

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ В СИСТЕМЕ GEOGEBRA

Р.А. Зиатдинов

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет
Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

rushanziatdinov@yandex.ru

Введение

Интерактивными геометрическими системами (ИГС) [1] называются программные среды, которые позволяют делать геометрические построения на компьютере таким образом, что при движении исходных объектов фигура сохраняет свою целостность. Geogebra предназначена прежде всего для решения задач школьного курса геометрии: в ней можно создавать всевозможные конструкции из точек, векторов, отрезков, прямых, строить графики элементарных функций, которые также возможно динамически изменять варьированием некоторого параметра, входящего в уравнение, а также строить перпендикулярные и параллельные заданной прямой линии, серединные перпендикуляры, биссектрисы углов, касательные, определять длины отрезков, площади многоугольников и замкнутых кривых и т.д. Кроме того, координаты точек могут быть введены вручную на панели объектов, а уравнения кривых, касательные в строке ввода при помощи соответствующих команд.

Geogebra применяется также для демонстрации теорем. Решенные с ее помощью задачи легко просмотреть с начала в режиме презентации. Созданный файл можно экспортировать как интерактивный чертеж в формат Web-страницы (для ее корректного отображения следует предварительно установить Java Runtime Enviroment).

О возможности применения ИГС Geogebra для решения задач и демонстрации теорем проективной геометрии

Проективная геометрия является достаточно сложным для понимания студентов разделом геометрии. Как показывает опыт, создание видеороликов с решениями задач и демонстрациями доказательств теорем способствует более быстрому и глубокому пониманию предмета и появлению заинтересованности к его изучению. Geogebra как раз представляет такие возможности, а именно, возможность пошагового просмотра решения задачи или доказательства теоремы. Далее в качестве примера приведем решение задачи методов изображений из курса проективной геометрии.

Дано изображение треугольной пирамиды $SA'B'C'$ и три точки сечения ее плоскостью на боковых гранях P , Q , R . Требуется построить сечение, проходящее через эти три точки.

Решение.

Зададим произвольные координаты точек основания и вершины призмы:

$S=(7.52, 8.47)$

$A'=(5.52, 4.94)$

$B'=(7.62, 3.49)$

$C'=(9.44, 5)$

а также координаты точек на боковых гранях:

$P=(6.65, 6.36)$

$Q=(7.92, 5.69)$

$R=(7.1, 6.8)$

Построим пирамиду, соединив точки отрезками:

$a=\text{Segment}[A', B']$

$b=\text{Segment}[B', C']$

$c=\text{Segment}[A', C']$

$d=\text{Segment}[S, A']$

Ребра пирамиды пересекаются в точке S . При проектировании из этой точки образы точек P, Q, R сечения на плоскость проектирования $A'B'C'$ получаются центральным проектированием. Таким образом, получаем образы точек сечения P', Q', R' :

$g=\text{Line}[S, R]$

$h=\text{Line}[S, Q]$

$i=\text{Line}[S, P]$

$P'=\text{Intersect}[a, i]$

$Q'=\text{Intersect}[b, h]$

$R'=\text{Intersect}[c, g]$

Строим треугольники ΔPQR и $\Delta P'Q'R'$. Это дезарговы треугольники, так как прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в точке S :

$l=\text{Segment}[R', Q']$

$j=\text{Segment}[R', P']$

$k=\text{Segment}[Q', P']$

$m=\text{Segment}[R, P]$

$n=\text{Segment}[Q, R]$

$p=\text{Segment}[P, Q]$

Продолжаем пары соответствующих сторон дезарговых треугольников: (RQ) , $(R'Q')$ и (RP) , $(R'P')$ и находим их пересечения:

$V = (RP) \cap (R'P')$, $W = (RQ) \cap (R'Q')$:

$t=\text{Line}[R', Q']$

$s_1=\text{Line}[R, Q]$

$q=\text{Line}[R, P]$

$r=\text{Line}[R', P']$

$V=\text{Intersect}[q, r]$

$W=\text{Intersect}[s_1, t]$

Проводим прямую $s = (VW)$ -- ось перспективы.

Прямая s является прямой пересечения плоскости

основания призмы $(A'B'C')$ и плоскости искомого сечения (ABC) : $s = (ABC) \cap (A'B'C')$:

$s = \text{Line}[V, W]$

Продолжаем сторону основания призмы, например, $(A'B')$ до ее пересечения с осью перспективы s и получаем точку U : $U = (A'C') \cap s$:

$a_1 = \text{Line}[A', B']$

$U = \text{Intersect}[s, a_1]$

Через точку U и точку P на соответствующей грани проводим прямую (UP) , эта прямая лежит одновременно в плоскости сечения и плоскости грани, которой принадлежит заданная точка сечения P :

$b_1 = \text{Line}[P, U]$

Построение остальных прямых сечения можно провести аналогично, либо продолжить построения более простым способом. Через точку $A = (UP) \cap (SA')$ и точку R проводим прямую сечения AR :

$d_1 = \text{Line}[A, C]$

$C = \text{Intersect}[f, c_1]$

далее через точку $C = (AR) \cap (SC')$ и точку Q проводим прямую (CQ) :

$c_1 = \text{Line}[B, Q]$

При правильном построении точки пересечения $B = (SB') \cap (CQ)$ и $B = (SB') \cap (UP)$ должны совпасть.

$B = \text{Intersect}[e, b_1]$

Для наглядности сечение изображается другим цветом (Рис. 1). При изменении координат точек пирамиды целостность чертежа сохраняется, что является весьма ценным инструментом для демонстрации такого рода задач. Это также позволяет моделировать различные нетривиальные случаи, например, параллельность тех плоскостей в которых лежат дезарговы треугольники и т.д. На Рис. 2 показано, как может измениться сечение пирамиды при изменении координат ее вершины.

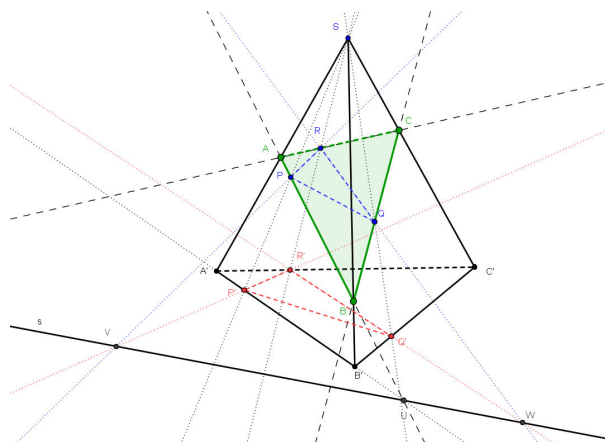


Рис.1. Сечение треугольной пирамиды.

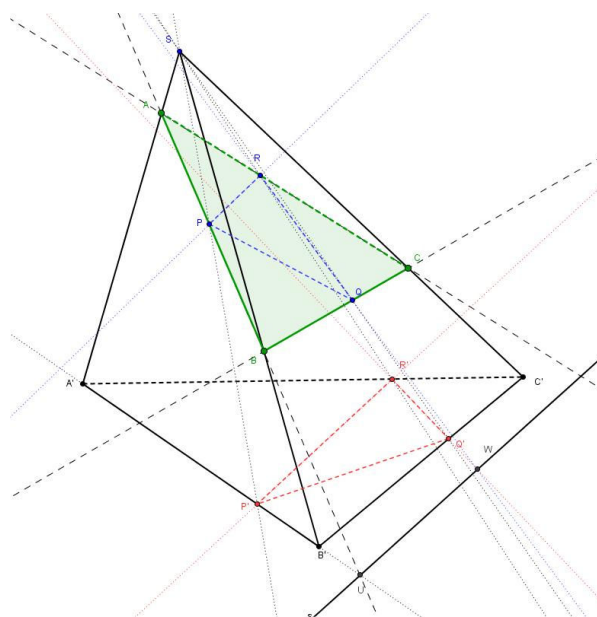


Рис.2. Сечение треугольной пирамиды.

Заключение

Используемая автором настоящей работы система компьютерной геометрии может быть с успехом применена и в других областях геометрии: аналитической и дифференциальной (см. подробности в [3] и [4]).

Литература

1. Х.С.М. Кокстер, *Действительная проективная плоскость*. – М: ГИФМЛ, 1959.
2. Дубровский В.Н. *Типология динамических чертежей*.// XV Международная конференция-выставка «Информационные технологии в образовании» («ИТО-2005»), Москва, 2005.
3. Р. А. Зиятдинов. *О возможностях использования интерактивной геометрической среды Geogebra 3.0 в учебном процессе*.//Материалы 10-й Международной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП),СмолГУ, г.Смоленск, 2009, С. 39-40.
4. В. В. Пилюгин, Л. Н. Сумароков, «Геометрическое моделирование», Матем. моделирование, **6**:5 (1994), 21–36.
5. Ю.Г. Игнатъев, *Проективная геометрия и методы изображений*. Курс лекций, Казань, 2005.
6. *Сборник задач по геометрии*. Под ред. В.Т. Базылева, - М: Просвещение, 1980.
7. Rushan Ziatdinov, Tolga Kabaca, *Differential geometry with Geogebra*,// 3rd International Conference on “Innovations in Learning for the Future 2010: e-Learning” (First Eurasia Meeting of GeoGebra (EMG)), May 11-13, 2010, Istanbul, Turkey (в печати).