpha} \circ q_1 = p_{\mathit{cod} \alpha}$. Рассмотрим уравнитель (Eq, e) пары морфизмов q_0 и q_1 . Докажем, что пара $(Eq, \{p_c \circ e\}_{c \in \mathit{Ob} \mathcal{C}})$ является пределом функтора F .

Пусть $(A, \{\pi_c\}_{c \in \mathit{Ob} \mathcal{C}})$ – такая пара, что $F(\alpha) \circ \pi_{\mathit{dom} \alpha} = \pi_{\mathit{cod} \alpha}$ для всех $\alpha \in \mathit{Mor} \mathcal{C}$. Существует единственный морфизм $\pi = (\pi_c) : A \rightarrow \prod_c F(c)$, для которого $p_c \circ \pi = \pi_c$ для всех $c \in \mathit{Ob} \mathcal{C}$.

Рассмотрим диаграмму, в которой правый треугольник коммутативен при $i = 0$, и $\bar{p}_\alpha \circ q_1 = p_{\text{cod } \alpha}$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\pi} & \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) & \xrightarrow{q_i} & \prod_{\gamma \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{cod } \gamma) \\ \downarrow = & & \downarrow p_{\text{dom } \alpha} & & \downarrow \bar{p}_\alpha \\ A & \xrightarrow{\pi_{\text{dom } \alpha}} & F(\text{dom } \alpha) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(\text{cod } \alpha) \end{array}$$

Тогда для каждого $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}$ мы имеем равенства

$$\bar{p}_\alpha \circ q_0 \circ \pi = F(\alpha) \circ p_{\text{dom } \alpha} \circ \pi = F(\alpha) \circ \pi_{\text{dom } \alpha} = \pi_{\text{cod } \alpha} = p_{\text{cod } \alpha} \circ \pi = \bar{p}_\alpha \circ q_1 \circ \pi.$$

Значит, для любых морфизма α и индекса $i \in \{0, 1\}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q_i \circ \pi} & \prod_{\gamma \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{cod } \gamma) \\ \downarrow = & & \downarrow \bar{p}_\alpha \\ A & \xrightarrow{\pi_{\text{cod } \alpha}} & F(\text{cod } \alpha) \end{array}$$

Но для семейства $\{\pi_{\text{cod } \alpha}\}$ такой морфизм $A \rightarrow \prod_{\gamma \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{cod } \gamma)$ является единственным. Следовательно, $q_0 \circ \pi = q_1 \circ \pi$. Отсюда вытекает, что существует единственный морфизм $q : A \rightarrow Eq$, для которого $e \circ q = \pi$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) \\ \uparrow q & & \downarrow p_c \\ A & \xrightarrow{\pi_c} & F(c) \end{array}$$

Имеют место равенства $p_c \circ e \circ q = p_c \circ \pi = \pi_c$, поскольку π является морфизмом, связанным с произведением объектов $F(c)$. Следовательно, существует такой $q : A \rightarrow Eq$, что все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q} & Eq \\ \downarrow = & & \downarrow p_c \circ e \\ A & \xrightarrow{\pi_c} & F(c) \end{array}$$

коммутативны. С другой стороны, если $q' : A \rightarrow Eq$ удовлетворяет соотношениям $(p_c \circ e) \circ q' = \pi_c$ для всех $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$, то $p_c \circ (e \circ q') = \pi_c$ и, значит, $e \circ q' = e \circ q$. Но q – единственный, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & \prod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c) \\ \uparrow q & & \uparrow e \circ q = e \circ q' \\ A & \xrightarrow{=} & A \end{array}$$

коммутативна. Стало быть $q = q'$. Таким образом, пара $(Eq, \{p_c \circ e\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}})$ является пределом функтора F .

3.2 Построение пределов

Пусть \mathcal{C} – категория множеств со структурой, например Set , Top , Grp . При доказательстве Теоремы 3.1.4 мы видели, что $\varprojlim_{\mathcal{C}} F$ – уравнитель пары морфизмов q_0 и q_1 , где $q_0(\varphi)_\alpha = F(\alpha)(\varphi_{\text{dom } \alpha})$ и $q_1(\varphi)_\alpha = \varphi_{\text{cod } \alpha}$. Следовательно, элементами множества $\varprojlim_{\mathcal{C}} F$ будут семейства φ_c , удовлетворяющие равенствам $\varphi_{\text{cod } \alpha} = F(\alpha)(\varphi_{\text{dom } \alpha})$ для всех $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}$. Такие семейства называются *нитьями*.

ПРИМЕР 3.2.1 Пусть \mathbb{N} – упорядоченное множество неотрицательных целых чисел, $F : \mathbb{N}^{op} \rightarrow \text{Ab}$ – функтор в категорию абелевых групп. Мы видели, что такие функторы будут в точности обратными спектрами абелевых групп над \mathbb{N} . Для задания всех проекций обратного спектра достаточно указать последовательность гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow F(n+1) \rightarrow F(n) \rightarrow F(n-1) \rightarrow \dots \rightarrow F(1) \rightarrow F(0)$$

Нитью будет произвольная последовательность элементов $x_n \in F(n)$, удовлетворяющих $F(n+1 \rightarrow n)(x_{n+1}) = x_n$. Группа $\varprojlim_{\mathbb{N}^{op}} F$ состоит из нитей, операция над которыми производится по формуле $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$. Если $F(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ и $F(n+1) \rightarrow F(n)$ – проекции, определенные как $x \bmod p^{n+1} \mapsto x \bmod p^n$, то $\varprojlim_{\mathbb{N}^{op}} \{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}$ будет группой целых p -адических чисел.

ПРИМЕР 3.2.2 Действие моноида на множестве можно рассматривать как функтор, определенный на категории, состоящей из одного объекта, морфизмами которой являются элементы этого моноида. Предел этого функтора будет равен множеству неподвижных точек.

В категориях Set , Set_* , Top , Top_* , Grp , Ab , Mod_R предел состоит из нитей. Здесь Set_* обозначает категорию пунктированных множеств и отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную. Аналогично, категория Top_* состоит из пунктированных топологических пространств и непрерывных отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную.

3.3 Копределы

Пусть \mathcal{C} – малая категория, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ – функтор в категорию \mathcal{A} . Функтор F можно рассматривать как функтор $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{A}^{op}$. Предел функтора F^{op} в категории \mathcal{A}^{op} называется *копределом функтора F в категории \mathcal{A}* и обозначается $\varinjlim^{\mathcal{C}} F$. Таким образом, копредел – это пара $(\varinjlim^{\mathcal{C}} F, \{\lambda_c : F(c) \rightarrow \varinjlim^{\mathcal{C}} F\})$, состоящая из объекта и семейства морфизмов, для кото-

рых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(b) \\ & \searrow \lambda_a & \swarrow \lambda_b \\ & \varinjlim^{\mathcal{C}} F & \end{array}$$

при всех $(\alpha : a \rightarrow b) \in \text{Mor } \mathcal{C}$.

Эта пара $(\varinjlim^{\mathcal{C}} F, \{\lambda_c\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}})$ коуниверсальна в следующем смысле:

Рассмотрим категорию, объектами которой служат пары (A, λ) , состоящие из объектов A из категории \mathcal{A} и естественных преобразований $\lambda : F \rightarrow \Delta_{\mathcal{C}} A$. Морфизмами между такими парами являются тройки морфизмов $(f : A \rightarrow A', \lambda : F \rightarrow \Delta_{\mathcal{C}} A, \lambda' : F \rightarrow \Delta_{\mathcal{C}} A')$, для которых коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \lambda \swarrow & & \searrow \lambda' \\ \Delta_{\mathcal{C}} A & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{C}}(f)} & \Delta_{\mathcal{C}} A' \end{array}$$

Легко видеть, что инициальным объектом в этой категории будет копредел функтора F , он будет задаваться парой, состоящей из объекта $\varinjlim^{\mathcal{C}} F$ и естественного преобразования $F \rightarrow \Delta_{\mathcal{C}} \varinjlim^{\mathcal{C}} F$, компоненты которого составляют семейство морфизмов копредела, которые называются *инъекциями* копредела. В случае дискретной категории копредел называется копроизведением семейства объектов, а инъекции копредела – инъекциями копроизведения.

ПРИМЕР 3.3.1 Пусть \mathcal{A} – частично упорядоченное множество. Копроизведением в нем будет $\sum_{i \in I} A_i = \sup\{A_i : i \in I\}$.

ПРИМЕР 3.3.2 Копроизведением в категории Set будет дизъюнктное объединение множеств. В категории Grp – свободное произведение $\prod_{i \in I}^* G_i$. В категории Set_* – букет множеств. В категории Mod_R – прямая сумма.

Согласно двойственному утверждению к Теореме 3.1.4 можно утверждать, что для каждого функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ копредел будет коуравнителем пары морфизмов

$$r_0, r_1 : \sum_{\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}} F(\text{dom } \alpha) \rightrightarrows \sum_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c),$$

где символ \sum обозначает копроизведение, а r_0 и r_1 – морфизмы, строящиеся с помощью соответствующих диаграмм.

ПРИМЕР 3.3.3 В категории множеств копредел функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ получается из дизъюнктного объединения $\coprod_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c)$ отождествлением элементов $x \in F(\text{dom}(\alpha))$ с элементами $F(\alpha)(x) \in F(\text{cod}(\alpha))$.

ПРИМЕР 3.3.4 Пусть $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$ – категория левых R -модулей. Тогда для $x \in F(\text{dom } \alpha)$ имеем

$$r_0(x) = F(\alpha)(x) \in F(\text{cod } \alpha), \quad r_1(x) = x \in F(\text{dom } \alpha).$$

Следовательно, имеет место изоморфизм модулей $\varinjlim^c F \cong \sum_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}} F(c)/Q$, где подмодуль Q порожден элементами $x - F(\alpha)x$. Если $F : I \rightarrow \text{Mod}_R$ – функтор из категории $I = \mathbb{N}$, значения которого на морфизмах равны вложениям $F(i) \rightarrow F(j)$, то модуль $\varinjlim^I F$ изоморфен объединению $\cup_{i \in I} F(i)$. Рассмотрим, например, последовательность

$$\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^2} \subset \mathbb{Z}_{p^3} \subset \mathbb{Z}_{p^4} \cdots,$$

где \mathbb{Z}_{p^n} – мультипликативная группа комплексных решений $z \in \mathbb{C}$ уравнения $z^{p^n} = 1$. Тогда абелева группа $\varinjlim^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$ будет максимальной p -подгруппой аддитивной группы \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (с операцией сложения по $\text{mod } 1$).

Предложение 3.3.1 Пусть $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ – функтор, $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ – объект. Тогда

$$\mathcal{A}(\varinjlim^c F, A) \cong \varprojlim_{\mathcal{C}^{\text{op}}} \mathcal{A}(F(-), A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_c : F(c) \rightarrow \varinjlim^c F$ – морфизмы копредела. Для каждого морфизма $\varinjlim^c F \xrightarrow{\alpha} A$ существует единственное семейство $\alpha_c = \alpha \circ \lambda_c : F(c) \rightarrow A$. Это семейство можно рассматривать как нить элементов $\alpha_c \in \mathcal{A}(F(c), A)$. Легко видеть, что соответствие $\alpha \mapsto \{\alpha_c\}_{c \in \text{Ob } \mathcal{C}}$ биективно.

Следствие 3.3.2 Если существуют естественные по $c \in \mathcal{C}$ изоморфизмы

$$\mathcal{A}(F(c), \varinjlim^c F) \cong \mathcal{A}(F(c), F(c)),$$

то $\mathcal{A}(\varinjlim^c F, \varinjlim^c F) \cong \varprojlim_{\mathcal{C}} \{\mathcal{A}(F(c), F(c))\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.5 Семейство $\alpha_c : F(c) \rightarrow A$ можно рассматривать как естественное преобразование $F \rightarrow \Delta_{\mathcal{C}} A$. Следовательно, $\mathcal{A}(\varinjlim^c F, A) \cong \mathcal{A}^c(F, \Delta_{\mathcal{C}} A)$.

ПРИМЕР 3.3.6 Так как $\varinjlim^{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n} = C_{p^\infty}$ и образ любого гомоморфизма $\mathbb{Z}_{p^n} \rightarrow C_{p^\infty}$ содержится в \mathbb{Z}_{p^n} , то $\text{Ab}(\mathbb{Z}_{p^n}, C_{p^\infty}) \cong \text{Ab}(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^n})$. Следовательно

$$\text{Ab}(C_{p^\infty}, C_{p^\infty}) \cong \varprojlim_{\mathbb{N}^{\text{op}}} \text{Ab}(\mathbb{Z}_{p^n}, \mathbb{Z}_{p^n}).$$

Поскольку кольцо эндоморфизмов циклической группы порядка p^n изоморфно кольцу вычетов по модулю p^n , то отсюда вытекает, что кольцо эндоморфизмов квазициклической группы изоморфно кольцу целых p -адических чисел $\varprojlim_{\mathbb{N}^{\text{op}}} \{\mathbb{Z}_{p^n}\}$.

3.4 Декартовы квадраты

Пусть $f : A \rightarrow C$ и $g : B \rightarrow C$ – два морфизма в объект C . *Декартовым* (или *коуниверсальным*) *квадратом* для морфизмов f и g называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ \downarrow \pi_A & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} \quad (3.2)$$

такая, что для любых объекта D и морфизмов $\alpha : D \rightarrow A$, $\beta : D \rightarrow B$, удовлетворяющих равенству $g \circ \beta = f \circ \alpha$, существует единственный морфизм $\gamma : D \rightarrow P$, для которого $\pi_A \circ \gamma = \alpha$ и $\pi_B \circ \gamma = \beta$. В этом случае объект P , вместе с морфизмами π_A , π_B и $f \circ \pi_A$, будет пределом диаграммы $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} B$. Объект P называется *расслоенным произведением*, *ассоциированным со схемой* $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} B$ и обозначается $A \times_C B$.

Поскольку декартов квадрат является пределом, то в категории Set (или Top) он будет равен

$$A \times_C B = \{(a, b) : a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}.$$

Предложение 3.4.1 Пусть (3.2) – декартов квадрат. Тогда если f – мономорфизм, то π_B – мономорфизм. Если f – ретракция, то π_B – ретракция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \circ i = 1_C$, то $f \circ (i \circ g) = g \circ 1_B$. В этом случае будет существовать единственный морфизм $j : B \rightarrow P$, для которого $\pi_A \circ j = i \circ g$ и $\pi_B \circ j = 1_B$. Следовательно π_B – ретракция.

ПРИМЕР 3.4.1 Пусть абелева группа G является копределом диаграммы, состоящей из $A \cap B$, A , B и вложений. Если каждый гомоморфизм $A \rightarrow G$ имеет образ в A , и каждый гомоморфизм $B \rightarrow G$ имеет образ в B , то получаем $\text{End}(G) \cong \text{End}(A) \times_{\text{End}(A \cap B)} \text{End}(B)$. Здесь через $X \times_Z Y$ обозначает предел диаграммы $X \rightarrow Z \leftarrow Y$.

ПРИМЕР 3.4.2 Подгруппа $G \subseteq A \times B$ декартового произведения абелевых групп A и B называется *подпрямой суммой*, если проекции $p_A|_G : G \rightarrow A$ и $p_B|_G : G \rightarrow B$ являются эпиморфизмами.

Легко видеть, что если в декартовом квадрате (3.2) в категории абелевых групп гомоморфизмы f и g сюръективны, то π_A и π_B сюръективны. Стало быть, в этом случае P будет подпрямой суммой A и B . Известно [15, С.55], что верно и обратное – каждая подпрямая сумма может быть получена как расслоенное произведение, ассоциированное со схемой, состоящей из эпиморфизмов.

Предложение 3.4.2 Пусть задана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & R \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array} \quad (3.3)$$

Если левый и правый квадраты декартовы, то декартов внешний квадрат. Если левый и внешний квадраты декартовы, то правый квадрат декартов.

Напомним, что мономорфизм называется строгим, если он является уравнителем некоторой пары морфизмов.

Предложение 3.4.3 Пусть морфизм f в декартовом квадрате (3.2) является строгим мономорфизмом. Тогда π_B – строгий мономорфизм.

3.5 Пределы и мономорфизмы в категории функторов

Наша следующая цель – доказать, что естественное преобразование в категории функторов является мономорфизмом (соотв. эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда все его компоненты – мономорфизмы (соотв. эпиморфизмы). Докажем, что пределы и копределы в категории функторов можно вычислять покомпонентно, а затем воспользуемся тем, что морфизм $\alpha : A \rightarrow B$ будет мономорфизмом, если и только если квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ \downarrow 1_A & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array} \quad (3.4)$$

является декартовым.

Теорема 3.5.1 Пусть $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ – функтор. Семейство естественных преобразований $G \xrightarrow{\lambda_c} F(c)$ является его пределом в $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ тогда и только тогда, когда для каждого $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ семейство $G(d) \xrightarrow{(\lambda_c)_d} F(c)(d)$ – предел функтора $F(c)$ в категории \mathcal{A} .

Иными словами, имеет место $(\varprojlim_{\mathcal{C}} F)(d) = \varprojlim_{\mathcal{C}} (F(d))$, для всех $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$.

Лемма 3.5.2 Если F переводит декартовы квадраты в декартовы, то он переводит мономорфизмы в мономорфизмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha : A \rightarrow B$ – мономорфизм. Декартов квадрат (3.4) переводится в декартов. Следовательно, $F(\alpha)$ – мономорфизм.

Заметим, что справедливы двойственные утверждения. В частности, функтор, переводящий кодекартовы квадраты в кодекартовы, переводит эпиморфизмы в эпиморфизмы.

Теорема 3.5.3 Естественное преобразование $\eta : F \rightarrow G$ между функторами $F, G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ является мономорфизмом (соотв. эпиморфизмом), если и только если его компоненты $\eta_c : F(c) \rightarrow G(c)$ – мономорфизмы (соотв. эпиморфизмы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если η – мономорфизм, то, поскольку декартов квадрат в $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ будет декартовым для каждого $d \in \mathcal{D}$, морфизмы η_d будут мономорфизмами. Обратное утверждение вытекает из определения мономорфизма.

УПРАЖНЕНИЕ 3.2 Доказать, что морфизм ориентированных графов является мономорфизмом (соотв. эпиморфизмом) тогда и только тогда, когда он инъективен (соотв. сюръективен) на множествах стрелок и вершин.

3.6 Относительно инъективные и проективные объекты

Для исследования вопросов о разрешимости уравнений выделяют объекты $P \in \mathcal{A}$, для которых эпиморфизмы $A \xrightarrow{f} B$ переходят в сюръекции $\mathcal{A}(P, f) : \mathcal{A}(P, A) \rightarrow \mathcal{A}(P, B)$. Такие объекты P называются проективными. В действительности выполнение этого свойства может требоваться не для всех эпиморфизмов. Так возникают *относительно проективные объекты*, которым посвящен данный параграф.

Эпиморфизмы обладают следующим свойством: Если в кодекартовом квадрате

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array} \quad (3.5)$$

α – эпиморфизм, то δ – эпиморфизм. Это свойство было установлено нами в двойственном случае. Следующий пример показывает, что в случае, когда α – мономорфизм, морфизм δ может не быть мономорфизмом.

ПРИМЕР 3.6.1 Пусть $\mathcal{A} = \text{Ann}$ – категория коммутативных колец с 1. Копроизведением в категории Ann будет тензорное произведение, начальным объектом – кольцо целых чисел \mathbb{Z} . Рассмотрим кодекартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{u} & \mathbb{Q} \\ \downarrow v & & \downarrow v' \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{u'} & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \end{array} \quad (3.6)$$

Поскольку $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = 0$, то u' – не мономорфизм.

Мономорфизм α называется *универсальным*, если верна импликация

диаграмма (3.5) – кодекартов квадрат $\Rightarrow \delta$ – мономорфизм.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3 Доказать, что в Set каждый мономорфизм универсален.

УПРАЖНЕНИЕ 3.4 Доказать, что если в кодекартовом квадрате (3.5) морфизм α является универсальным мономорфизмом, то δ – универсальный мономорфизм.

Пусть \mathcal{A} – категория с кодекартовыми квадратами. Объект $I \in \text{Ob}\mathcal{A}$ называется *инъективным относительно класса мономорфизмов*, если для любых объектов $A, B \in \text{Ob}\mathcal{A}$ и мономорфизма $\mu : A \rightarrow B$ из этого класса морфизм

$$\mathcal{A}(B, I) \rightarrow \mathcal{A}(A, I), \quad \beta \mapsto \beta \circ \mu,$$

сюръективен.

ПРИМЕР 3.6.2 (Абсолютные ретракты Борсука.) Пусть Met_r – категория метризуемых пространств и непрерывных отображений. Пусть \mathcal{P}_m состоит из непрерывных инъекций $X \rightarrow X'$, образы которых замкнуты. В частности, если $r : X \rightarrow X'$ – ретракция, то существует такой морфизм $i : X' \rightarrow X$, что $r \circ i = 1_{X'}$, и вложение $i(X') \subseteq X$ будет замкнутым отображением. Стало быть, коретракции принадлежат \mathcal{P}_m .

Метризуемое пространство I называется *AR-пространством*, если для любого замкнутого мономорфизма $\theta : I \rightarrow X$ существует π , для которого $\pi \circ \theta = 1_I$. Согласно Борсуку [8] AR-пространства – это инъективные объекты относительно класса мономорфизмов \mathcal{P}_m .

Найдем условия, при которых аналогичное свойство имеет место для объектов категории достаточно общего вида.

Предложение 3.6.1 Пусть \mathcal{A} – категория с кодекартовыми квадратами. Объект $I \in \text{Ob}\mathcal{A}$ инъективен относительно универсальных мономорфизмов тогда и только тогда, когда всякий универсальный мономорфизм $i : I \rightarrow X$ в произвольный объект является коретракцией.

При исследовании морфизмов категории возникают следующие задачи:

1. Описать (относительно) инъективные объекты. Ответить на вопрос, каждый ли объект допускает мономорфизм $X \rightarrow I$ из заданного класса в инъективный объект.

2. Определить, существует ли наименьший инъективный объект, обладающий данным свойством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6.3 Мономорфизм $\mu : X \rightarrow I$ называется *существенным*, если для каждого морфизма $u : I \rightarrow A$ верна импликация

$$u \circ \mu - \text{мономорфизм} \Rightarrow u - \text{мономорфизм}.$$

В этом случае, если I – инъективный объект, пара (I, μ) называется *инъективной оболочкой объекта X* .

ПРИМЕР 3.6.4 В категории абелевых групп инъективные объекты – в точности абелевы группы. Вложение $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ является существенным мономорфизмом, \mathbb{Q} – инъективная оболочка \mathbb{Z} . В категории абелевых групп, или, более общим образом, в категории модулей над кольцом с 1 каждый объект обладает инъективной оболочкой [10].

3.7 Категория систем переходов

Применим изученное в данной главе к категории систем переходов. Наша задача – определить, существуют ли пределы в этой категории. *Системой переходов* $\mathbf{T} = (S, s_0, Tran, L)$ называется четверка, состоящая из множеств S и L , элемента $s_0 \in S$ и отношения $Tran \subseteq S \times L \times S$. Обозначим $Tran_* = Tran \cup \{(s, *, s) : s \in S\}$.

Морфизмом $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ называется пара (σ, λ) , состоящая из отображения множеств $\sigma : S \rightarrow S'$ и отображения пунктированных множеств $L \cup \{*\} \xrightarrow{\lambda} L' \cup \{*\}$ таких, что $\sigma(s_0) = s'_0$ и

$$(s_1, a, s_2) \in Tran \Rightarrow (\sigma(s_1), \lambda(a), \sigma(s_2)) \in Tran'_*,$$

где $Tran'_* = Tran' \cup \{(s', *, s') : s' \in S'\}$. Таким образом, если $\lambda(a) = *$, то $\sigma(s_1) = \sigma(s_2)$.

Морфизму $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$ соответствует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} s_0 \in S & \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{dom}} \\ \xrightarrow{*} \\ \xleftarrow{\text{cod}} \end{array} & Tran_* & \longrightarrow & L \cup \{*\} & \longleftarrow & \{*\} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \times \lambda \times \sigma & & \lambda \downarrow & & \downarrow \\ s'_0 \in S' & \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{dom}'} \\ \xrightarrow{*} \\ \xleftarrow{\text{cod}'} \end{array} & Tran'_* & \longrightarrow & L' \cup \{*\} & \longleftarrow & \{*\} \end{array} \quad (3.7)$$

Наоборот, из коммутативности диаграммы (3.7) будет следовать, что (σ, λ) – морфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7.1 Рефлексивным графом называется ориентированный граф $A \stackrel{\text{dom}}{\underset{\text{cod}}{=} V}$, заданный вместе с отображением $i : V \rightarrow A$, удовлетворяющим соотношениям $\text{dom } oi = \text{cod } oi = 1_V$.

Пусть RG – категория, состоящая из двух объектов a, v и трех морфизмов $s : a \rightarrow v, t : a \rightarrow v, i : v \rightarrow a$ (кроме тождественных), удовлетворяющих соотношениям $s \circ i = t \circ i = 1_v$. Тогда рефлексивный граф можно рассматривать как функтор $RG \xrightarrow{\rho} \text{Set}$, для которого $\rho(a) = A, \rho(v) = V, \rho(s) = \text{dom}, \rho(t) = \text{cod}, \rho(i) = i$. Морфизмы между рефлексивными графами определяются как естественные преобразования.

Под *свободной системой переходов* будем понимать систему переходов без начальной точки.

Теорема 3.7.1 Категория свободных систем переходов является полной полкатегорией категории стрелок в категории рефлексивных графов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свободной системе переходов $\mathbf{T} = (S, Tran, L)$ поставим в соответствие морфизм рефлексивных графов

$$\begin{array}{ccc} Tran_* & \xrightarrow{\text{color}} & L \cup \{*\} \\ \downarrow \uparrow \downarrow & & \downarrow \uparrow \downarrow \\ S & \longrightarrow & \{*\} \end{array} \quad (3.8)$$

где вертикальные морфизмы составляют рефлексивные графы. Рефлексивный граф $(Tran_*, S, \text{dom}, \text{cod}, i)$ обозначим через \mathbf{T}_* . Морфизму (σ, λ) систем переходов сопоставим диаграмму рефлексивных графов

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}_* & \xrightarrow{\text{color}} & L_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{T}'_* & \xrightarrow{\text{color}'} & L'_* \end{array} \quad (3.9)$$

в категории рефлексивных графов, в которой морфизмы $\mathbf{T}_* \rightarrow L_*$ и $\mathbf{T}'_* \rightarrow L'_*$ определяются отображениями $Tran_* \rightarrow L \cup \{*\}$ и $Tran'_* \rightarrow L' \cup \{*\}$. Морфизм $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'_*$ будет состоять из отображений

$$\begin{array}{ccc} Tran_* & \xrightarrow{\sigma \times \lambda \sigma} & Tran'_* \\ \downarrow \uparrow \downarrow & & \downarrow \uparrow \downarrow \\ S & \xrightarrow{\sigma} & S' \end{array} \quad (3.10)$$

Следствие 3.7.2 *Обратный предел систем переходов $(S_i, (Tran_i)_*, (L_i)_*)$ равен $(\varprojlim_I \{S_i\}, \varprojlim_I \{(Tran_i)_*\}, \varprojlim_I \{(L_i)_*\})$.*

Поскольку категория систем переходов является полной подкатегорией категории стрелок $\mathbf{T}_* \rightarrow L_*$ в категории рефлексивных графов, и предел 1-вершинных графов $(L_i)_*$ является 1-вершинным графом, то доказательство сводится к проверке мономорфности морфизма

$$\varprojlim_i \{(Tran_i)_*\} \rightarrow \varprojlim_I \{(Tran_i)_*\} \rightarrow \varprojlim_I \{S_i\} \times \varprojlim_I \{(L_i)_*\} \times \varprojlim_I \{S_i\}.$$

Глава 4

Сопряженные функторы

4.1 Универсальные стрелки

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – функтор. *Универсальной стрелкой* для $B \in \text{Ob}\mathcal{B}$ называется пара (A, λ) , состоящая из таких объекта $A \in \text{Ob}\mathcal{A}$ и морфизма $\lambda \in \mathcal{B}(B, U(A))$, что для любых объекта $A' \in \text{Ob}\mathcal{A}$ и морфизма $\mu : B \rightarrow U(A')$ существует единственный морфизм $\alpha : A \rightarrow A'$, удовлетворяющий равенству $U(\alpha) \circ \lambda = \mu$. Это свойство изображается с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\lambda} & U(A) & & A \\ \downarrow = & & \downarrow U(\alpha) & \downarrow \exists! \alpha & \\ B & \xrightarrow{\mu} & U(A') & & A' \end{array}$$

Если для каждого $B \in \text{Ob}\mathcal{B}$ существует универсальная стрелка

$$B \xrightarrow{\lambda_B} U(\Lambda B),$$

где Λ – отображение $\text{Ob}\mathcal{B} \rightarrow \text{Ob}\mathcal{A}$, то мы получаем функтор $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, значения которого на морфизмах равны морфизмам f , делающим коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\lambda_B} & U(\Lambda B) & & \Lambda B \\ \downarrow \beta & & \downarrow U(f) & \downarrow \exists! f & \\ B' & \xrightarrow{\lambda_{B'}} & U(\Lambda B') & & \Lambda B' \end{array}$$

Положим $\Lambda(B \rightarrow B') = f$.

ПРИМЕР 4.1.1 Пусть $U : \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$ – забывающий функтор, L – функтор, сопоставляющий каждому множеству E свободную абелеву группу LE , порожденную множеством E и каждому отображению $f : E_1 \rightarrow E_2$ – гомоморфизм Lf , для которого $Lf|_{E_1} = f$. Тогда для произвольного множества E вложение $\eta_E : E \rightarrow U(LE)$ является универсальной стрелкой.

4.2 Свободные категории

Категория называется *свободной*, если она изоморфна категории путей ориентированного графа.

Для произвольного морфизма $\alpha \in \text{Mor } \mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{C}(\alpha)$ категорию, объектами которой являются пары морфизмов $a \xrightarrow{\alpha_0} c_0 \xrightarrow{\beta_0} b$, удовлетворяющих соотношению $\beta_0 \circ \alpha_0 = \alpha$. Морфизмами между $a \xrightarrow{\alpha_0} c_0 \xrightarrow{\beta_0} b$ и $a \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \xrightarrow{\beta_1} b$ служат коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\alpha_0} & c_0 & \xrightarrow{\beta_0} & b \\ \downarrow = & & \downarrow \gamma & & \downarrow = \\ a & \xrightarrow{\alpha_1} & c_1 & \xrightarrow{\beta_1} & b \end{array} \quad (4.1)$$

Теорема 4.2.1 *Категория \mathcal{C} свободна тогда и только тогда, когда она обладает следующими двумя свойствами:*

- (1) *каждый ее морфизм является эпиморфизмом и мономорфизмом;*
- (2) *для каждого ее морфизма α категория $\mathcal{C}(\alpha)$ изоморфна конечному линейно упорядоченному множеству.*

Заметим, что если категории $\mathcal{C}(\alpha)$ – частично упорядоченные множества, то в \mathcal{C} нет изоморфизмов, отличных от тождественных, ибо равенство $\beta \circ \alpha$ повлекло бы существование морфизмов $\gamma : (\alpha, \beta) \circ (1_A, 1_A)$, $\gamma = \beta$, и $\gamma^{-1} : (1_A, 1_A) \rightarrow (\alpha, \beta)$, $\gamma^{-1} = \alpha$, приводящих к равенству $(1_A, 1_A) = (\alpha, \beta)$.

4.3 Сопряженные функторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.1 *Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ – функторы. Функтор L называется левым сопряженным к функтору U , если существует естественная по $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ биекция*

$$\omega_{a,b} : \mathcal{B}(b, Ua) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(Lb, a).$$

Теорема 4.3.1 *Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ – произвольные функторы. Тогда следующие свойства U и L эквивалентны:*

- (1) *Для каждого $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$ существует универсальная стрелка*

$$b \xrightarrow{\lambda_b} U(Lb).$$

- (2) *Функтор L сопряжен слева к U , т. е. существует естественная по a, b биекция*

$$\omega_{a,b} : \mathcal{B}(b, Ua) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(Lb, a).$$

- (3) *Существуют естественные преобразования $\eta : 1_{\mathcal{B}} \rightarrow UL$ и $\varepsilon : LU \rightarrow 1_{\mathcal{A}}$, делающие коммутативными диаграммы:*

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{L*\eta} & LUL & & U & \xrightarrow{\eta*U} & ULU \\ \downarrow = & & \downarrow \varepsilon * L & & \downarrow = & & \downarrow U * \varepsilon \\ L & \xrightarrow{1_L} & L & & U & \xrightarrow{1_U} & U \end{array}$$

где $(L * \eta)_a = L(\eta_a)$, $(\varepsilon * L)_a = \varepsilon_{La}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) \Rightarrow (2). Если для каждого $f : b \rightarrow Ua$ существует $\bar{f} : Lb \rightarrow a$, то определим $f \mapsto \bar{f}$.

(2) \Rightarrow (3). Если морфизмы $\omega_{a,b}$ естественны по a и b , то коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(Lb, Lb) & \xrightarrow{\omega^{-1}} & \mathcal{B}(b, ULb) & 1 & \mapsto & \lambda_b \\ \downarrow \mathcal{A}(1, \alpha) & & \downarrow \mathcal{B}(1, U\alpha) & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(Lb, a) & \xrightarrow{\omega^{-1}} & \mathcal{B}(b, Ua) & \alpha & \mapsto & \omega^{-1} = U(\alpha) \circ \lambda_b \end{array}$$

Возьмем $\eta_b = \omega^{-1}(1_{Lb})$. Аналогично, рассматривая

$$1_{Ua} \in \mathcal{A}(Ua, Ua) \xrightarrow{\omega} \mathcal{A}(LUa, a),$$

положим $\varepsilon_a = \omega(1_{Ua})$.

Используя (3) можно доказать, что $\{\eta_b : b \rightarrow ULb\}$ – универсальная стрелка.

ПРИМЕР 4.3.2 Для любых множеств A, B и C имеют место изоморфизмы $\text{Set}(A \times B, C) \cong \text{Set}(A, C^B)$.

Категория \mathcal{C} называется декартово замкнутой, если для любых $B, C \in \text{Об } \mathcal{C}$ существует объект C^B , определенные с помощью изоморфизмов

$$\mathcal{C}(A \times B, C) \cong \mathcal{C}(A, C^B).$$

Например, категория G -множеств декартово замкнута для любой группы G . Декартово замкнуты категории Grp и Top .

ПРИМЕР 4.3.3 Пусть X и Y – частично упорядоченные множества. Если рассматривать их как категории, то произвольная пара сопряженных функторов $U : X^{\text{op}} \rightarrow Y$ и $L : Y^{\text{op}} \rightarrow X$ будет в точности соответствием Галуа между X и Y .

Теорема 4.3.2 Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – функтор, имеющий левый сопряженный. Тогда для каждой малой категории J и функтора $F : J \rightarrow \mathcal{A}$ существует изоморфизм

$$U(\varprojlim_J F) \cong \varprojlim_J (U \circ F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать тот факт, что если существуют пары сопряженных функторов

$$\mathcal{A} \xleftarrow{\quad} \mathcal{B} \xleftarrow{\quad} \mathcal{C},$$

то композиции сопряжены. Заметим, что левый сопряженный к функтору является единственным с точностью до изоморфизма. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^J & \xleftarrow{L^*} & \mathcal{B}^J \\ \uparrow \Delta_J & & \uparrow \Delta_J \\ \mathcal{A} & \xleftarrow{L} & \mathcal{B} \end{array}$$

где $L_* = L \circ (-)$. В силу свойства универсальности функтор L_* сопряжен слева к $U_* = U \circ (-)$. По определению предела существует изоморфизм $\mathcal{A}^J(\Delta_J A, F) \cong \mathcal{A}(A, \varinjlim_J F)$. Стало быть, Δ_J сопряжен слева к \varinjlim_J . Таким образом, $\varinjlim_J \circ U_* \cong U \circ \varinjlim_J$.

4.4 Теорема Фрейда

Пусть $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – функтор. Докажем, что если U сохраняет пределы, то он имеет левый сопряженный. Мы видели, что существование левого сопряженного связано с универсальной стрелкой. Универсальную стрелку можно определить с помощью комма-категории по Маклейну. Напомним, что для каждого $b \in \text{Ob}\mathcal{B}$ комма-категория b/U – это категория, класс объектов которой состоит из пар $(a \in \text{Ob}\mathcal{A}, \alpha \in \mathcal{B}(b, Ua))$, а морфизмами $(a_1, \alpha_1) \rightarrow (a_2, \alpha_2)$ между такими парами служат морфизмы $f : a_1 \rightarrow a_2$, делающие коммутативными диаграммы

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\alpha_1} & U(a_1) \\ \downarrow = & & \downarrow U(f) \\ b & \xrightarrow{\alpha_2} & U(a_2) \end{array}$$

Обозначим через $Q_b : b/U \rightarrow \mathcal{A}$ забывающий функтор, действующий как $(a, \alpha) \mapsto a$ на объектах, и $f \mapsto f$ – на морфизмах. Ясно, что универсальная стрелка для $b \in \text{Ob}\mathcal{B}$ будет в точности инициальным объектом в комма-категории b/U . По теореме 4.3.1 U имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда для каждого $b \in \mathcal{B}$ категория b/U имеет инициальный объект.

Лемма 4.4.1 (О существовании инициального объекта) Пусть \mathcal{D} – полная категория. Тогда \mathcal{D} имеет инициальный объект, если и только если существуют множество I и семейство $\{k_i\}_{i \in I}$ объектов из \mathcal{D} такие, что для каждого $d \in \mathcal{D}$ найдутся элемент $i \in I$ и морфизм $k_i \rightarrow d$ в категории \mathcal{D} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{k_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию леммы. Тогда произведение $w = \prod_{i \in I} k_i \in \mathcal{D}$ имеет морфизмы $w \rightarrow d$ для всех $d \in \mathcal{D}$, например, заданные как композиции $w = \prod k_i \rightarrow k_i \rightarrow d$, где первые стрелки – проекции произведения. Рассмотрим уравнитель $\varepsilon : v \rightarrow w$ множества всех эндоморфизмов объекта w . Для каждого $d \in \mathcal{D}$ существует равная композиции $v \rightarrow w \rightarrow d$ стрелка $v \rightarrow d$. Пусть были заданы две стрелки $f, g : v \rightarrow d$, возьмем их уравнитель ε_1 , как это показано на диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{\varepsilon_1} & v & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & d \\ \uparrow s & & \downarrow \varepsilon & & \\ w & \xrightarrow{1_w} & w & & \end{array}$$

Тогда $\delta\varepsilon = \varepsilon$ для всех $\delta : w \rightarrow w$. Значит $\varepsilon\varepsilon_1 s\varepsilon = \varepsilon$. Но ε является уравнителем и, значит, мономорфизмом; сокращение на ε слева приводит к равенству

$\varepsilon_1 s \varepsilon = 1_v$. Таким образом, ε_1 является ретракцией. Аналогично ε_1 является мономорфизмом, как уравниватель. Следовательно ε_1 есть изоморфизм и $f = g$. Мы доказали, что v – инициальный объект в \mathcal{D} . Мы видим, что категория \mathcal{D} имеет коинициальное множество, если существуют множество I и семейство $\{k_i\}_{i \in I}$ объектов из \mathcal{D} , такие, что для каждого $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ существует морфизм $k_i \rightarrow d$ для некоторого $i \in I$. Из доказанной леммы легко устанавливается, что имеет место

Теорема 4.4.2 (Фрейд) Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – полные категории, $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – функтор. Тогда U имеет левый сопряженный тогда и только тогда, когда он сохраняет пределы и для каждого $b \in \text{Ob } \mathcal{B}$ категория b/U имеет коинициальное множество.

4.5 Расширения Кана

Пусть $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – функтор между малыми категориями, и \mathcal{A} – произвольная категория. Рассмотрим функтор $(-) \circ S : \mathcal{A}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$, действующий на объектах как $F \mapsto F \circ S$, на морфизмах $\eta \mapsto \eta \star S$. Левый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *левым расширением Кана* и обозначается $\text{Lan}^S : \mathcal{A}^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$. Правый сопряженный к $(-) \circ S$ называется *правым расширением Кана*

ПРИМЕР 4.5.1 Пусть $i : H \subseteq G$ – вложение подгруппы в группу. Для любого H -модуля $M \in \text{Ab}^H$ индуцированный модуль [9]

$$\text{Ind}_H^G M = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

будет изоморфен $\text{Lan}^i M$, а коиндуцированный модуль

$$\text{Coind}_H^G M = \text{Ab}^H(\mathbb{Z}[G], M)$$

изоморфен $\text{Ran}_i M$.

Пусть $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ – объект. Напомним, что S/d обозначает *комма-категорию*. Объектами этой категории являются пары, состоящие из объекта $c \in \mathcal{C}$ и морфизма $\alpha : S(c) \rightarrow d$, а морфизмы $(c, \alpha) \rightarrow (c', \alpha')$ задаются морфизмами $\beta : c \rightarrow c'$, удовлетворяющими соотношению $\alpha' \circ \beta = \alpha$. Таким образом, морфизмами служат коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} S(c) & \xrightarrow{\alpha} & d \\ \downarrow S(\beta) & & \downarrow = \\ S(c') & \xrightarrow{\alpha'} & d \end{array}$$

Обозначим через $Q_d : S/d \rightarrow \mathcal{C}$ забывающий функтор.

Теорема 4.5.1 Пусть \mathcal{A} – категория с копределами. Тогда для каждого $d \in \text{Ob } \mathcal{D}$ существует изоморфизм

$$\text{Lan}^S F(d) \cong \varinjlim^{S/d} F Q_d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функторы

$$S/d \xrightarrow{Q_d} \mathcal{C} \xrightarrow[F]{G \circ S} \mathcal{A}$$

и естественное преобразование $\varphi : F \rightarrow G \circ S$. Для всех $(c, \alpha) \in S/d$ морфизмы $G(\alpha) : G(S(c)) \rightarrow G(d)$ дают коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} GSQ_d(c_1, \alpha_1) & \xrightarrow{G(\alpha_1)} & G(d) \\ \downarrow GSQ_d(\beta) & & \downarrow = \\ GSQ_d(c_2, \alpha_2) & \xrightarrow{G(\alpha_2)} & G(d) \end{array}$$

которые составляют естественное преобразование $GSQ_d \rightarrow \Delta_{S/d}G(d)$. Композиция $FQ_d \rightarrow GSQ_d \rightarrow \Delta_{S/d}G(d)$ определяет морфизм $\varinjlim^{S/d} FQ_d \rightarrow G(d)$. Пусть $\nu_{(c_1, \alpha_1):Sc_1 \rightarrow Sc} : F(c_1) \rightarrow \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc}$ – канонические морфизмы копредела. Положим $(\eta_F)_c : F(c) \rightarrow \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc}$ равным $\nu_{(c, 1_{Sc}):Sc \rightarrow Sc}$. Легко видеть, что коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{(\eta_F)_c} & \varinjlim^{S/Sc} FQ_{Sc} & \varinjlim^{S/d} FQ_d \\ \downarrow = & & \downarrow & \downarrow \\ F(c) & \xrightarrow{\varphi_c} & GS(c) & G(d) \end{array}$$

Отсюда вытекает, что $\{\varinjlim^{S/d} FQ_d\}_{d \in \mathcal{D}}$ сопряжен слева к $(-) \circ S$. \square

Полная подкатегория $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ называется *рефлективной*, если функтор вложения обладает левым сопряженным функтором $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, который называется *рефлектором*. Если в категории \mathcal{B} каждый морфизм $b \rightarrow b'$ разлагается в композицию эпиморфизма $b \rightarrow b''$ и морфизма $b'' \rightarrow b'$, и если в \mathcal{B} фактор-объекты произвольного объекта составляют множество, то для произвольной замкнутой относительно пределов полной подкатегории $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ существует рефлектор $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. В частности, если $\mathcal{B} = \text{Set}^{C^{op}}$, где \mathcal{C} – малая категория, то любая замкнутая относительно пределов полная подкатегория $\mathcal{A} \subseteq \text{Set}^{C^{op}}$ будет рефлективной.

В этом случае \mathcal{A} будет кополной, и копредел для произвольного функтора $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$ будет равен $R(\varinjlim^C F)$, где R – рефлектор, а $\varinjlim^C F$ – копредел в $\text{Set}^{C^{op}}$.

ПРИМЕР 4.5.2 Категория систем переходов будет полной подкатегорией категории Set^{RM}/L_* , где L_* – рефлексивный граф, множество вершин которого состоит из единственного элемента. Свободными системами перехода будут естественные преобразования $\mathbf{T}_* \rightarrow L_*$ такие, что отображения $\text{Tran}_* \rightarrow S \times (L \cup \{*\}) \times S$ инъективны. Существует рефлектор $R : \text{Set}^{RM}/L_* \rightarrow \mathbf{T}_*$. Он будет сопоставлять каждому отображению $X \rightarrow S \times (L \cup \{*\})$ образ этого отображения. Отсюда категория свободных систем переходов обладает копределами.

Литература

- [1] Asperti A., Longo G. *Categories Types as Structures.* – 1990
- [2] Barr M., Wells C. *Category Theory.* – Lecture Notes for ESSLLI. – 1999
- [3] Mac Lane S. *Categories for the working Mathematician.* New York, etc. : Springer-Verlag, 1971 (Graduate Texts in Mathematics).
- [4] Mitchell B. *Rings with several objects.* // Adv. math. 1972. V.8. P.1–161.
- [5] Semadeni Z., Wiweger A. *Einführung in die Theorie der Kategorien und Funktoren.* – Leipzig, 1979
- [6] Schubert H. *Kategorien.* – Berlin, etc. : Springer-Verlag, 1971
- [7] van Oosten J. *Basic Category Theory.* – BRICS Lecture Series, 1995
- [8] Борсук К. *Теория ретрактов.* – М. Мир, 1971.
- [9] Браун К.С. *Когомологии групп.* – М.: Наука, 1987.
- [10] Букур И., Деляну А. *Введение в теорию категорий и функторов.* – М.: Мир, 1972.
- [11] Габриэль П., Цисман М. *Категории частных и теория гомотопий.* – М.: Мир, 1971.
- [12] Общая алгебра / под ред. Скорнякова Л.А. Т.2 (Артамонов В.А., Салий В.Н. и др.) – М.: Наука, 1990.
- [13] Плоткин Б.И. *Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных.* – М.: Наука, 1991.
- [14] Фейс К. *Алгебра: Кольца, модули и категории. Т. 1.* – М.: Мир, 1977.
- [15] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы. Т. 1.* – М. Мир, 1974.