

ТАТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЗИАТДИНОВ РУШАН АНУРОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ
СВЕРХТЕПЛОВЫХ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ
ЧАСТИЦ ПРИ НАЛИЧИИ СКЕЙЛИНГА В
ПРИБЛИЖЕНИИ ФОККЕРА-ПЛАНКА**

05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.Г.Игнатъев

Казань - 2008

Оглавление

Введение	5
Глава I. Релятивистские кинетические модели космологического расширения плазмы	8
I.1 Общерелятивистские кинетические уравнения	8
I.2 Релятивистские уравнения переноса динамических величин и законы сохранения	11
I.3 Кинематика столкновений для четырехчастичных реакций	13
I.4 Условия локального и глобального термодинамичес- кого равновесия	15
I.5 Асимптотическая конформная инвариантность кинетической теории	18
I.6 Асимптотические ограничения на S -матрицу и скей- линг взаимодействий	20
I.7 Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц .	22
I.8 Кинетика космологического расширения плазмы в условиях ЛТР	24
Глава II. Дифференциальные уравнения типа Фоккера- Планка для сверхтепловых частиц	27
II.1 Уравнение Фоккера-Планка для классической плазмы . . .	27
II.2 Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц	30

Оглавление

II.3	Вывод интеграла столкновений в форме Фоккера-Планка .	31
II.4	Релятивистское кинетическое уравнение типа Фоккера-Планка	34
II.5	Модель на основе интегрального уравнения Фоккера-Планка	36
II.6	Модель на основе дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка	40
II.7	Численная модель высокоэнергетического хвоста распределения	45
Глава III.	Интегральное уравнение типа Фоккера-Планка для малых времен эволюции	50
III.1	Численная модель начального распределения	50
III.2	Законы сохранения для релятивистского уравнения типа Фоккера-Планка	54
III.3	Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ . . .	56
III.3.1	Общее решение в виде ряда	56
III.3.2	Первое приближение функции распределения	59
III.3.3	Второе приближение функции распределения	63
Глава IV.	Асимптотическое приближение интегрального уравнения типа Фоккера-Планка	68
IV.1	Функция распределения нулевого приближения	68
IV.2	Функция распределения первого приближения	72
	Заключение	76
	Список литературы	79
	Приложение А. Библиотека численных процедур	94
A.1	Контролируемая процедура вычисления определенного интеграла	94

A.2	Контролируемая процедура нахождения максимума функции распределения	95
A.3	Контролируемая процедура аппроксимации функции на заданном промежутке	97
A.4	Исследование решения дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка	98
A.5	Исследование решения интегрального уравнения Фоккера-Планка для малых времен	100
A.6	Исследование асимптотического решения интегрального уравнения типа Фоккера-Планка	104

Введение

В последние годы в связи с существенным качественным прорывом в области внегалактической астрономии, расширением и уточнением наблюдательных данных в области космологии и обнаружением целого ряда противоречий предсказаний теоретических моделей эволюции вселенной с данными наблюдений происходит ревизия основных положений стандартных космологических моделей. Этот процесс затрагивает также и существующие теоретические модели фундаментальных полей, элементарных частиц и их взаимодействий при сверхвысоких энергиях и теоретические модели ряда фундаментальных процессов, протекавших на самых ранних стадиях эволюции вселенной. Одним из таких фундаментальных космологических процессов, оказывающим принципиально важное влияние на всю физику космологического расширения плазмы, образование реликтовых частиц и современную пространственную структуру вселенной, является процесс установления локального термодинамического равновесия в расширяющейся космологической плазме. Существующие стандартные космологические сценарии построены на основе горячей модели вселенной, предложенной Георгием Гамовым в 40-х годах XX-го столетия. Основным положением горячей модели вселенной, равно как и основанных на ней стандартных космологических сценариев, является предположение о существовании локального термодинамического равновесия (ЛТР) в космологической плазме на ранних этапах расширения и нарушении ЛТР на поздних стадиях. Указанное предположение обосновывалось Г. Гамовым и другими исследователями на основе существующих в те годы экспериментальных данных

о сечениях взаимодействий известных на тот период элементарных частиц в области низких энергий.

В 80-е годы в связи с развитием релятивистской кинетической модели вселенной Ю.Г. Игнатьевым на основе принципа конформной инвариантности теории поля была доказана асимптотическая конформная инвариантность кинетической теории в ультрарелятивистском пределе и выполнен ряд работ по исследованию кинетики процесса космологического расширения плазмы с учетом кулоновских столкновений заряженных частиц и комптоновского рассеяния фотонов на электронах [1], [2], [3], [4], [8]. На основе этих исследований в дальнейшем была развита кинетическая теория бариогенезиса в космологической плазме [5], [6], [7], [12].

В дальнейшем на основе результатов аксиоматической теории S - матрицы относительно поведения сечений взаимодействий частиц при сверхвысоких энергиях был проведен детальный анализ процесса установления ЛТР в космологической плазме. Было показано, что при восстановлении конформной инвариантности взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий, т.е., при восстановлении *скейлинга* взаимодействий, когда инвариантное сечение взаимодействия элементарных частиц становится обратно пропорциональным первому кинематическому инварианту $s = (p_1, p_2)^2 \sim E^2$ (p_i - импульсы сталкивающихся частиц, E - их кинетическая энергия в системе центра масс):

$$\sigma_{tot} \sim \frac{\text{Const}}{s} \sim \frac{\text{Const}}{E}, \quad (1)$$

ЛТР должно нарушаться на ранних стадиях космологического расширения и, наоборот, восстанавливаться на поздних [10].¹ В предположении изначального нарушения ЛТР на основе релятивистской кинетической теории были предложены модели космологической эволюции сверхтепловых частиц и высказана гипотеза о возможной связи сверхтепловой компоненты плазмы с космическими лучами. В частности, в предположении мало-

¹При этом на очень поздних стадиях эволюции вселенной ЛТР снова может быть нарушено.

сти передаваемого при столкновениях частиц импульса и асимптотического скейлингового поведения полного сечения взаимодействия:

$$\sigma_0 = \frac{2\pi}{s \ln^2 s/4} \quad (2)$$

релятивистское кинетическое уравнение для бинарных столкновений было сведено к интегро-дифференциальному кинетическому уравнению типа Ландау-Фоккера-Планка [13], [14], на основе которого были сделаны некоторые оценки поведения спектра сверхтепловых частиц. Была также рассмотрена упрощенная модель, основанная на замене полученного интегро-дифференциального уравнения уравнением теплопроводности. Однако, в 80-е годы идея неравновесного космологического сценария оказалась невос требованной. С одной стороны, это было вызвано триумфальным, как тогда казалось, шествием теорий так называемого великого объединения фундаментальных взаимодействий и появлением множества сопутствующим им космологических сценариев. С другой стороны, сама неравновесная модель вселенной не была достаточно разработана, как с математической стороны, в частности, не были четко сформулированы начальные и граничные условия, а также не были развиты методы ее исследования, что было связано, в первую очередь, с отсутствием в те годы соответствующей и доступной вычислительной техники и программного обеспечения, которые были необходимы для проведения численного моделирования. В настоящее время в связи с указанными трудностями стандартных космологических сценариев и ревизией космологических моделей исследование неравновесных моделей вселенной представляет значительный интерес для космологии. С другой стороны в настоящее время имеются все возможности построения численных компьютерных моделей в широком диапазоне значений их параметров.

Таким образом, построение математической модели космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц и численное моделирование этого процесса является актуальной проблемой, как для релятивистской космологии, так и математического моделирования.

Глава I

Релятивистские кинетические модели космологического расширения плазмы

I.1 Общерелятивистские кинетические уравнения

Движение частицы в гравитационном поле всегда квазиклассично, если ее комптоновская длина гораздо меньше радиуса кривизны K^{-1} :

$$\lambda_k = E^{-1} \ll K^{-1}. \quad (\text{I.1})$$

Тем не менее и в таких системах частиц могут быть существенны квантовостатистические явления, связанные со свойствами симметрии волновой функции тождественных частиц. Поэтому такие системы удобнее описывать не функцией распределения, а *средними локальными числами заполнения квантовых состояний*, $n(x, P)$, связь которых с функцией распределения дается соотношением (см., например, [15]):

$$f(x, P) = \frac{\rho}{(2\pi)^3} n(x, P), \quad (\text{I.2})$$

где ρ - кратность вырождения.

Процессы взаимодействия частиц a_1, \dots, a_m , в результате которых образуются и уничтожаются частицы $a'_1, \dots, a'_{m'}$, можно записать в виде символических формул:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \longrightarrow \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (\text{I.3})$$

I.1. Общерелятивистские кинетические уравнения

$$\sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B \longrightarrow \sum_{A=1}^m \nu_A a_A, \quad (I.4)$$

где ν_A - числа частиц сорта a_A , участвующих в реакции; A - номер частицы. Если суммы в обеих частях (I.3) совпадают, взаимодействия называются *упругими*, в противном случае — *неупругими*. Взаимодействия (I.3) полагаются точечными, происходящими в точке $x \in X_4$. Применительно к внешнему гравитационному полю точечность взаимодействий подразумевает кроме (I.1) малость эффективного радиуса взаимодействия, $r_{eff} = \sqrt{\sigma}$ (σ - эффективное сечение рассеяния):

$$r_{eff} \ll vK^{-1}, \quad (I.5)$$

где v - скорость частицы в системе центра масс (I.3). При выполнении (I.5) столкновения точечны не только в трехмерном смысле, но и мгновенны, т.е., четырехмерно точечны. Вследствие четырехмерной точечности взаимодействий на них распространяется принцип локального соответствия, поэтому в точке столкновения $\{x\}$ выполняется закон сохранения обобщенного 4 - импульса:

$$P_I^k = P_F^k, \quad (I.6)$$

где P_I^k - суммарный обобщенный импульс начального состояния, P_F^k - конечного.

В работах [44], [46] были сформулированы общерелятивистские кинетические уравнения для плазмы с неупругими взаимодействиями (I.3), (I.4) с учетом квантовой статистики элементарных частиц относительно инвариантных чисел заполнения, (I.2), которые в дальнейшем для краткости и будем называть функциями распределения частиц:

$$[\mathcal{H}_a, n_a] = I_a(x, P_a); \quad (a = \overline{1, m + m'}), \quad (I.7)$$

В этих уравнениях

$$[\mathcal{H}, n] = \tilde{\nabla}_i F \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} - \tilde{\nabla}_i \mathcal{H} \frac{\partial F}{\partial P_i}, \quad (\text{I.8})$$

- ковариантная запись релятивистской скобки Пуассона,

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ik}^j p^k \frac{\partial}{\partial p^i}, \quad (\text{I.9})$$

- производная Картана, ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования по Риччи:

$$\nabla_i A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} + \Gamma_{il}^k A^l, \quad (\text{I.10})$$

инвариантная функция Гамильтона:

$$\mathcal{H}(x, P) = \frac{1}{2} g_{ik} (P^i - eA^i)(P^k - eA^k), \quad (\text{I.11})$$

где P^i, P^k - обобщенные импульсы,

$$I_a(x, P_a) \stackrel{def}{=} - \sum \nu_a \int_a' \delta^{(4)}(P_F - P_I) (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod'_{i,f} d\pi, \quad (\text{I.12})$$

- интеграл столкновений частиц сорта “a” с частицами сорта “b” в каналах реакций (I.3), (I.4), в котором

$$Z_{if} \stackrel{def}{=} \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} n_A(x, P_A^\alpha) \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} [1 \pm n_B(x, P_B'^\beta)] = \prod n_I \prod (1 \pm n_F); \quad (\text{I.13})$$

$$Z_{fi} \stackrel{def}{=} \prod_{A=1}^m \prod_{\alpha=1}^{\nu_A} [1 \pm n_A(x, P_A^\alpha)] \prod_{B=1}^{m'} \prod_{\beta=1}^{\nu'_B} n_B(x, P_B'^\beta), \quad (\text{I.14})$$

-статистические факторы, $d\pi$ - инвариантный элемент импульсного пространства:

$$d\pi = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{-g} d^3 p / p^4, \quad (\text{I.15})$$

а $\prod'_{i,f} d\pi$ означает произведение импульсных объемов всех частиц кроме “a”-той,

$$W_{IF} = (2\pi)^4 |M_{IF}|^2 2^{\sum \nu_A + \sum \nu'_B}, \quad (\text{I.16})$$

I.2. Релятивистские уравнения переноса динамических величин и законы сохранения

- фазовые плотности вероятностей переходов, M_{IF} – инвариантные нормированные амплитуды рассеяния, I – начальное, F – конечное состояния.

С математической точки зрения общерелятивистские кинетические уравнения представляют систему $N = m + m'$ нелинейных интегро - дифференциальных уравнений относительно N функций распределения частиц $f_a(x, P_a)$.

Классические общерелятивистские кинетические уравнения ($n_a \ll 1$) для упругих парных T - инвариантных столкновений сформулированы в работах [22], [23], [24], для упругих парных T - неинвариантных столкновений - в [59]. Для упругих парных T - инвариантных столкновений при произвольных числах заполнения общерелятивистские кинетические уравнения были получены в [60] путем ковариантного обобщения классического кинетического уравнения Улинга - Уленбека (см., например, [61]).

I.2 Релятивистские уравнения переноса динамических величин и законы сохранения в релятивистской кинетической модели

В [46] были введены инвариантные определения макроскопических средних динамических величин. Пусть $\psi(x, P)^1$ - некоторая скалярная функция динамических переменных. Приток частиц в область G_a описывается соотношением общей формулой скорости изменения динамического среднего [46]:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP [\mathcal{H}, \psi F] . \quad (I.17)$$

или в более удобной форме:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \int_V dV \nabla_i \int_{P(X)} dP \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \psi F . \quad (I.18)$$

¹Для краткости здесь опущены индексы сорта частиц

С учетом линейности скобки Пуассона (I.8), (I.17) записывается в более удобном виде:

$$\frac{d\Psi_{V'}}{d\tau} = \int_{V'} dV \int_{P(V')} dP \{ \psi [\mathcal{H}, F] + F [\mathcal{H}, \Psi] \} .$$

Таким образом определяются макроскопические потоки:

$$n^i(x) = \int_{P(x)} f(x, P) p^i dP , \quad (I.19)$$

- вектор плотности числа частиц и

$$T^{ik}(x) = \int_{P(x)} f(x, P) p^i p^k dP , \quad (I.20)$$

- тензор энергии-импульса (ТЭИ) частиц.

В работе [46] получены уравнения переноса динамических величин, которые в интересующем нас случае отсутствия макроскопических скалярных и векторных полей принимают вид:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_a \int_{P(X)} \psi_a F_a \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial P_i} d\pi_a - \sum_a \int_{P(X)} F_a [\mathcal{H}_a, \psi_a] d\pi_a = \\ & - \sum_{\text{по каналам}} \sum_a \int \delta^{(4)}(P_F - P_I) \left(\sum_{A=1}^m \nu_A \psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \psi'_B \right) \times \\ & (Z_{if} W_{if} - Z_{fi} W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi . \end{aligned} \quad (I.21)$$

В частности, при

$$\psi_A(x, P) = e_A = \text{Const} , \quad (I.22)$$

где e_A - некоторые числа (электрические, барионные, электрослабые заряды и т.п.), причем для k -той реакции (I.3):

$$\sum \nu_A^k e_A - \sum \nu'_B{}^k e'_B = \Delta e^k , \quad (I.23)$$

1.3. Кинематика столкновений для четырехчастичных реакций

уравнения переноса (I.21) дают макроскопические законы сохранения обобщенных токов, сохраняющихся в каналах реакций (I.3), (I.4), обобщенных зарядов G_s , суммарного импульса и полного тензора энергии-импульса соответственно:

$$\nabla_i J_s^i = 0; \quad (s = 1, 2, \dots, N - r); \quad (\text{I.24})$$

$$\frac{dG_s}{d\tau} = 0; \quad (\text{I.25})$$

$$\sum \nu P_A^i - \sum \nu'_B P_B^i \equiv P_I^i - P_F^i = 0; \quad (\text{I.26})$$

$$T_{,k}^{ik} = 0. \quad (\text{I.27})$$

В формулах (I.24), (I.25)

$$J_s^i(x) = \sum_A g_A^s \int_{P(X)} \frac{\partial \mathcal{H}_A}{\partial P_i} dP_A = \sum_A g_A^s \int_{P(X)} p^i dP_A; \quad (\text{I.28})$$

$$G_s = \int_V dV_i J_s^i(x). \quad (\text{I.29})$$

1.3 Кинематика столкновений для четырехчастичных реакций

Известно, что для стабильных частиц наибольший вклад в интеграл столкновений дают четырехчастичные реакции (см., например, [77]):

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (\text{I.30})$$

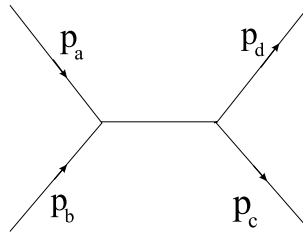


Рис. 1. Диаграмма четырехчастичных реакций.

которые полностью описываются двумя кинематическими инвариантами, s и t , имеющими следующий смысл: \sqrt{s} - энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ):

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2, \quad (\text{I.31})$$

а t -релятивистский квадрат переданного импульса:

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2, \quad (\text{I.32})$$

где квадраты импульсов понимаются как скалярные четырехмерные релятивистские квадраты:

$$p_a^2 = (p_a, p_a) = (p^4)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m_a^2,$$

и т.д. Так, например:

$$(p_a + p_b)^2 = p_a^2 + 2(p_a p_b) + p_b^2 = m_a^2 + 2(p_a, p_b) + m_b^2.$$

При этом инвариантные амплитуды рассеяния $F(s, t)$, определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц, c и d , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов (см., например, [75]). С помощью инвариантной амплитуды $F(s, t)$ определяется полное сечение реакции (I.30) (см. [75]):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi^2 \lambda^2(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^0 dt |F(s, t)|^2, \quad (\text{I.33})$$

где λ - функция треугольника:

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc;$$

$$t_{min} = -\frac{\lambda^2}{s}.$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty; \quad \frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty, \quad (\text{I.34})$$

I.4. Условия локального и глобального термодинамического равновесия

$\lambda \rightarrow s$, и формула (I.33) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s}; \quad (\text{I.35})$$

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (\text{I.36})$$

Таким образом, в ультррелятивистском пределе (I.34) полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта s :

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s). \quad (\text{I.37})$$

Именно эта зависимость будет управлять установлением ЛТР в ранней вселенной.

I.4 Условия локального и глобального термодинамического равновесия

Локальное термодинамическое равновесие и общерелятивистские уравнения гидродинамики идеальной плазмы

В условиях термодинамического равновесия

$$\frac{dS}{d\tau} = 0, \quad (\text{I.38})$$

где

$$S = \sum S_a; \quad (\text{I.39})$$

$$S_a(\tau) = \int \partial X \partial \pi_a \delta[s_a - s_a^*(\tau)] \{ \pm(1 \pm n_a) \ln(1 \pm n_a) - n_a \ln n_a \}. \quad (\text{I.40})$$

Для T -инвариантных взаимодействий равенство (I.39) может реализоваться лишь при выполнении соотношений

$$Z_{if} - Z_{fi} = 0. \quad (\text{I.41})$$

в каждом канале реакций (I.3), (I.4). Уравнения (I.41) являются аналогом функциональных уравнений Больцмана [26], решением которых являются локально равновесные функции распределения:

$$f_a^0(x, P_A) = \left\{ e^{-\lambda_A + (\xi, P_A)} \mp 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{I.42})$$

где верхний знак соответствует бозонам, нижний-фермионам.

Для сходимости моментов от распределения (I.42) необходима времениподобность вектора $\xi^i(x)$:

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0. \quad (\text{I.43})$$

С помощью ξ^i , λ_a вводится времениподобное единичное поле v^i :

$$v^i = \frac{\xi^i}{\xi}; \quad (v, v) = 1, \quad (\text{I.44})$$

где v - времениподобный вектор макроскопической скорости плазмы, локальная температура $\theta(x)$ [26]:

$$\theta(x) = \xi^{-1} \quad (\text{I.45})$$

и химические потенциалы в обычной нормировке:

$$\mu_a(x) = \theta(x)\lambda_a(x). \quad (\text{I.46})$$

В этих переменных распределение (I.42) может быть записано в виде

$$f_a^0(x, P_A) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_A + (v, P_A)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}. \quad (\text{I.47})$$

Для Т-неинвариантных взаимодействий локально равновесные функции распределения (I.47) тождественно удовлетворяют модифицированные функциональные уравнения Больцмана (I.41), поэтому в силу этого сохраняется энтропия (I.39), определяемая согласно [15] выражением (I.40), таким образом соотношение (I.41) всегда имеет место, если распределение частиц является локально равновесным. С учетом унитарности S -матрицы, в условиях ЛТР имеет место закон сохранения каждого сорта частиц [76]:

$$\nabla_i n_a^i = 0 \Rightarrow \frac{dN_a}{d\tau} = 0. \quad (\text{I.48})$$

I.4. Условия локального и глобального термодинамического равновесия

где N_a -равновесный интервал от числа частиц, τ -эффективное время взаимодействия рассматриваемых частиц. Следует отметить, что соотношение (I.48) в условиях ЛТР выполняется лишь приближенно.

Глобальное термодинамическое равновесие

В случае, когда локально-равновесные функции распределения (I.47) являются точными решениями кинетических уравнений (I.7), статистическая система находится в глобальном термодинамическом равновесии (ГТР). В условиях ГТР выполняются строгие законы сохранения числа частиц каждого сорта (I.48), и энтропия системы строго постоянна. Для нахождения условий ГТР, решения (I.47) подставляются в кинетические уравнения (I.7). Поскольку интеграл Т-инвариантных взаимодействий обращается в нуль на локально равновесных распределениях, (I.7) приводится к виду:

$$[\mathcal{H}_a, \varphi_a] = 0, \quad (I.49)$$

где \mathcal{H}_a - гамильтониан, $\varphi_a(x, P) = (\xi, P_a) - \lambda_a(x)$, $\lambda_a(x)$ - инвариантный приведенный химический потенциал. Таким образом, для обеспечения ГТР должен существовать линейный по импульсной переменной интеграл движения, причем $\xi^i(x)$ - времениподобный вектор. В [46], [49], [80] получены необходимые и достаточные условия существования ГТР, которые для системы безмассовых частиц $m_a \equiv 0$ имеют вид:

$$\mathbb{L}_\xi \sigma g_{ik} = 0. \quad (I.50)$$

где σ -некоторая скалярная функция, \mathbb{L}_ξ - производная Ли от объекта u^α вдоль направления ξ (см., например, [64]):

$$\mathbb{L}_\xi u^\alpha = \xi^\sigma \partial_\sigma u^\alpha - u^\sigma \partial_\sigma \xi^\alpha. \quad (I.51)$$

Если в равновесии находится хотя бы один сорт массивных частиц, необходимые и достаточные условия равновесия (I.50) становятся более жесткими

[46]:

$$\mathbb{L}_\xi g_{ik} = 0; \quad (m_a \neq 0). \quad (I.52)$$

Выполняются и макроскопические законы сохранения [46]:

$$\mathbb{L}_\xi n_a^i = 0; \quad \mathbb{L}_\xi j^i = 0; \quad \mathbb{L}_\xi T_a^{ik} = 0. \quad (I.53)$$

Поскольку вектор ξ^i является времениподобным и в то же время - вектором Киллинга, статистическая система, содержащая массивные частицы, может находиться в состоянии глобального термодинамического равновесия лишь при условии стационарности гравитационного поля.

I.5 Асимптотическая конформная инвариантность кинетической теории в ультрарелятивистском пределе

Возможность поддержания глобального термодинамического равновесия в ультрарелятивистской расширяющейся плазме тесно связана с асимптотической конформной инвариантностью кинетической теории в ультрарелятивистском пределе [2].

В [2] найдены трансформационные свойства скобок Пуассона (I.8) по отношению к конформным преобразованиям метрического пространства V_4 . Рассмотрим согласно [2] наряду с римановым пространством V_4 в общей координаты $\{x^i\}$ конформно ему соответствующее риманово пространство \bar{V}_4 :

$$d\bar{s}^2 = a^2 ds^2. \quad (I.54)$$

В [2] изучены трансформационные свойства кинетических уравнений при наличии произвольных макроскопических скалярных и векторных полей. Однако, для наших приложений достаточно рассмотреть вопрос о преобразовании кинетических уравнений в отсутствии макроскопических по-

лей. Если скалярное и векторное поля отсутствуют, то в ультрарелятивистском пределе получаются следующие соотношения [2]:

$$g^{ik}P_iP_k = 0; \quad (I.55)$$

$$\bar{\mathcal{H}}(x, \bar{P}) = a^{-2}\mathcal{H}(x, P) = (2a^2)^{-1}g^{ik}P_iP_k; \quad (I.56)$$

$$[\bar{\mathcal{H}}, \bar{\psi}] = a^{-2}[\mathcal{H}, \psi] + O^2(am). \quad (I.57)$$

Согласно (I.57) бесстолкновительные кинетические уравнения в ультрарелятивистском пределе инвариантны относительно преобразований (I.54), как в случае сильных, так и слабых скалярных полей [2]. Таким образом, если $f(x, P)$ – решение бесстолкновительного кинетического уравнения в V_4 , то асимптотическим решением этого уравнения в конформно соответствующем \bar{V}_4 будет $\bar{f}(x, P) = f(x, \bar{P}) + O^2(am)$ [2]. При этом законы трансформации моментов функции распределения в ультрарелятивистском пределе принимают вид [2]:

$$\bar{T}_p^{ik} = a^{-6}T_p^{ik} + O^2(am);$$

$$\bar{n}^i = a^{-4}n^i + O^2(am). \quad (I.58)$$

В предположении масштабной инвариантности инвариантных амплитуд рассеяния в ультрарелятивистском пределе интеграл столкновений в правой части кинетических уравнений (I.7) преобразуется по асимптотическому закону [2]:

$$\bar{I}_{ab\leftrightarrow cd}(\bar{P}_a) = a^{-2}I_{ab\leftrightarrow cd}(P_a), \quad (I.59)$$

поэтому в ультрарелятивистском пределе кинетическое уравнение с интегралом столкновений конформно инвариантно.

I.6 Асимптотические ограничения на S -матрицу и скейлинг взаимодействий

В 60-70е годы рядом авторов на основе аксиоматической теории S -матрицы были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (\text{I.60})$$

где C_1, C_2 - неизвестные константы. Верхний предел (I.60) был установлен в работах [91]-[93], нижний - в [94], [95] (см. также обзор в книге [84]). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния (см., например, [84]):

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (\text{I.61})$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (I.34) должны быть функциями лишь переменной $x = -t/s$ [10], т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (\text{I.62})$$

С учетом (I.62) и (I.36) в [10] была получена асимптотическая формула:

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s}, \quad (\text{I.63})$$

полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., восстанавливается масштабная инвариантность взаимодействий, или, кратко говоря, скейлинг взаимодействий [102].

Скейлинговая асимптотика сечения (I.63) лежит строго посередине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (I.60). С другой стороны скейлинговая асимптотика получается в предположении масштабной инвариантности инвариантных амплитуд рассеяния, т.е., конформной инвариантности полевых уравнений в ультрарелятивистском (ВКБ) приближении.

I.6. Асимптотические ограничения на S -матрицу и скейлинг взаимодействий

Анализ ограничений на поведение сечений взаимодействий, полученных как на основе аксиоматической теории S -матрицы, так и на основе результатов экспериментов в области сверхвысоких энергий, проведенный Ю.Г.Игнатьевым в работах [10], [13], [85], привел к концепции *универсального асимптотического сечения рассеяния*, УАС, сформированного лишь из трех фундаментальных констант и правильно описывающего асимптотическое сечение рассеяния частиц в ультрарелятивистском пределе в огромном диапазоне энергий взаимодействующих частиц - от сотен КэВ до 10^{19} ГэВ:

$$\sigma_0(s) = \frac{2\pi}{s \left(1 + \ln^2 \frac{s}{s_0}\right)} = \frac{2\pi}{s\Lambda(s)}, \quad (I.64)$$

где $s_0 = 4$ - релятивистский квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс,²

$$\Lambda(s) = 1 + \ln^2 \frac{s}{s_0} \approx \text{Const}, \quad (I.65)$$

- логарифмический фактор.

Введенное формулой (I.64), сечение рассеяния σ_0 , УАС, обладает рядом замечательных свойств:

1. УАС образовано лишь из фундаментальных констант G, \hbar, c ;
2. УАС ведет себя так, что его значения лежат строго посередине между возможными крайними пределами асимптотического поведения сечения (I.60), установленных с помощью асимптотической теории S -матрицы;
3. УАС с логарифмической точностью является скейлинговым сечением рассеяния;
4. Для реакции рассеяния фотона на нерелятивистском электроны ($s = m_e^2$) формула (I.64) дает $\sigma_0 = 4/3\sigma_T \sim \sigma_T$;

²В обычном случае $s_0 = 4m_{pl}^2$

5. Для электрослабых взаимодействий ($s = m_W^2$, где m_w - масса промежуточного W -бозона) при $\sin \theta_W = 0,22$ (см., например, [86]) получим из (I.64) $\sigma_0 = 0,78\sigma_W$, где $\sigma_W = G_F^2 m_W^2 / \pi$ - сечение νe - рассеяния с учетом промежуточного W -бозона;
6. При планковских значениях энергии $\sigma_0(m_{pl}^2) \approx \sigma_{pl}$.

Поскольку в дальнейшем мы будем исследовать кинетику реакций лишь в области сверхвысоких энергий, в которой все взаимодействия описываются, как мы предполагаем, УАС, можно не делать никакого различия между частицами в интегралах взаимодействий, учитывая лишь там, где это необходимо, их спин и другие характеристики. В этом смысле при сверхвысоких энергиях все взаимодействия унифицируются и четырехчастичные взаимодействия эффективно описываются как упругие, что значительно облегчает исследование таких процессов.

I.7 Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

В тех случаях, когда длина свободного пробега частиц l , гораздо больше характерного масштаба L_0 статистической системы или время свободного пробега частиц τ гораздо больше характерного временного масштаба T_0 эволюции системы, интегралом столкновений в правой части кинетического уравнения (I.7) можно пренебречь и описывать движение частиц бесстолкновительным кинетическим уравнением [27]:

$$[\mathcal{H}, f] = 0. \quad (\text{I.66})$$

В метрике однородной изотропной космологической модели

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2 - b^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (\text{I.67})$$

I.7. Космологическая эволюция бесстолкновительных частиц

где $b = \text{sh } \chi$ - для открытой, $b = \sin x$ - для закрытой и $b = \chi$ для пространственно-плоской космологической модели, однородное и изотропное распределение $f(a, P)$ имеет вид [67]:

$$f_a(x, P) = f_a(\eta, P_4). \quad (\text{I.68})$$

При этом решением бесстолкновительного кинетического уравнения (I.66) являются локально-равновесные функции $f(a, P)$, в момент времени η_0 принимающие вид [1], [8], [9], [32]:

$$f^0(P, \eta) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + a^2 P^2 / a_0^2}}{T_0} \right] \pm 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{I.69})$$

где μ_0, T_0 - постоянные, $a_0 = a(\eta_0)$. Для безмассовых частиц $m \rightarrow 0$ и $aP = P_4$, т.е. распределение (I.69) совпадает с равновесным во все времена. В ультрарелятивистском и в нерелятивистском пределе решение бесстолкновительного кинетического уравнения (I.69) совпадает с равновесным во все времена, однако, законы эволюции локальной температуры T_0 различны и определяются соответственно:

$$T = T_0 \frac{a_0}{a(\eta)}; \quad T' = T_0 \left(\frac{a_0}{a(\eta)} \right)^2. \quad (\text{I.70})$$

В [8], [9], [35] исследуется космологическая эволюция моментов распределения (I.69). Согласно [32], [81] определяются макроскопические скаляры

$$N_a(x) = \int_P (u, p) f_a(x, p) d\pi_a; \quad (\text{I.71})$$

$$\varepsilon_a(x) = \int_P (u, p) [(u, p) - m_a] f_a(x, p) d\pi_a; \quad (\text{I.72})$$

- плотность числа частиц и плотность средней кинетической энергии, регистрируемых наблюдателем, движущимся со скоростью $u^i(x)$, а с помощью (I.71) и (I.72) - средняя кинетическая энергия частицы

$$\langle E_a \rangle = \varepsilon_a(x) / N_a(x). \quad (\text{I.73})$$

В синхронной системе отсчета, в которой определена метрика (I.67), и которая одновременно является и сопутствующей для бесстолкновительной плазмы,-

$$u^i = a^{-1}\delta_4^i, \quad (\text{I.74})$$

после интегрирования по угловым переменным и перехода к конформному импульсу:

$$\mathcal{P} = aP/a_0, \quad (\text{I.75})$$

для скаляров $N_a(x)$ и $\varepsilon_a(x)$ получены выражения [16]:

$$N = \frac{(2s+1)a_0^3}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^\infty \frac{\mathcal{P}^2 d\mathcal{P}}{\exp\left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + \mathcal{P}^2}}{T_0}\right] \pm 1}, \quad (\text{I.76})$$

$$\varepsilon = \frac{(2s+1)a_0^3}{2\pi^2 a^3(\eta)} \int_0^\infty \frac{(\sqrt{m^2 + a_0^2 \mathcal{P}^2 / a^2} - m) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P}}{\exp\left[\frac{-\mu_0 + \sqrt{m^2 + \mathcal{P}^2}}{T_0}\right] \pm 1}, \quad (\text{I.77})$$

Таким образом плотность числа частиц падает обратно пропорционально $a^3(\eta)$, локальное же ее выражение ничем не отличается от соответствующего ЛТР. Из (I.76), (I.77) видно, что если столкновения отключаются при ультрарелятивистских температурах $T_0 \gg m$, то распределение (I.69) все время эффективно остается ультрарелятивистским, т.е. главный вклад в макроскопические моменты вносят значения конформного импульса (который является интегралом движения) $\mathcal{P} \sim T_0 \gg m$ [9].

I.8 Кинетика космологического расширения плазмы в условиях локального термодинамического равновесия

Проще всего кинетические уравнения записываются не в канонических переменных η, P_4 , а в переменных η, \mathcal{P} , где \mathcal{P} - конформный импульс (I.75):

$$a^{-2} \sqrt{m^2 a^2 + \mathcal{P}^2} \frac{\partial f_a(\eta, \mathcal{P})}{\partial \eta} = I_a(\eta, \mathcal{P}). \quad (\text{I.78})$$

Отметим наиболее общие свойства этой модели при $a \rightarrow 0$ [1], [8]. Предполагается, что при $a \rightarrow 0$ все частицы являются ультрарелятивистскими

$$\langle P \rangle \gg at, \quad (I.79)$$

или

$$\langle p \rangle \gg t. \quad (I.80)$$

Тогда вследствие функциональных уравнений Больцмана и унитарности S -матрицы асимптотически точным решением (I.78) при $a \rightarrow 0$ являются равновесные распределения (I.69), в которых $t \rightarrow 0$ и постоянные μ_0 удовлетворяют соответствующим условиям химического равновесия.

В дальнейшем при понижении температуры до значений, сравнимых с массами частиц, плазма выходит из состояния глобального термодинамического равновесия. Фактором, выводящим систему из состояния ГТР, являются массы частиц

В [16], [67] исследована эволюция массивных частиц в стандартной горячей модели вселенной, когда отсутствуют макроскопические векторные и скалярные поля.

В [3], [4], [8] более подробно исследована ситуация, когда плазма состоит лишь из фотонов, нерелятивистских электронов и ионов, причем в плазме преобладают фотоны. При температурах выше температуры рекомбинации доминирующими являются следующие упругие взаимодействия:

$$e + \gamma = e + \gamma; \quad e + e = e + e; \quad e + i = e + i; \quad i + i = i + i. \quad (I.81)$$

Сначала рассматривается идеализированная ситуация, когда плазма состоит только из фотонов и нерелятивистских электронов, т.е. когда существенны лишь комптоновские столкновения и столкновения электронов между собой. В цитированных выше работах было получено выражение, позволяющее однозначно связать в каждый момент времени температуры фотонов

Глава I. Релятивистские кинетические модели космологического расширения плазмы и электронов.

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t}{2\tau_k^0 t}} \left[1 + \sqrt{\frac{2t}{\pi\tau_k}} + \frac{t}{2\tau_k t} + \dots \right] \quad (\text{I.82})$$

Присутствие сильного изотропного электромагнитного излучения максвеллизирует нерелятивистские электроны (см., например, [69]), расширение же плазмы приводит к тому, что хотя электроны и остаются максвелловскими, то с неравновесной температурой $T_e < T_\gamma$. Рассмотренный выше пример является точной реализацией фазового перехода, когда первоначально равновесная двухкомпонентная система (радиационно-доминированная плазма) в процессе расширения выходит из состояния термодинамического равновесия и распадается на две невзаимодействующие фазы - ультрарелятивистские фотоны и нерелятивистские электроны, причем температура последних ниже температуры фотонов и определяется формулой (I.82).

Реальная ситуация, однако, несколько сложнее рассмотренной выше, поскольку кроме всего прочего в плазме имеются еще и ионы, взаимодействующие с электронами. Несложный анализ кинетических уравнений показывает, что при учете электрон-ионных столкновений максвелловские распределения (см. [4]) уже не являются следствием специфической зависимости от скорости частиц кулоновского сечения рассеяния. Соответственно этому для конечной температуры нерелятивистской компоненты вместо (I.82) получено выражение:

$$\frac{T_e(t)}{T_\gamma(t)} = \sqrt{\frac{\pi t}{4\tau_k}}. \quad (\text{I.83})$$

В работах [5], [6], [7] исследовалось влияние нарушения ГТР на процесс производства барионов в кварково-глюонной плазме на ранних стадиях космологического расширения и вычислялась конечная барионная асимметрия плазмы, вызванная этим нарушением.

Глава II

Дифференциальное уравнения типа Фоккера-Планка для сверхтепловых частиц в условиях скейлинга

II.1 Уравнение Фоккера-Планка для классической плазмы

В случае кулоновского взаимодействия в формулах кинетической теории газов появляются расходящиеся интегралы, причем эти интегралы расходятся при больших расстояниях между частицами.¹ Это значит, что существенную роль в этих случаях играют именно столкновения с большими расстояниями между сталкивающимися частицами. Но при больших расстояниях происходит отклонение частиц лишь на малые углы и с малым изменением скорости. Таким образом, наиболее существенными становятся столкновения с малым изменением вектора скорости. Ниже мы воспроизведем основные детали вывода уравнения типа Фоккера-Планка, проведенного Л.Д.Ландау в случае кулоновских столкновений, и важные для дальнейшего применения в нашей работе.

Пусть $n(p_i)$ -функция распределения в импульсном пространстве; она

¹Такая же ситуация характерна и для всех масштабно-инвариантных взаимодействий, т.е., взаимодействий элементарных частиц в условиях восстановления скейлинга.

есть функция от трех компонент импульса частицы $i = x, y, z$. Изменение импульса при столкновениях обозначаются посредством Δ_i , причем при всех столкновениях $\Delta_i \ll p_i$; dW -вероятность (в единицу времени) столкновения частиц с импульсом p_i с частицей с импульсом p'_i , причем p_i переходит в $p_i + \Delta_i$, а p'_i в $p'_i + \Delta'_i$. В силу сохранения импульса $\Delta_i = -\Delta'_i$. Число таких столкновений:

$$dW n(p) n'(p') \quad (\text{II.1})$$

(для простоты здесь опущены индексы у p_i и Δ_i в $n(p_i)$ и т.д.).

Число же столкновений, переводящих частицы с импульсами $p_i + \Delta_i$ и $p'_i + \Delta'_i$ в частицы с импульсами p_i и p'_i , будет:

$$dW n(p + \Delta) n'(p' + \Delta'_i), \quad (\text{II.2})$$

в результате сохранения фазового объема сталкивающихся частиц согласно теореме Лиувилля.

При записи выражения для вероятности dW в виде функции полусуммы импульсов в начальном и конечном состояниях и их разности, вероятность прямого перехода будет иметь вид:

$$dW(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta'), \quad (\text{II.3})$$

а вероятность обратного:

$$dW(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, -\Delta, -\Delta'). \quad (\text{II.4})$$

Поскольку обе эти вероятности равны, то $dW(p, p', \Delta, \Delta_i)$ - четная функция от Δ_i и Δ'_i .

Поскольку число частиц с импульсом p_i благодаря столкновениям в единицу времени равно:

$$\int dW(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta') \{n(p) n'(p') - n(p + \Delta) n'(p' + \Delta')\}, \quad (\text{II.5})$$

II.1. Уравнение Фоккера-Планка для классической плазмы

то вероятность (II.3) принимает вид:

$$dW = \omega(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta') d\tau' d\tau_{\Delta}, \quad (\text{II.6})$$

где $d\tau' = dp'_x dp'_y dp'_z$, а $d\tau_{\Delta}$ - произведение дифференциалов параметров, определяющих столкновение. Таким образом, согласно [103] изменение числа частиц с импульсом p_i :

$$\int d\tau' d\tau_{\Delta} \omega(p + \frac{\Delta}{2}, p' + \frac{\Delta'}{2}, \Delta, \Delta') \{n(p)n'(p') - n(p + \Delta)n'(p' + \Delta')\}. \quad (\text{II.7})$$

Далее, интеграл (II.7), определяющий изменение числа частиц с данными импульсами благодаря столкновениям выражается в виде дивергенции $\partial j_i / \partial p_i$ вектора потока j_i в импульсном пространстве:

$$I = -\frac{\partial j_i}{\partial p_i}, \quad (\text{II.8})$$

где

$$j_i = \pi e^2 L \sum e'^2 \int \left\{ n \frac{\partial n'}{\partial p'_k} - n' \frac{\partial n}{\partial p_k} \right\} \frac{u^2 \delta_{ik} - u_i u_k}{u^3} d\tau'. \quad (\text{II.9})$$

Таким образом кинетическое уравнение в случае слабого взаимодействия принимает вид [58]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\partial j_i}{\partial p_i}. \quad (\text{II.10})$$

Уравнение такого типа называется *интегральным уравнением Фоккера-Планка* и содержит как производные от функции распределения, так и интегралы от этих функций в правой части уравнения.

Структура интеграла столкновений значительно упрощается, и он становится вместо интегрального оператора дифференциальным, если рассматриваются столкновения частиц не друг с другом, а с некоторыми посторонними объектами, в частности с частицами, не входящими в состав исследуемой системы и находящимися в состоянии статистического равновесия.

Кинетическое уравнение для частиц, взаимодействующих со средой имеет вид [58]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}(A_i(\xi)f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k}(B_{ik}(\xi)f), \quad (\text{II.11})$$

где

$$A_i(\xi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta \xi_i \rangle_{\Delta t}}{\Delta t}; \quad B_{ik}(\xi) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta \xi_i \Delta \xi_k \rangle_{\Delta t}}{\Delta t}. \quad (\text{II.12})$$

Это уравнение, в отличие от интегрального кинетического уравнения (II.10), является дифференциальным и носит название *дифференциального уравнения Фоккера-Планка*. Оно справедливо в том случае, когда динамические переменные, характеризующие частицу, медленно меняются при рассеянии частиц, само же рассеяние происходит на посторонних объектах, состояние которых считается полностью заданным.

II.2 Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

Итак, рассмотрим основные уравнения и определения нашей модели: метрику Фрийдмана (I.67), кинетические уравнения в этой метрике:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} I_{ab \leftrightarrow cd}(t, p), \quad (\text{II.13})$$

или в переменных η, p :

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} - \frac{a'}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{a(\eta)}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} I_{ab \leftrightarrow cd}(\eta, p), \quad (\text{II.14})$$

где точкой обозначается производная по времени t , а штрихом - производная по временной переменной η , причем:

$$a(\eta)d\eta = dt, \quad (\text{II.15})$$

а также, определения моментов (I.19), (I.20).

II.3. Вывод интеграла столкновений в форме Фоккера-Планка

Заметим также, что свертка обеих частей равенства (I.20) с помощью метрического тензора g_{ik} , вследствие соотношения нормировки 4-импульса:

$$(p, p) = m_a^2, \quad (\text{II.16})$$

получается:

$$T_S^a(x) = m_a^2 \int_{P(x)} f_a(x, p) dP, \quad (\text{II.17})$$

где $T_S^a(x)$ - след тензора энергии-импульса частиц сорта a .

II.3 Вывод интеграла столкновений в форме Фоккера-Планка

Далее поставим задачу упрощения интеграла четырехчастичных взаимодействий при условии скейлинга в предположении малости среднего передаваемого импульса при столкновениях (см. сноску на стр. 27) [10], [13], [55]. В цитированных ранее работах интеграл упругих парных столкновений для реакции вида (I.30) для изотропных распределений $f_a(p, x^i)$, зависящих лишь от абсолютной величины импульса, приводится к виду:

$$I_{ab}(p) = \frac{2S_b + 1}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty \frac{q dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_0^{4pq} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx \overline{|M(s, x)|^2} \times \\ \int_0^{2\pi} d\varphi [f_a(p') f_b(q') - f_a(p) f_b(q)], \quad (\text{II.18})$$

куда необходимо подставить выражения для p' , q' после столкновений:

$$p' = p - \Delta p; \quad q' = q - \Delta p, \quad (\text{II.19})$$

где

$$\Delta p = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1-x)(4pq - s)}, \quad (\text{II.20})$$

- изменение импульса, φ -угол между импульсами сталкивающихся частиц, s, x -кинематические инварианты.

Далее предполагается, что при столкновениях частиц в среднем передается небольшой импульс (см. сноску на стр. 27), т.е.,

$$\overline{(p_a - p_c)^2} \ll \overline{p^2}, \quad (\text{II.21})$$

чему соответствуют значения переменной $x \rightarrow 1$. Вводя новую переменную

$$x = 1 - \xi^2, \quad (\text{II.22})$$

интеграл столкновений разлагается в ряд Тейлора по малости передаваемого импульса, т.е., по малости параметра $\xi^2 \ll 1$. Из формулы (II.20) получается:

$$\Delta p = (1 - \xi^2)(p - q) - \cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s}. \quad (\text{II.23})$$

При удерживании членов порядка ξ^2 разложения функций распределения записываются в виде:

$$f(p') = f(q) + \frac{df}{dq} [\cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dq^2} \xi^2 (4pq - s) \cos^2 \varphi;$$

$$f(q') = f(p) - \frac{df}{dp} [\cos \varphi \xi \sqrt{4pq - s} + \xi^2(p - q)] + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dp^2} \xi^2 (4pq - s) \cos^2 \varphi.$$

При интегрировании по угловой переменной интегралы, линейные по ξ , исчезнут, поэтому для внутреннего интеграла получается выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi [f(p')f(q') - f(p)f(q)] = \\ & f(p)f(q) + (p - q)\xi^2 \left[f(p) \frac{df(q)}{dq} - f(q) \frac{df(p)}{dp} \right] + \\ & \frac{1}{4} \xi^2 (4pq - s) \left[f(p) \frac{d^2 f(q)}{dq^2} - 2 \frac{df(p)}{dp} \frac{df(q)}{dq} + f(q) \frac{d^2 f(p)}{dp^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

II.3. Вывод интеграла столкновений в форме Фоккера-Планка

Далее проводится интегрирование по переменной x и вводятся обозначения.

$$A = \int_0^1 |F(s, x)|^2 (1-x) ds; \quad B = \int_0^1 x |F(s, x)|^2 dx, \quad (\text{II.25})$$

так что:

$$A + B = \int_0^1 |F(s, x)|^2 dx. \quad (\text{II.26})$$

и, согласно (I.64), (I.65) имеет место соотношение:

$$A + B \approx \frac{32\pi^2}{\Lambda(s)}, \quad A \approx \frac{16\pi^2}{\Lambda(s)}.$$

В дальнейшем учитывается тот факт, при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг, т.е., выполняется соотношение (I.63), согласно которому $F(s, x) \approx F(x)$, так что $A \approx \text{Const}$, $B \approx \text{Const}$. Тогда после интегрирования по переменной s в полученном выражении, получается:

$$I_{ab}(p) = A \frac{2S_b + 1}{(4\pi)^3 p} \int_0^\infty dq \left\{ \left[f(p) \frac{df(q)}{dq} - f(q) \frac{df(p)}{dp} \right] + \right. \\ \left. + 2p^2 q^2 \left[f(p) \frac{d^2 f(q)}{dq^2} - 2 \frac{df(p)}{dp} \frac{df(q)}{dq} + f(q) \frac{d^2 f(p)}{dp^2} \right] \right\}$$

Далее производится интегрирование по частям в части интеграла, содержащего вторые производные по переменной q , при этом:

$$\int_0^\infty q^2 \frac{d^2 f(q)}{dq^2} dq = q^2 \frac{df(q)}{dq} \Big|_0^\infty - 2 \int_0^\infty q \frac{df(q)}{dq} dq = \\ = - 2qf(q) \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty f(q) q^2 dq = 2 \int_0^\infty f(q) q^2 dq,$$

где учтено:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q^n f(q) = 0, \quad (0 \leq n \leq 3), \quad (\text{II.27})$$

- условие, необходимое для сходимости выражений для плотности числа частиц и энергии.

Таким образом, после интегрирования по частям, релятивистский интеграл парных столкновений принимает окончательно форму Фоккера-Планка:

$$I_{ab}(p) = A \frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p} \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \quad (\text{II.28})$$

II.4 Релятивистское кинетическое уравнение типа Фоккера-Планка

После подстановки полученного интеграла столкновений в форме Фоккера-Планка (II.28) в кинетическое уравнение (II.13), последнее при ультрарелятивистских значениях импульса p приводится к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = A \frac{2S+1}{4(2\pi)^3 p^2} \times \frac{\partial}{\partial p} \left[p^2 \int_0^\infty q^2 \left(f(q) \frac{\partial f(p)}{\partial p} - f(p) \frac{\partial f(q)}{\partial q} \right) dq \right]. \quad (\text{II.29})$$

В результате последующего интегрирования по частям в уравнении (II.29) с учетом соотношений:

$$n(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q^2 f(q, \eta) dq, \quad (\text{II.30})$$

(плотность числа частиц),

$$T_S(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q f(q, \eta) dq, \quad (\text{II.31})$$

(след тензора энергии-импульса частиц), уравнение (II.29) принимает вид:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} - \frac{a'}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{A}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left[n(\eta) \frac{\partial f(p)}{\partial p} + 2T_S(\eta) f(p) \right]. \quad (\text{II.32})$$

II.4. Релятивистское кинетическое уравнение типа Фоккера-Планка

В рамках рассматриваемой модели в ультрарелятивистской области вследствие неразличимости частиц имеются законы сохранения числа частиц, в результате:

$$n(\eta)a^3(\eta) = \text{Const} \Rightarrow n(\eta) = \frac{n_*}{a(\eta)^3}. \quad (\text{II.33})$$

В универсальной системе единиц ($G = \hbar = c = 1$) выберем масштабный фактор в виде:

$$a(t) = \sqrt{2t} = \eta,$$

так что на “полупланковский” момент времени ($\eta = 1, t = \frac{1}{2}$) $a = 1, n = n_0$, далее осуществляется переход к так называемому *конформному импульсу* \mathcal{P} , который является интегралом движения свободных частиц в метрике Фрийдмана (I.67), по формуле (I.75) так что на планковский момент времени $p = \mathcal{P}$. Согласно (II.30), (II.31) и (I.75) вводятся конформные плотности числа частиц и плотность энергии:

$$n_*(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P}^2 d\mathcal{P} \quad (= \text{Const} = n_0);$$

$$\varepsilon_*(\eta) = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P}^3 d\mathcal{P},$$

а также средний конформный импульс (энергия):

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\varepsilon_*(\eta)}{n_*(\eta)}, \quad (\text{II.34})$$

так что:

$$n = \frac{n_*}{a^3}; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_*}{a^4}; \quad \Rightarrow \varepsilon = \langle p \rangle n, \quad (\text{II.35})$$

где:

$$\langle p \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{a}.$$

Вследствие (II.35) выполняется и соотношение для конформных плотностей:

$$\varepsilon_*(\eta) = \langle \mathcal{P}(\eta) \rangle n_*. \quad (\text{II.36})$$

Введем также безразмерную функцию, пропорциональную следу энергии-импульса, $\beta(\eta)$ с помощью отношения:

$$\beta(\eta)n_* = \frac{4\pi(2S+1)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f(\eta, \mathcal{P}) \mathcal{P} d\mathcal{P}. \quad (\text{II.37})$$

С помощью введенных обозначений уравнение (II.32) приводится к более изящной форме относительно функции $f(\eta, \mathcal{P})$ (см., например, различные варианты [10], [13]):

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{An_*}{\mathcal{P}^2} \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}} \mathcal{P}^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{P}} + 2\beta(\eta)f \right). \quad (\text{II.38})$$

Вследствие определения (II.37) функция $\beta(\eta)$ сама является интегралом от функции распределения. Таким образом, несмотря на внешнюю простоту, уравнение (II.38) остается интегро-дифференциальным. Заметим, что ультрарелятивистская равновесная функция распределения:

$$f_0 = C(\eta)e^{-2\beta(\eta)\mathcal{P}}, \quad (\text{II.39})$$

где $C(\eta)$ - произвольная функция, обращает в нуль полученный интеграл столкновений. Это означает, что с течением времени $\eta \rightarrow \infty$ решение уравнения (II.38) стремится к равновесному распределению (II.39) с температурой:

$$T(\eta) = \frac{a(\eta)}{\beta(\eta)} \Rightarrow T_* = \beta^{-1}(\eta), \quad (\text{II.40})$$

где T_* - конформная температура.

II.5 Математическая модель на основе интегро-дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка

Рассмотрим вселенную на ультрарелятивистской стадии расширения, когда $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_u$, где \mathcal{E}_u - максимальная масса всех частиц, участвующих в

II.5. Модель на основе интегрального уравнения Фоккера-Планка

реакции, в т.ч. и промежуточных. В этой области сечение взаимодействия будем полагать скейлинговым.

Полагается, что \mathcal{E} - полная плотность энергии материи, а \mathcal{E}_* - ее конформное значение. Тогда из уравнений Эйнштейна следует:

$$\mathcal{E} = \frac{3}{32\pi t^2} = \frac{3}{8\pi a^4} = \frac{3}{8\pi \eta^4} \Rightarrow \mathcal{E}_* = \frac{3}{8\pi}. \quad (\text{II.41})$$

Далее рассмотрим эволюцию сверхтепловых частиц, когда число равновесных частиц в области энергий порядка и ниже унитарного предела, n_T гораздо меньше числа сверхтепловых частиц в скейлинговой области,

$$n_T \ll n. \quad (\text{II.42})$$

В этом случае $\mathcal{E} = \varepsilon$, так что:

$$\varepsilon_* \simeq \frac{3}{8\pi} = \text{Const}. \quad (\text{II.43})$$

Для равновесных распределений ультрарелятивистских частиц:

$$f_T = \frac{1}{e^{\frac{p}{T}} \pm 1}, \quad (\text{II.44})$$

где $+1$ соответствует фермионам, -1 - бозонам, плотность числа частиц (II.30) равна:

$$n_T = \mu_n \frac{2S+1}{\pi^2} T^3 \zeta(3), \quad (\text{II.45})$$

где статистический фактор $\mu_n = 1$ - для бозонов и $\mu_n = 3/4$ - для фермионов, T - температура. Соответствующие равновесные плотности энергий равны:

$$\varepsilon_T = \mu_\varepsilon \frac{2S+1}{30\pi^2} T^4, \quad (\text{II.46})$$

где статистический фактор $\mu_\varepsilon = 1$ для бозонов и $\mu_\varepsilon = 7/8$ для фермионов. Суммарная плотность энергии равновесной ультрарелятивистской компоненты равна:

$$\varepsilon_T = \frac{g}{30\pi^2} T^4, \quad (\text{II.47})$$

где g - статистический фактор:

$$g = \sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1),$$

где суммирование проводится по всем тепловым бозонам и фермионам.

Но тогда вследствие закона сохранения энергии и уравнений Эйнштейна должно выполняться равенство:

$$\varepsilon_* + gT_*^4 = \frac{3}{8\pi}, \quad (\text{II.48})$$

где

$$T_*(\eta) = Ta(\eta).$$

Соотношение (II.48) можно рассматривать как уравнение для определения температуры равновесной компоненты (подробности см. в [10], [13]).

В этой главе рассматривается эволюция сверхтепловой компоненты на ранних стадиях расширения, когда выполняется условие $\varepsilon_T \ll \varepsilon$, или что тоже самое:

$$gT_*^4 \ll \frac{3}{8\pi}. \quad (\text{II.49})$$

Тогда

$$\varepsilon_* = \frac{3}{8\pi}, \quad (\text{II.50})$$

и вследствие (II.33), (II.36) выполняется соотношение:

$$\langle \mathcal{P}(\eta) \rangle = \frac{3}{8\pi n_*} = \text{Const} = \mathcal{P}_0, \quad (\text{II.51})$$

- на этой стадии среднее значение конформной энергии сверхтепловых частиц не изменяется с течением времени. Значениям $\mathcal{P}_0 \sim 1$ соответствуют планковские энергии на планковских же временах, т.е., энергии порядка тепловых в горячей модели вселенной. В дальнейшем будем полагать:

$$\mathcal{P}_0 \gg 1. \quad (\text{II.52})$$

Но тогда вследствие (II.36)

$$n_* = \frac{3}{8\pi \mathcal{P}_0} \ll 1. \quad (\text{II.53})$$

II.5. Модель на основе интегрального уравнения Фоккера-Планка

С учетом приведенных выражений найдем оценку на функцию $\beta(\eta)$:

$$\beta(\eta) \sim \frac{1}{\mathcal{P}_0} \ll 1. \quad (\text{II.54})$$

Поскольку безразмерная величина \mathcal{P}_0 является свободным параметром модели, осуществляется переход к безразмерной импульсной переменной x :

$$x = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}. \quad (\text{II.55})$$

При осуществлении замены переменных, получим соотношение нормировки на функцию распределения из (II.35):

$$\int_0^{\infty} f(\eta, x) x^2 dx = \frac{3\pi}{4(2S+1)} \frac{1}{\mathcal{P}_0^4}. \quad (\text{II.56})$$

Таким образом, порядок функции распределения есть

$$f(\eta, x) \sim \frac{1}{\mathcal{P}_0^4}.$$

В дальнейшем перейдем к новой функции распределения $\mathcal{G}(\eta, x) \sim 1$:

$$f(\eta, x) = \frac{3\pi}{4(2S+1)} \frac{\mathcal{G}(\eta, x)}{\mathcal{P}_0^4}, \quad (\text{II.57})$$

так что

$$\int_0^{\infty} \mathcal{G}(\eta, x) x^2 dx = 1; \quad (\text{II.58})$$

$$\int_0^{\infty} \mathcal{G}(\eta, x) x^3 dx = 1. \quad (\text{II.59})$$

и производя замену переменных, получим соотношения:

$$\beta(\eta) = \frac{b(\eta)}{\mathcal{P}_0}, \quad (\text{II.60})$$

где

$$b(\eta) = \int_0^{\infty} \mathcal{G}(\eta, x) x dx; \quad (\text{II.61})$$

Таким образом, в выбранных переменных нормированная функция распределения $\mathcal{G}(\eta, x)$ должна удовлетворять двум соотношениям нормировки - (II.58) и (II.59).

Далее введем перенормированное время τ :

$$\tau = \frac{3A\eta}{8\pi\mathcal{P}_0^3}, \quad (\text{II.62})$$

и окончательно запишем уравнение (II.41) относительно функции $\mathcal{G}(\tau, x)$ в форме:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + 2b(\tau)\mathcal{G} \right). \quad (\text{II.63})$$

Уравнение (II.63) должно решаться с начальными и граничными условиями вида:

$$\mathcal{G}(0, x) = G(x); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(\tau, x)x^3 = 0, \quad (\text{II.64})$$

причем вследствие (II.56), (II.58) функция $G(x)$ должна удовлетворять интегральным условиям:

$$\int_0^{\infty} G(x)x^2 dx = 1; \quad (\text{II.65})$$

$$\int_0^{\infty} G(x)x^3 dx = 1. \quad (\text{II.66})$$

Последнее из условий (II.64) необходимо для обеспечения сходимости интеграла энергии (II.66).

II.6 Математическая модель на основе дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка

Полагая $b(\tau) \approx \text{Const}$, что можно сделать на ранней стадии эволюции, и произведя разделение переменных в уравнении (II.63):

$$\mathcal{G}(\tau, x) = T(\tau)X(x),$$

II.6. Модель на основе дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка

получим уравнения:

$$T = e^{-\lambda^2 \tau}, \quad (\text{II.67})$$

$$xX'' + 2X'(1 + bx) + X(\lambda^2 x + 4b) = 0. \quad (\text{II.68})$$

Если $X_\lambda(x)$ - решение уравнения (III.2), то общее решение уравнения (II.63) можно записать в виде:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \int_0^\infty X_\lambda(x) e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda. \quad (\text{II.69})$$

Решение уравнения (III.2) выражается через комбинацию вырожденных гипергеометрических функций $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ и $\Psi(\alpha, \gamma, z)$ (или функций Уиттекера), $M_{\mu, 1/2}(z)$ и $W_{\mu, 1/2}(z)$:

$$\begin{aligned} X_\lambda(x) = \frac{e^{-bx}}{x} \left[C_1(\lambda) M_{-i\mu, 1/2}(2i\sqrt{\lambda^2 - b^2}x) + \right. \\ \left. + C_2(\lambda) W_{-i\mu, 1/2}(2i\sqrt{\lambda^2 - b^2}x) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

где

$$\mu = \frac{b}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}.$$

В частности, в случае $b = 0$ получим $\mu = 0$,

$$X_\lambda(x) = \frac{1}{x} \left[C_1(\lambda) M_{0, 1/2}(2i\lambda x) + C_2(\lambda) W_{0, 1/2}(2i\lambda x) \right]$$

Используя связь функций Уиттекера с модифицированными функциями Бесселя $I_\mu(z)$ и $K_\mu(z)$ [99]:

$$W_{0, \mu}(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} K_\mu\left(\frac{z}{2}\right);$$

$$M_{0, \mu}(z) = 2^{2\mu} \Gamma(\mu + 1) \sqrt{z} I_\mu\left(\frac{z}{2}\right), \quad (\text{II.71})$$

а также связь модифицированных функций Бесселя мнимого аргумента с функциями Бесселя первого и третьего рода $J_\mu(z)$ и $H^{(2)}(z)$ (функция Ханкеля) [72]:

$$I_\mu(z) = e^{\frac{i\pi}{2}} J_\mu \left(ze^{-\frac{i\pi}{2}} \right), \quad (\forall z \mid -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi),$$

$$K_\mu(z) = -\frac{i\pi}{2} e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} H^{(2)} \left(ze^{-\frac{i\pi}{2}} \right), \quad (\text{II.72})$$

получим из (II.70) решение в случае $\beta \rightarrow 0$:

$$X_\lambda(x) = \sqrt{2\lambda x} \left[C_1(\lambda) \sqrt{\pi} e^{i3\pi/4} J_{\frac{1}{2}}(\lambda x) + \right. \\ \left. + C_2(\lambda) e^{-i3\pi/4} \sqrt{1\pi} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\lambda x) \right]. \quad (\text{II.73})$$

Учитывая тот факт, что функции Бесселя с полуцелым индексом выражаются через элементарные функции:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z; \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = i \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-iz},$$

получим окончательно:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \int_0^\infty P(\lambda) e^{-\lambda^2 \tau + i\lambda x} d\lambda.$$

Этот результат мы могли бы получить и непосредственно из уравнения (II.63), если в нем сразу положить $b = 0$, - тогда на функцию $\mathcal{G}(\tau, x)$ получим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right), \quad (\text{II.74})$$

которое совпадает с трехмерным уравнением теплопроводности в сферической системе координат в случае сферической симметрии. Стандартное

II.6. Модель на основе дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка

решение уравнения трехмерного теплопроводности, отвечающее начальному условию:

$$U(x, y, z, 0) = U_0(x, y, z) \quad (\text{II.75})$$

имеет вид (см., например, [100]):

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi t^{3/2}} \int_{V_0} U_0(\vec{r}_0) e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t}} dV_0 \quad (\text{II.76})$$

Для того, чтобы получить на основе этого решения сферически симметричное решение уравнения (II.74) выберем временно систему координат:

$$\vec{r}_0 = (0, 0, r)$$

и перейдем в интеграле (II.76) к сферической системе координат:

$$x = r_0 \cos \phi \cos \theta; y = r_0 \sin \phi \cos \theta; z = r_0 \sin \theta$$

$$\Rightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \sin \theta$$

и проведем интегрирование по угловым переменным, в результате получим решение, которое на ранних стадиях расширения описывает нормированную функцию распределения в унитарном пределе:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty G(y) \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4\tau}} \right] y dy. \quad (\text{II.77})$$

Заметим, что в приближении $\beta \rightarrow 0$ функция \mathcal{G} в изучаемой области уже не обязана удовлетворять интегральным соотношениям нормировки (II.65), (II.66), так как данное приближение не учитывает процессы притока частиц в рассматриваемую область за счет столкновения с низкоэнергетическими частицами, приводящие к термализации распределения. Тем не менее, начальное распределение должно удовлетворять этим соотношениям нормировки.

Изучим эволюцию высокоэнергетического хвоста распределения. Предположим, что первоначальное распределение имело вид:

$$\mathcal{G}(0, x) = \frac{G_0 k^3}{(k^2 + x^2)^{3/2}} \chi(x_0 - x), \quad (\text{II.78})$$

где $\chi(x)$ - ступенчатая функция:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

т.е., при $x_0 > x \gg k$ $\mathcal{G}(0, x) \approx G_0/x^3$ - энергия распределена равномерно. Две постоянные k и G_0 должны быть определены из пары соотношений нормировки (II.65), (II.66). Таким образом, получим соотношения:

$$1 = G_0 k^3 \left(\ln(\zeta + \sqrt{1 + \zeta^2}) - \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \right); \quad (\text{II.80})$$

$$1 = G_0 k^4 \left(\frac{\zeta^2 + 2}{\sqrt{1 + \zeta^2}} - 2 \right), \quad (\text{II.81})$$

где

$$\zeta = \frac{x_0}{k}. \quad (\text{II.82})$$

Таким образом, на три постоянные G_0, x_0, k имеем два уравнения (II.80), (II.81), при этом один параметр, например, ζ , остается свободным. Отсюда найдем:

$$G_0 k^3 = \frac{\sqrt{1 + \zeta^2}}{\sqrt{1 + \zeta^2} \ln(\zeta + \sqrt{1 + \zeta^2}) - \zeta}; \quad (\text{II.83})$$

$$k = \frac{\sqrt{1 + \zeta^2} \ln(\zeta + \sqrt{1 + \zeta^2}) - \zeta}{\zeta^2 + 2 - 2\sqrt{1 + \zeta^2}}. \quad (\text{II.84})$$

Подстановка значений (II.83), (II.84) в выражение (II.77) приводит к окончательному формальному решению, пригодному для больших значений импульса, - это решение определяется свободным параметром ζ , который согласно (II.80)-(II.82) должен принимать большие значения.

II.7. Численная модель высокоэнергетического хвоста распределения

На Рис. 1 показано начальное распределение плотности энергии в зависимости от свободного параметра ζ .

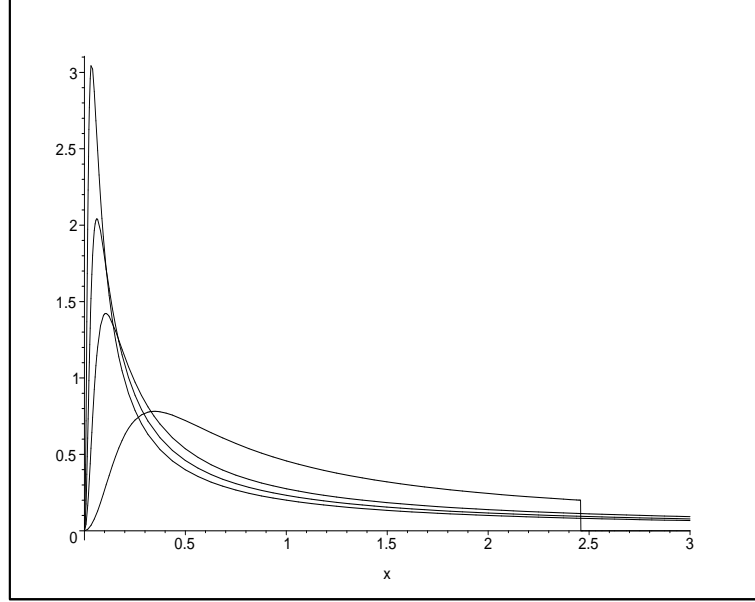


Рис. 1. Начальное распределение плотности энергии $x^3 \mathcal{G}(0, x)$ в зависимости от свободного параметра ζ .
Сплошные линии снизу вверх: $\zeta = 10; 50; 100; 200$.

II.7 Численная модель высокоэнергетического хвоста распределения

Вводя переменные:

$$z = \frac{y}{k}; \quad u = \frac{x}{k} \quad (\text{II.85})$$

и учитывая соотношения (II.83), (II.84) в выражении (II.77), получим решение задачи в квадратурах:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(u, \tau; \zeta) = & \frac{1}{2u\sqrt{\pi\tau}} \frac{\sqrt{1+\zeta^2}(\zeta^2+2-2\sqrt{1+\zeta^2})^3}{[\sqrt{1+\zeta^2}\ln(\zeta+\sqrt{1+\zeta^2})-\zeta]^4} \times \\ & \times \int_0^\zeta \left[e^{-\frac{k^2(z-u)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{k^2(z+u)^2}{4\tau}} \right] \frac{zdz}{(1+z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

куда необходимо подставить значение $k = k(\xi)$ из (II.84).

Получим оценку для асимптотического поведения хвоста распределения в области очень больших энергий:

$$u \gg 1. \quad (\text{II.87})$$

В области (II.87) подинтегральная функция в (II.86) имеет вид узкого пика с вершиной в области $z = u$, при этом второй экспоненциальный член в подинтегральном выражении исчезающе мал. Если при этом $u > \zeta$, интеграл становится экспоненциально малым. Если же u, ζ , то интеграл можно оценить как площадь пика, т.е., как произведение его высоты на полуширину. Максимум подинтегральной функции есть:

$$\max \Phi(z = u) = \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}} \simeq \frac{1}{u^2}.$$

Для вычисления полуширины $2\Delta z$ пика имеем уравнение:

$$\frac{1}{2u^3} = e^{-\frac{k^2 \Delta z}{4\tau}} \frac{1}{u^3},$$

откуда найдем:

$$2\Delta z = \frac{4\sqrt{\tau \ln 2}}{k}.$$

Таким образом, получим оценку:

$$\mathcal{G} \sim \begin{cases} \frac{1}{x^3} & x < x_0; \\ e^{-x^2/4\tau}, & x > x_0. \end{cases} \quad (\text{II.88})$$

Исследуем полученное решение численными методами с помощью средств компьютерной математики (СКМ).

II.7. Численная модель высокоэнергетического хвоста распределения

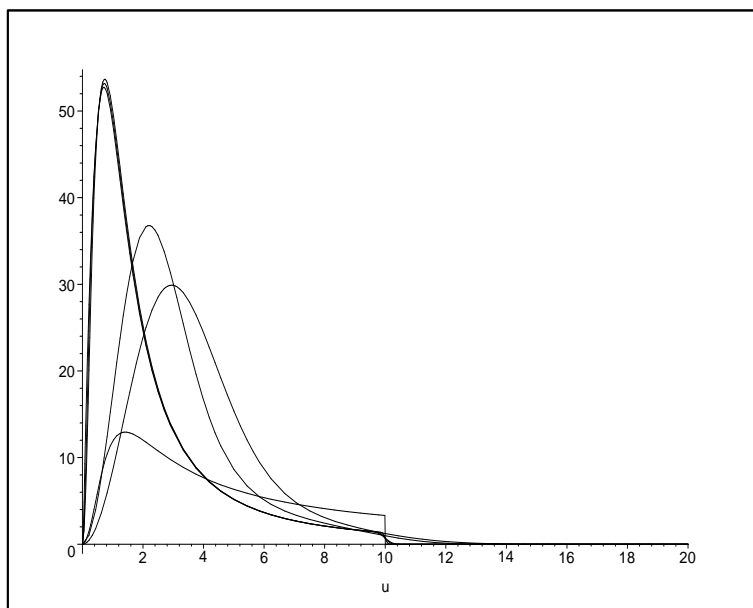


Рис. 2. Эволюция плотности числа сверхтепловых частиц $x^2 \mathcal{G}(u, \tau, 10)$ при малых временах для значений $\tau = 0; 0,0001; 0,0005; 0,001; 0,05; 0,01$. На шкале абсцисс u .

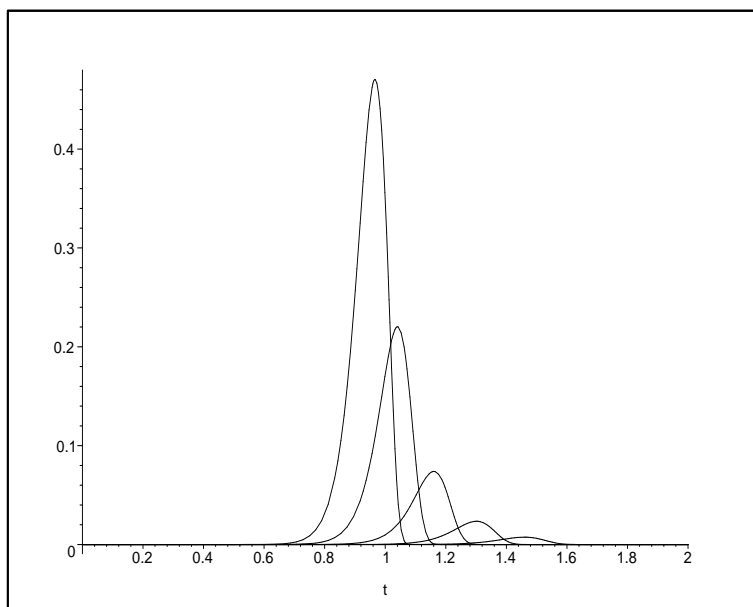


Рис. 3. Эволюция плотности числа сверхтепловых частиц в высокоэнергетическом хвосте $u^2 \mathcal{G}(u, \tau, 1)$ для значений $\tau = 0,1; 1; 10; 100; 1000$ (слева направо). На шкале абсцисс отложены значения $\lg u$.

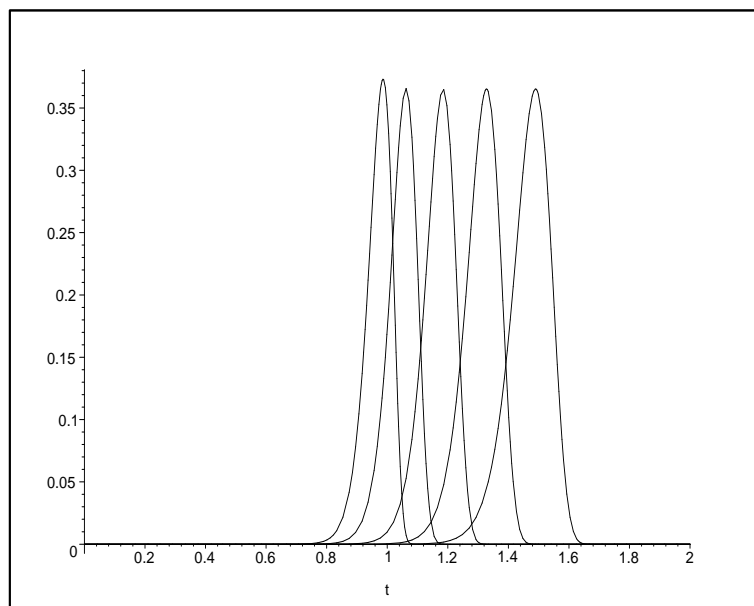


Рис. 4. Эволюция распределения энергии сверхтепловых частиц в высокоэнергетическом хвосте $u^3\mathcal{G}(u, \tau, 1)$ для значений $\tau = 0, 1; 1; 10; 100; 1000$ (слева направо). На шкале абсцисс отложены значения $\lg u$.

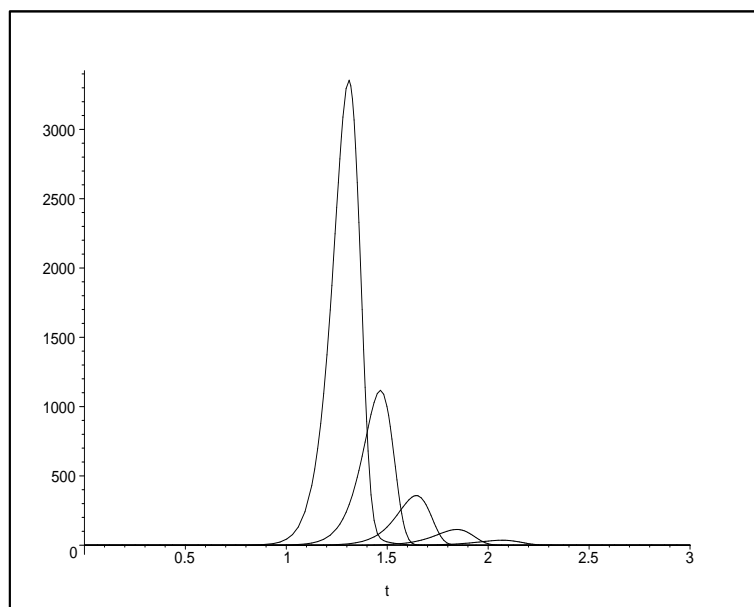


Рис. 5. Эволюция плотности числа сверхтепловых частиц в высокоэнергетическом хвосте $u^2\mathcal{G}(u, \tau, 100)$ для значений $\tau = 0, 1; 1; 10; 100; 1000$ (слева направо). На шкале абсцисс отложены значения $\lg u$.

II.7. Численная модель высокоэнергетического хвоста распределения

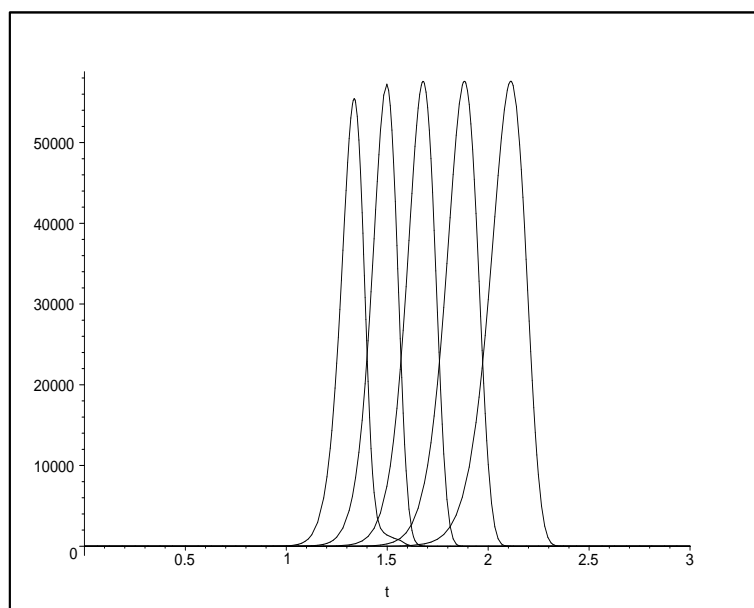


Рис. 6. Эволюция распределения энергии сверхтепловых частиц в высокоэнергетическом хвосте $u^3 \mathcal{G}(u, \tau, 100)$ для значений $\tau = 0, 1; 1; 10; 100; 1000$ (слева направо). На шкале абсцисс отложены значения $\lg u$.

Глава III

Интегральное уравнение типа Фоккера-Планка для малых времен ЭВОЛЮЦИИ

Как показали исследования, полученное в Главе II решение кинетического уравнения (II.63) при $b(\tau) = 0$ становится справедливым лишь на больших временах эволюции, поэтому становится проблематичным установление связи параметров этого решения с первоначальным распределением. В этой главе мы исследуем эволюцию системы при малых временах.

Следует отметить, что точным решением кинетического уравнения (II.63), удовлетворяющим соотношениям нормировки (II.65), (II.66) является равновесное распределение (II.39) с параметрами $C = \frac{27}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$.

III.1 Численная модель начального распределения

Рассмотрим начальное распределение, аналогичное распределению Ферми-Дирака, заданное в виде аналитической функции:

$$G_0(x) = \frac{A}{e^{\xi x - y} + 1}, \quad (\text{III.1})$$

где A , ξ , y - параметры начального распределения. Эти параметры должны быть таковыми, чтобы автоматически выполнялись соотношения нор-

III.1. Численная модель начального распределения

мировки (II.65),(II.66). Таким образом, имеем два алгебраических соотношения на три параметра, разрешая которые относительно параметра y , найдем:

$$\xi(y) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{(t-y)} + 1}}{\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{e^{(t-y)} + 1}}; A(y) = \frac{\xi^3(y)}{\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{e^{(t-y)} + 1}} \quad (\text{III.2})$$

Медленная сходимость несобственных интегралов в (III.2) приводит к необходимости преобразования их в следующем, более удобном для численных расчетов виде:

$$J_1(y) = \int_0^{\infty} \frac{t dt}{e^{(t-y)} + 1} = y \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} + \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} +$$

$$+ y \int_0^y \frac{dx}{e^{-x} + 1} - \int_0^y \frac{x dx}{e^x + 1}. \quad (\text{III.3})$$

$$J_2(y) = \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{e^{(t-y)} + 1} = y^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} + 2y \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + 1} + y^2 \int_0^y \frac{dx}{e^{-x} + 1} - 2y \int_0^y \frac{x dx}{e^x + 1} + \int_0^y \frac{x^2 dx}{e^x + 1}. \quad (\text{III.4})$$

$$J_3(y) = \int_0^{\infty} \frac{t^3 dt}{e^{(t-y)} + 1} = y^3 \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} + 3y^2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} +$$

$$+ 3y \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + 1} + \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x + 1} + y^3 \int_0^y \frac{dx}{e^{-x} + 1} -$$

$$- 3y^2 \int_0^y \frac{x dx}{e^x + 1} + 3y \int_0^y \frac{x^2 dx}{e^x + 1} - \int_0^y \frac{x^3 dx}{e^x + 1}. \quad (\text{III.5})$$

Используя известные представления ζ - функций Римана и чисел Бернулли (см., например [99]):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{1-n})\Gamma(n)\zeta(n); \quad (\text{III.6})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{e^x + 1} dx = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n \quad (\text{III.7})$$

и вводя безразмерные функции:

$$S(n, y) = \int_0^y \frac{x^n}{e^{-x} + 1} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{III.8})$$

($S(0, y) = \ln(1 + e^y)/2$) получим выражения для (III.3)-(III.5):

$$J_1(y) = y \ln 2 + \frac{\pi^2}{12} + yS(0, y) - S(1, y); \quad (\text{III.9})$$

$$J_2(y) = y^2 \ln 2 + y \frac{\pi^2}{6} + \frac{3}{2} \zeta(3) + y^2 S(0, y) -$$

$$2yS(1, y) + S(2, y); \quad (\text{III.10})$$

$$J_3(y) = y^3 \ln 2 + y^2 \frac{\pi^2}{4} + y \frac{9}{2} \zeta(3) + \frac{7}{120} \pi^4 +$$

$$y^3 S(0, y) - 3y^2 S(1, y) + 3yS(2, y) - S(3, y). \quad (\text{III.11})$$

Таким образом, найдем с помощью введенных функций (III.3)-(III.5) выражение для $b(\tau)$:

$$b_0(y) = A(y) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^{\xi(y)x-y} + 1} \equiv$$

$$\frac{A(y)}{\xi^2(y)} \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^{x-y} + 1} = \frac{J_3(y)J_1(y)}{J_2^2(y)}. \quad (\text{III.12})$$

Представление (III.2) через функции $S(n, y)$, ζ - функции Римана и дублирование их в СКМ делает более простым численные расчеты. Результаты

III.1. Численная модель начального распределения

интегрирования представлены на Рис. 1, Рис. 2, из которых видно, что $\xi(y)$ -монотонно возрастающая, а $A(y)$ -монотонно убывающая функция.

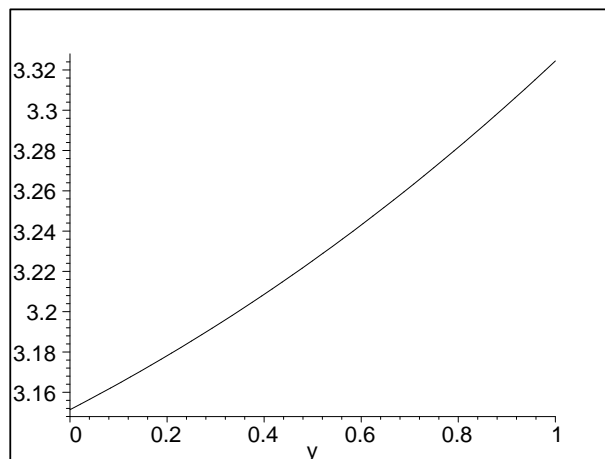


Рис. 1. График функции $\xi(y)$.

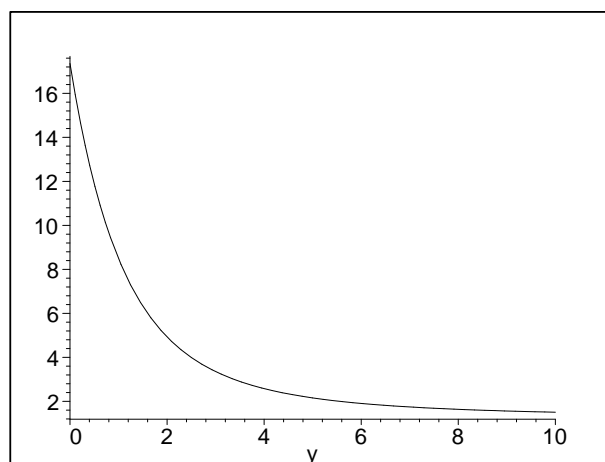


Рис. 2. График функции $A(y)$.

В итоге, нормированная начальная функция распределения определяется одним произвольным параметром, y :

$$G_0(x, y) = \frac{A(y)}{e^{\xi(y)x-y} + 1}, \quad (\text{III.13})$$

который управляет степенью неравновесности начального распределения (III.1), Рис. 3.

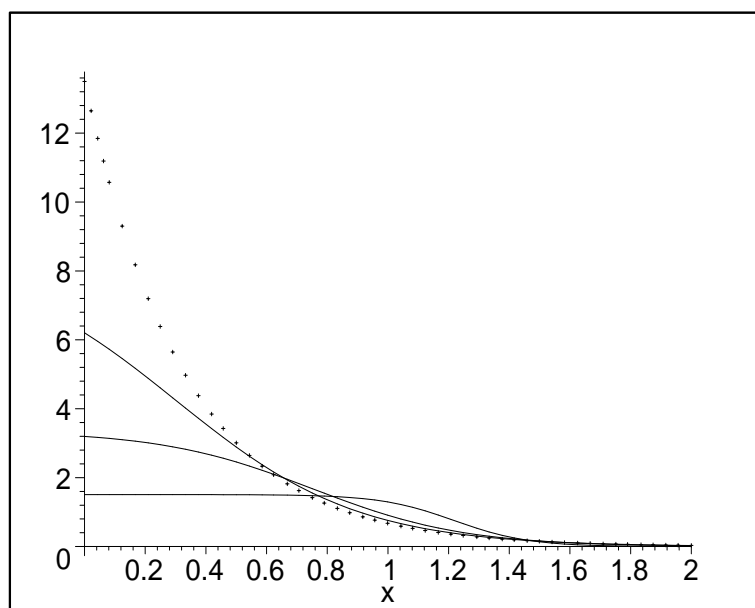


Рис. 3. Начальное нормированное распределение $G_0(x, y)$ в зависимости от параметра y : сверху вниз: $y = 1$, $y = 3$, $y = 10$. Точечной линией показано равновесное распределение (III.1).

III.2 Законы сохранения для релятивистского уравнения типа Фоккера-Планка

Как известно (см., например [46]), строгими следствиями общерелятивистской кинетической теории в случае упругих столкновений являются интегральные законы сохранения полного числа частиц и их энергии. Решения уравнения (II.63), полученного на основе общерелятивистских кинетических уравнений, также должны удовлетворять этим законам. Поэтому необходимо проверить этот факт.

Умножая обе части уравнения (II.63) на x^2 и интегрируя полученное выражение по частям по всему интервалу импульсной переменной x , полу-

III.2. Законы сохранения для релятивистского уравнения типа Фоккера-Планка

чим:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^2 G(x, \tau) dx = \left[x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) \right] \Big|_0^{\infty}. \quad (\text{III.14})$$

Полагая в дальнейшем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 G; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\partial G}{\partial x} = 0; \quad (\text{III.15})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 G = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{\partial G}{\partial x} = 0; \quad (\text{III.16})$$

получим из (III.14):

$$\int_0^{\infty} x^2 G(x, \tau) dx = \text{Const}. \quad (\text{III.17})$$

Согласно (II.65) постоянная в правой части (III.17) равна 1.

Умножая теперь обе части (II.63) на x^3 и интегрируя полученное выражение по всему интервалу, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx &= \left[x^3 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) \right] \Big|_0^{\infty} - \\ &- \int_0^{\infty} x^2 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + 2b(\tau)G \right) dx \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Учитывая (III.15), (III.17), (II.64) и еще раз интегрируя полученное выражение по частям в (III.18), найдем:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx = -x^2 G \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x G dx - 2b(\tau) \int_0^{\infty} x^2 G dx. \quad (\text{III.19})$$

Учитывая соотношения (II.37), (II.65), а также (III.15), (III.17), получим, наконец, из (III.19):

$$\int_0^{\infty} x^3 G(x, \tau) dx = \text{Const}. \quad (\text{III.20})$$

Согласно (II.66) постоянная в правой части (III.20) равна 1. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема. *Следствием релятивистского интегро-дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка (II.63) являются законы сохранения плотности числа частиц и энергии.*

Для выполнения соотношений (III.15), (III.17), (II.66) достаточно, чтобы функция $G(x)$ по порядку величины удовлетворяла следующим предельным неравенствам:

$$G(x)|_{x \rightarrow 0} < \frac{1}{x}, \quad G(x)|_{x \rightarrow \infty} < \frac{1}{x^3}. \quad (\text{III.21})$$

Заметим также, что выполнение закона сохранения энергии обеспечивается именно наличием члена с коэффициентом $b(\tau)$ в правой части диффузионного уравнения (II.63), отсутствие которого не учитывает процесса перекачки энергии при малых временах эволюции.

III.3 Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ

Это приближение соответствует ранней стадии эволюции вселенной, когда столкновения частиц еще не включились:

$$\tau \ll 1. \quad (\text{III.22})$$

Тогда член в левой части диффузионного уравнения является главным, что сразу дает с учетом начального условия (II.64):

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = 0, \Rightarrow G(x, \tau) = G_0(x). \quad (\text{III.23})$$

III.3.1 Общее решение в виде ряда

Разлагая в ряд правую часть уравнения (II.63), подставляя в качестве нулевого приближения выражение (III.23) и выполняя элементарное интегрирование по времени, получим первую поправку. Последовательно повторяя

III.3. Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ

эту процедуру, получим рекуррентную формулу для нахождения более высоких приближений:¹

$$G_{k+1} = \int \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left[\frac{\partial G_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left(G_i \int_0^\infty G_{k-i} x dx \right) \right] d\tau, \quad (\text{III.24})$$

Учитывая, что поправка k -го порядка пропорциональна τ^k , и интегрируя (III.24), получим:

$$G_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left(g_i \int_0^\infty g_{k-i} x dx \right) \right]. \quad (\text{III.25})$$

Выполняя дифференцирование в выражении (III.25), получим окончательно:

$$G_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \left\{ \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left[\left(\frac{\partial g_i}{\partial x} + \frac{2g_i}{x} \right) \int_0^\infty g_{k-i} x dx \right] \right\}. \quad (\text{III.26})$$

Найдем также рекуррентную формулу для определения функции $b(\tau)$ в уравнении (II.63). Учитывая (III.25), получим согласно (II.37):

$$b_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k (g_i b_{k-i}) \right]. \quad (\text{III.27})$$

Интегрируя по частям интеграл в (III.27) и полагая в дальнейшем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x g_i = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\partial g_k}{\partial x} = 0; \quad (\text{III.28})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x g_i = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\partial g_k}{\partial x} = 0. \quad (\text{III.29})$$

получим окончательно:

$$b_{k+1} = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \int_0^\infty \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k (g_i b_{k-i}) \right] dx. \quad (\text{III.30})$$

Теперь докажем, что на каждом шаге итераций поправки к предполагаемому нормированному начальному распределению (III.1) не могут изменить суммарные плотность числа частиц и плотность энергии.

¹Здесь и далее, если не оговорено особо, $k \in \mathbb{N}$.

Умножая обе части уравнения (III.25) на x^2 и интегрируя по всему интервалу, получим:

$$\int_0^{\infty} x^2 G_{k+1} dx = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \left\{ x^2 \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left(g_i \int_0^{\infty} g_{k-i} x dx \right) \right] \right\} \Big|_0^{\infty}. \quad (\text{III.31})$$

Полагая в дальнейшем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 g_i = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\partial g_k}{\partial x} = 0; \quad (\text{III.32})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 g_i = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{\partial g_k}{\partial x} = 0. \quad (\text{III.33})$$

получим из (III.31):

$$\int_0^{\infty} x^2 G_{k+1} dx = 0. \quad (\text{III.34})$$

Умножая теперь обе части уравнения (III.25) на x^3 и интегрируя по всему интервалу, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^3 G_{k+1} dx &= \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \left\{ x^3 \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left(g_i \int_0^{\infty} g_{k-i} x dx \right) \right] \right\} \Big|_0^{\infty} - \\ &\frac{\tau^{k+1}}{k+1} \int_0^{\infty} x^2 \left[\frac{\partial g_k}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^k \left(g_i \int_0^{\infty} g_{k-i} x dx \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Учитывая в дальнейшем (III.32), (III.33), (III.20) и еще раз интегрируя по частям, получим из (III.35):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^3 G_{k+1} dx &= \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \left\{ -x^2 g_k \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x g_k dx - \right. \\ &\left. - 2 \int_0^{\infty} x^2 \sum_{i=0}^k \left(g_i \int_0^{\infty} g_{k-i} x dx \right) dx \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

III.3. Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ

После очевидных упрощений

$$\int_0^{\infty} x^3 G_{k+1} dx = \frac{\tau^{k+1}}{k+1} \left\{ -x^2 g_k \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x g_k dx - \right. \\ \left. -2 \int_0^{\infty} x g_k dx \int_0^{\infty} x^2 g_0 dx - 2 \sum_{i=1}^k \left(\int_0^{\infty} g_{k-i} x dx \int_0^{\infty} x^2 g_i dx \right) \right\}, \quad (\text{III.37})$$

а также с учетом соотношений (II.65), (III.32), (III.33), (III.34), получим наконец из (III.37):

$$\int_0^{\infty} x^3 G_{k+1} dx = 0. \quad (\text{III.38})$$

Таким образом, справедлива следующая теорема

Теорема. *На каждом шаге итераций решения интегро-дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка (II.63) с начально-граничными условиями (II.64), поправки к начальному распределению не изменяют суммарные плотность числа частиц и плотность энергии.*

Итак, мы убедились, что итерации функции распределения каждого шага не изменяют полного числа частиц и энергии, что само по себе является удобным инструментом проверки правильности вычислений. Из (III.38), (III.34) следует и тот простой факт, что поправка любого порядка знакопеременна на положительном промежутке $[0, +\infty)$. Таким образом, приближение малого времени τ полностью эквивалентно разложению точной функции $G(x, \tau)$ в ряд Тейлора по степеням τ .

III.3.2 Первое приближение функции распределения

В первом приближении согласно рекуррентной формуле (III.25) имеем:

$$G_1 = \tau g_1; \quad (\text{III.39})$$

$$g_1 = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial G_0}{\partial x} + 2b_0 G_0 \right). \quad (\text{III.40})$$

Подставляя выражение (III.40) в (II.37) и интегрируя по частям, а также учитывая, что функция $G_0(x, y)$, определяемая выражением (III.1), при $x \rightarrow 0$ конечна и имеет конечные производные, а при $x \rightarrow \infty$ вместе со своими производными стремится к нулю быстрее любой степенной функции, получим:

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G_0}{\partial x} + 2b_0 G_0(x) \right) = \tau \left[x \left(\frac{\partial G_0}{\partial x} + 2b_0 G_0(x) \right) \right] \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \tau \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial G_0}{\partial x} + 2b_0 G_0(x) \right) dx = -\tau G_0(0) + \tau 2b_0 \int_0^{\infty} G_0 dx \Rightarrow \\ b_1(\tau) &= -\tau \frac{A(y)e^y}{e^y + 1} + \tau 2b_0 \int_0^{\infty} G_0 dx. \end{aligned}$$

Подставляя сюда начальное распределение (III.1), найдем:

$$\int_0^{\infty} G_0 dx = \frac{A(y)}{a(y)} \ln(1 + e^y), \quad (\text{III.41})$$

поэтому

$$b_1(\tau) = \tau A(y) \left[\frac{2b_0 \ln(1 + e^y)}{a(y)} - \frac{e^y}{e^y + 1} \right]. \quad (\text{III.42})$$

Подставляя далее функцию $G_0(x, y)$ в (III.40), найдем в явном виде линейную поправку к начальному распределению:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{2A(y)}{x} \frac{e^{\xi(y)x-y} [2b_0(y) - \xi(y)] + 2b_0(y)}{(e^{\xi(y)x-y} + 1)^2} - \\ &- \frac{A(y)\xi(y)[\xi(y) + 2b_0(y)]e^{\xi(y)x-y}}{(e^{\xi(y)x-y} + 1)^2} + \frac{2A(y)\xi(y)^2 e^{2(\xi(y)x-y)}}{(e^{\xi(y)x-y} + 1)^3}. \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

На Рис. 4 - Рис. 10 показана эволюция распределений плотности числа частиц и плотности их энергии в первом приближении, при значениях параметра $y = 1, 3, 6, 10$, когда значительная часть частиц начального распределения находится в области с малыми значениями энергии.

III.3. Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ

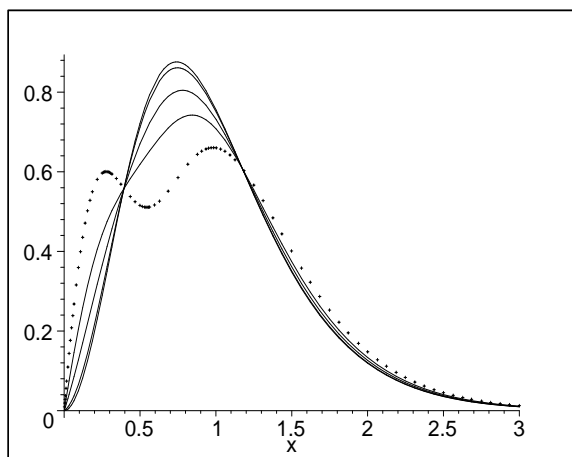


Рис. 4. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 1$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

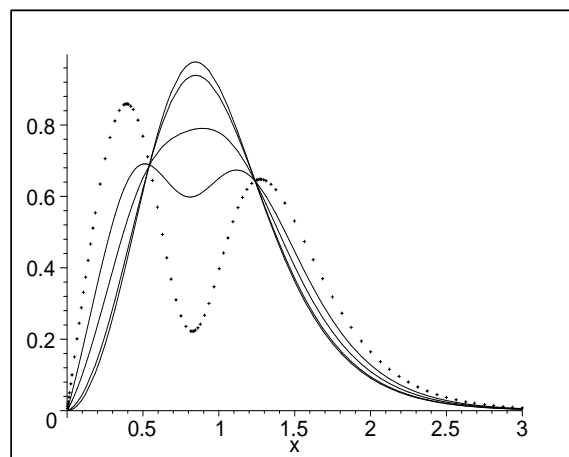


Рис. 5. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 3$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

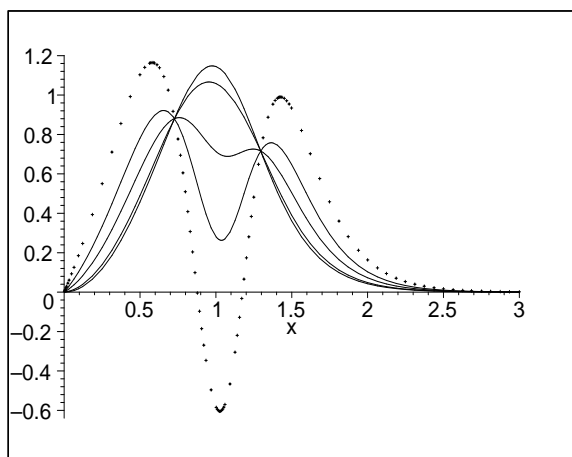


Рис. 6. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 6$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

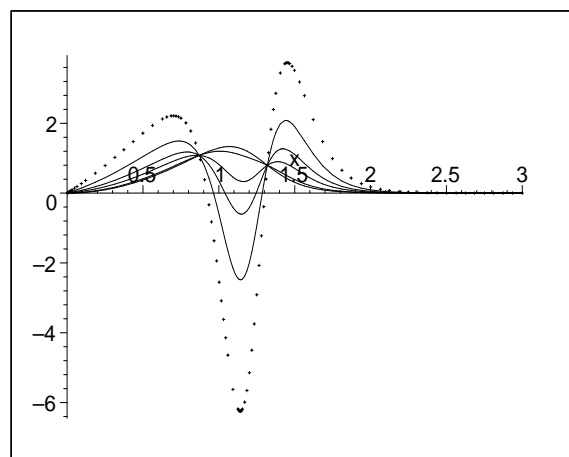


Рис. 7. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 10$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

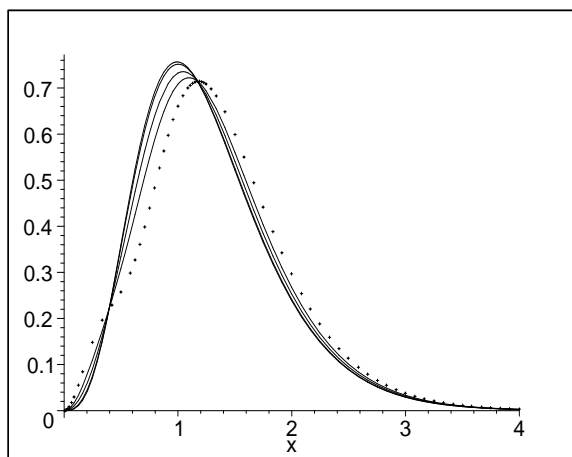


Рис. 8. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 1$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

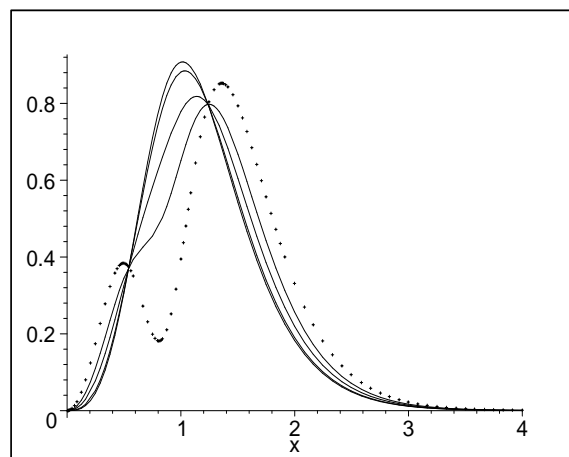


Рис. 9. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 3$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

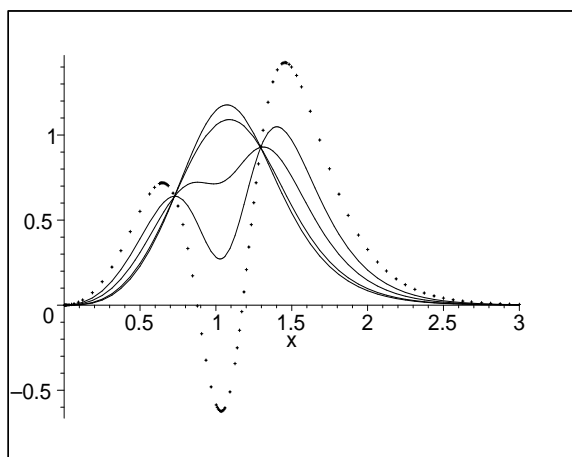


Рис. 10. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 6$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

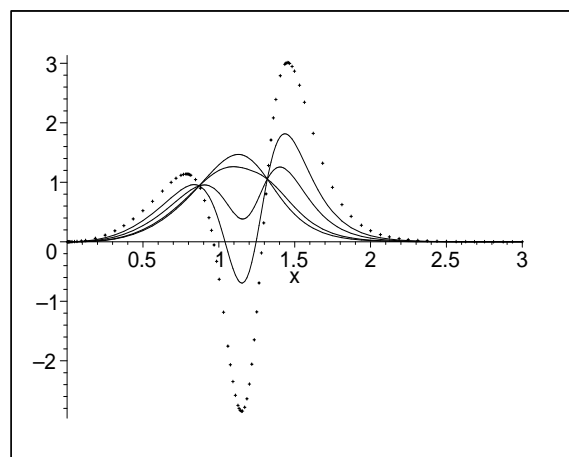


Рис. 11. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, в первом приближении при $y = 10$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0, 01; 0, 05; 0, 1$, точечная линия- $\tau = 0, 2$.

III.3. Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ

Как видно из этих рисунков, а также и последующих:

1. В распределениях как плотности числа частиц, так и плотности их энергии всегда возникают 2 максимума и один минимум, который сдвигается в область больших значений энергии с ростом параметра, y ;
2. Всегда возникает такой момент времени, в который минимум функции распределения принимает отрицательное значение;
3. С течением времени первый минимум смещается в область более низких энергий, второй - в область более высоких значений энергий.

III.3.3 Второе приближение функции распределения

Во втором приближении получим согласно (III.25):

$$G_2 = \frac{\tau^2}{2} g_2; \quad (\text{III.44})$$

$$g_2 = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + 2g_1 b_0 + 2G_0 b_1 \right). \quad (\text{III.45})$$

Подставляя далее G_0 и g_1 в (III.45), найдем в явном виде квадратичную поправку:

$$g_2(x, y) = \frac{A(y)}{x^2 (e^{\xi(y)x-y} + 1)^5} \times$$

$$\{ e^{4\xi(y)x-4y} [(\xi^4(y)x^2 + 16\xi^2(y)xb_0(y) - 4\xi^3(y)x^2b_0(y) -$$

$$16b_0^2(y)x\xi(y) - 2b_1(y)\xi(y)x^2 - 4\xi(y)b_0(y) - 4\xi^3(y)x +$$

$$4b_1(y)x + 8b_0^2(y) + 4b_0^2(y)x^2\xi^2(y)] +$$

$$e^{3\xi(y)x-3y} [12\xi^3(y)x - 11\xi^4(y)x^2 + 16b_1(y)x + 32b_0^2(y) -$$

$$6b_1(y)\xi(y)x^2 + 16\xi^2(y)xb_0(y) - 48b_0^2(y)x\xi(y) -$$

$$12\xi(y)b_0(y) + 4b_0^2(y)x^2\xi^2(y) + 12\xi^3(y)x^2b_0(y)] +$$

$$\begin{aligned}
 & e^{2\xi(y)x-2y}[-12\xi(y)b_0(y) - 6b_1(y)\xi(y)x^2 + 12\xi^3(y)x^2b_0(y) + \\
 & 48b_0^2(y) + 11\xi^4(y)x^2 + 24b_1(y)x + 12\xi^3(y)x - \\
 & 4b_0^2(y)x^2\xi^2(y) - 48b_0^2(y)x\xi(y) - 16\xi^2(y)xb_0(y)] + \\
 & e^{\xi(y)x-y}[-4\xi(y)b_0(y) + 32b_0^2(y) - \\
 & 16\xi(y)^2xb_0(y) - 16b_0^2(y)x\xi(y) - 4\xi^3(y)x^2b_0(y) - \\
 & 4b_0^2(y)x^2\xi^2(y) - 2b_1(y)\xi(y)x^2 - 4\xi^3(y)x + 16b_1(y)x - \\
 & \xi^4(y)x^2] + 4b_1(y)x + 8b_0^2(y)\}.
 \end{aligned}$$

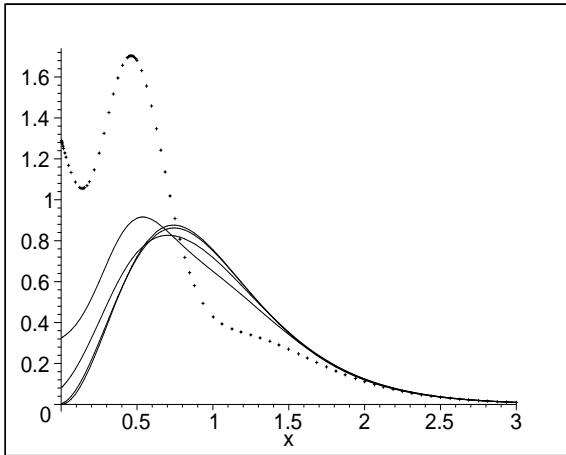


Рис. 12. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 1$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

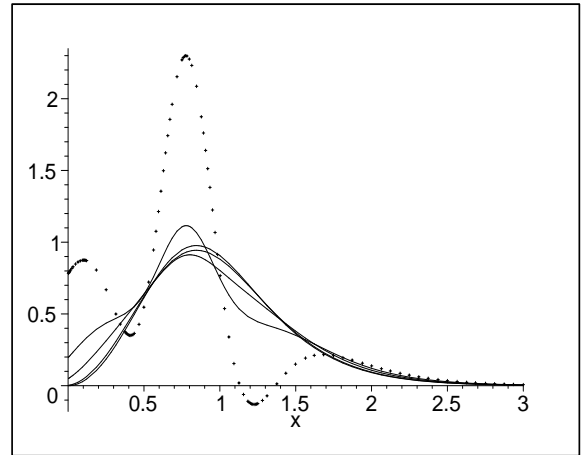


Рис. 13. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 3$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

III.3. Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ

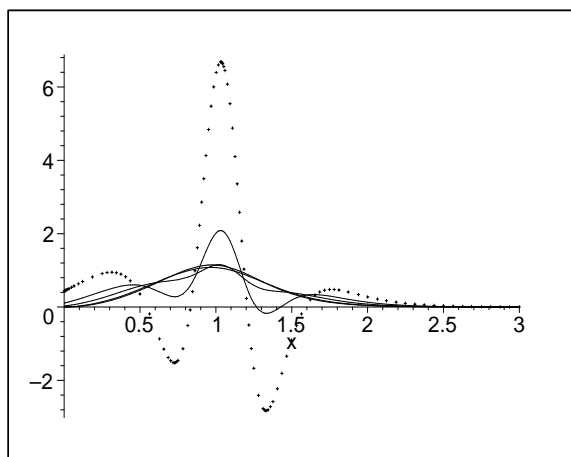


Рис. 14. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 6$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

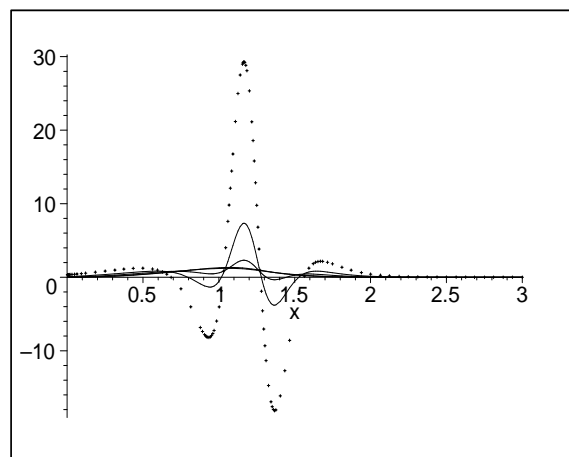


Рис. 15. Эволюция распределения плотности числа частиц, $dn(\tau, x, y) = x^2 G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 10$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

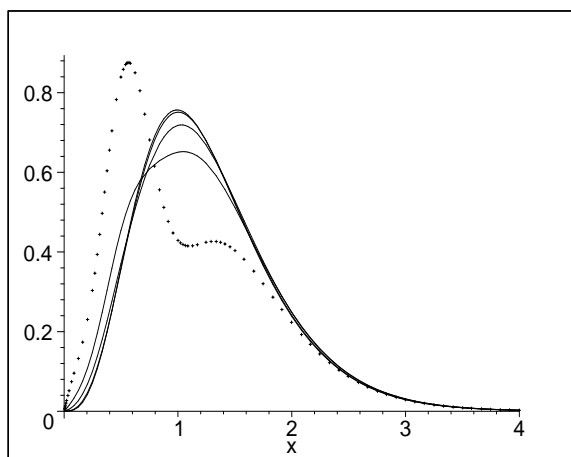


Рис. 16. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 1$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

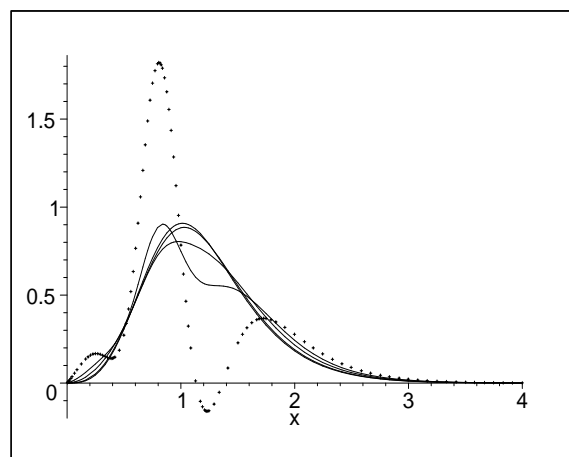


Рис. 17. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 3$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

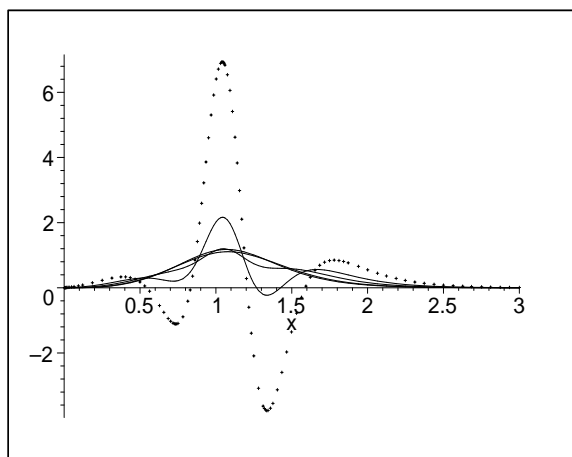


Рис. 18. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 6$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

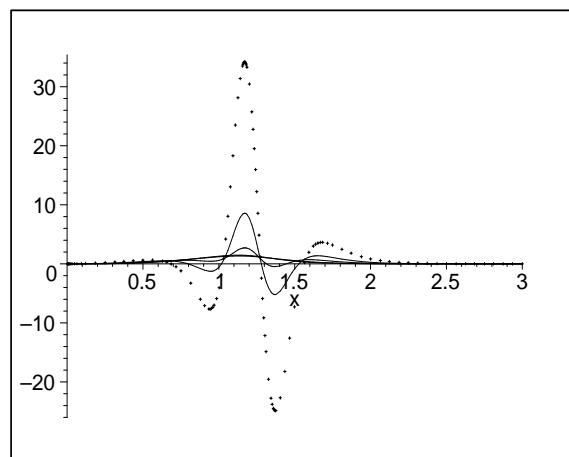


Рис. 19. Эволюция распределения плотности энергии частиц, $d\varepsilon(\tau, x, y) = x^3 G(\tau, x, y)$, во втором приближении при $y = 10$. Сплошные линии слева направо: $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1$, точечная линия- $\tau = 0,2$.

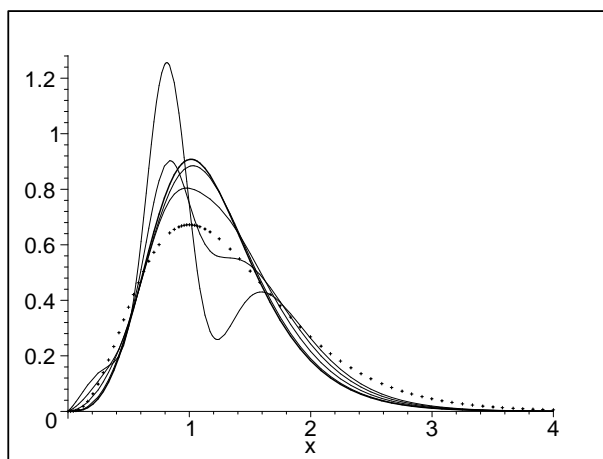


Рис. 20. Релаксация неравновесного распределения при $y = 3$. Первоначальное неравновесное распределение отмечено жирной линией, равновесное распределение (8) - точечной линией. На рисунке тонкими линиями показаны этапы релаксации, отвечающие моментам времени $\tau = 0; 0,01; 0,05; 0,1; 0,15$.

Поскольку функция распределения частиц по определению неотрицательна, ясно что проникновение минимума распределения в область отри-

III.3. Разложение уравнения Фоккера-Планка по малости τ

цательных значений является следствием нарушения условий малости поправок в области определенных значений энергии. Тем не менее рассмотренные приближения достаточно полно описывают глобальные свойства распределения сверхтепловых частиц. Нам представляется весьма важным факт появления двух максимумов в распределении сверхтепловых частиц. С точки зрения предложенной в работах [10], [13] модели происхождения частиц сверхвысоких энергий, первый из этих максимумов в дальнейшем эволюционирует в равновесное распределение, что подтверждают наши расчеты, а второй дает высокоэнергетический хвост сверхтепловых реликтовых частиц.

Глава IV

Асимптотическое приближение интегрального уравнения типа Фоккера-Планка

IV.1 Функция распределения нулевого приближения

В Главе II в качестве начального распределения $G_0(x)$ рассматривалось “реалистическое” квазиступенчатое распределение по энергиям типа белого шума, для демонстрации основных закономерностей эволюции распределения частиц. Однако, поскольку результаты вычислений, как оказалось, весьма слабо зависят от локальных особенностей начального распределения, а лишь определяются двумя параметрами: \mathcal{P}_0 и степенью неравновесности, но при этом фактор “реалистичности” весьма усложняет вычисления, в этой главе мы рассмотрим удобное для расчетов ступенчатое распределение, которое расширяет поле аналитического исследования и позволяет отодвинуть численный анализ на более поздние этапы вычислений:

$$G_0(x) = a\chi(x_0 - x), \quad (\text{IV.1})$$

где $\chi(z)$ - функция Хевисайда (ступенчатая функция). Подставляя эту функцию в условия нормировки (II.65)-(II.66), определим параметры рас-

IV.1. Функция распределения нулевого приближения

предела (IV.1):

$$x_0 = \frac{4}{3}; \quad a = \frac{81}{64}. \quad (\text{IV.2})$$

Нас не должен смущать тот факт, что полученное нормированное распределение не имеет свободных параметров, на самом деле свободный параметр есть. Надо вспомнить определение нормированной импульсной переменной, x (II.55), и нормированного времени, τ (II.62), где \mathcal{P} - конформный импульс, \mathcal{P}_0 - его постоянное среднее значение относительно распределения $\mathcal{G}(\tau, x)$, A - постоянная инвариантной скейлинговой амплитуды рассеяния. Поэтому, фактически, начальное распределение определяется лишь интегральными характеристиками первоначального спектра - средней конформной энергией частиц и степенью неравновесности.

Подставляя распределение (IV.1) в решение (II.77) и используя четность подынтегральных функций, получим:

$$\mathcal{G}(\tau, x) = \frac{81}{128x\sqrt{\pi\tau}} \int_{-x_0}^{x_0} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} z dz. \quad (\text{IV.3})$$

Проводя интегрирование, найдем окончательно:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\tau, x) = & \frac{81}{128} \left[\Phi \left(\frac{x+x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] - \\ & - \frac{81\sqrt{\tau}}{64\sqrt{\pi}x} \left[e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4\tau}} \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

где $\Phi(z)$ - интеграл вероятности (ошибок):

$$\Phi(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz. \quad (\text{IV.5})$$

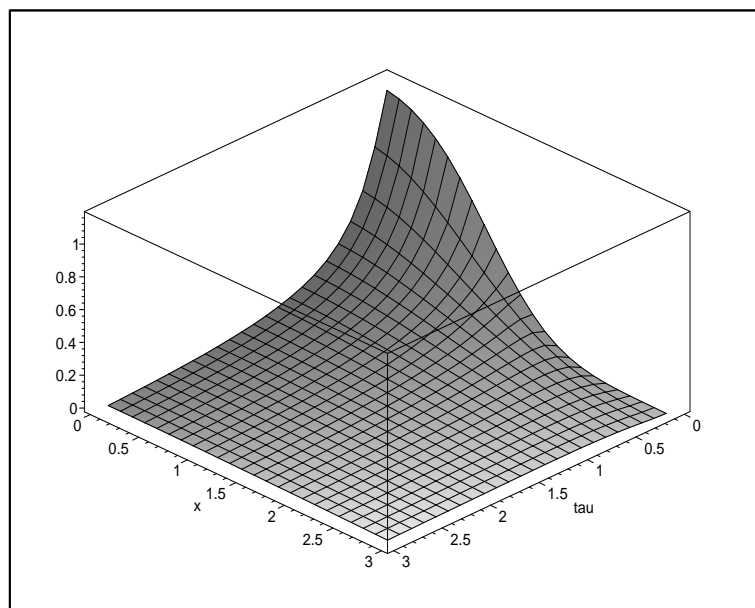


Рис. 1. Трехмерный график функции (IV.4).

Временная эволюция этого распределения показана на Рис. 2. На Рис. 3 и Рис. 4 показана временная эволюция распределения плотности числа частиц и плотности энергии относительно распределения (IV.4):

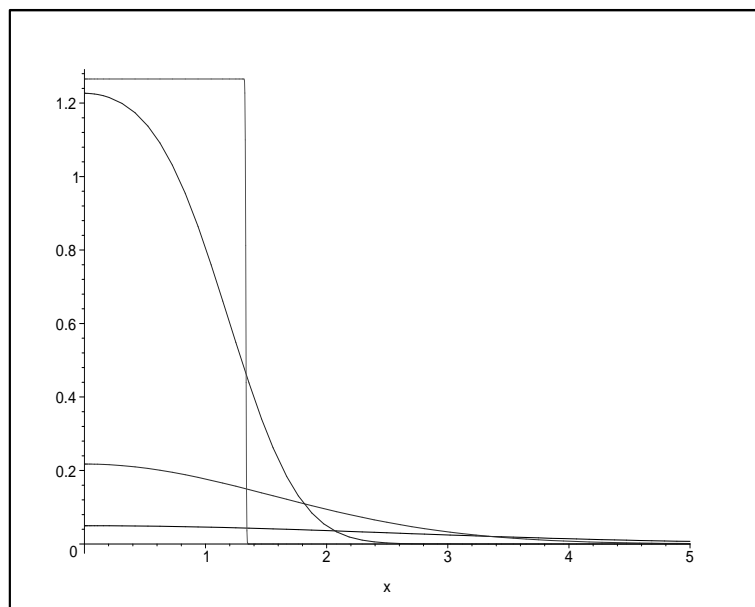


Рис. 2. Эволюция распределения (IV.4); сверху вниз:
 $\tau = 0, \tau = 0,1, \tau = 1, \tau = 3$.

IV.1. Функция распределения нулевого приближения

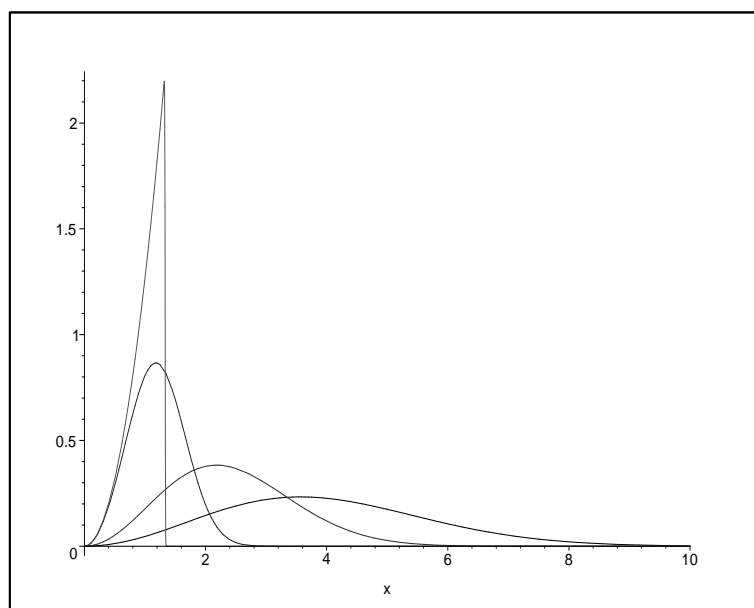


Рис. 3. Эволюция распределения конформной плотности числа частиц, $d\mathcal{N} = x^2 \mathcal{G}(\tau, x)$ относительно распределения (IV.4); слева-направо: $\tau = 0, \tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3$.

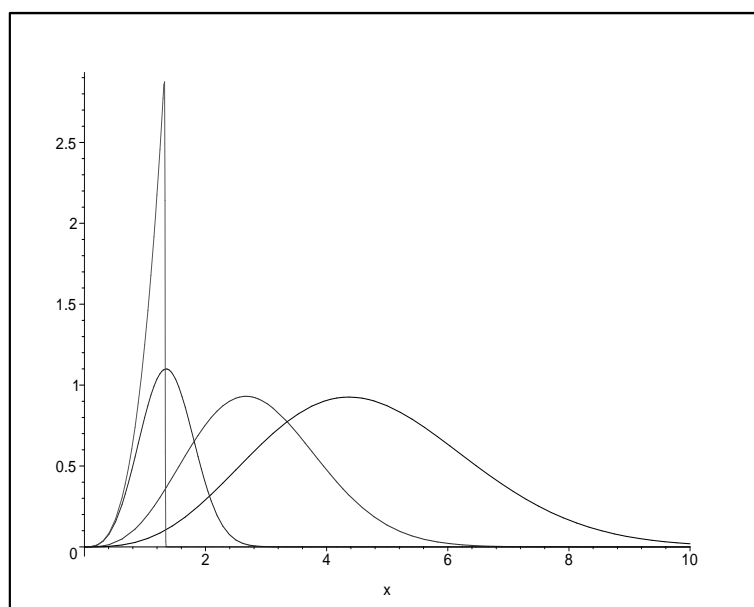


Рис. 4. Эволюция распределения конформной плотности энергии частиц, $d\mathcal{E} = x^3 \mathcal{G}(\tau, x)$ относительно распределения (IV.4); слева-направо: $\tau = 0, \tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3$.

IV.2 Функция распределения первого приближения

Заметим, что выполнение закона сохранения энергии обеспечивается наличием члена с функцией $b(\tau)$ в правой части диффузионного уравнения (II.63), отсутствие которого не учитывает процесса перекачки энергии при малых временах эволюции. Будем теперь полагать, что $b(\tau)$ - малая, но отличная от нуля величина. Тогда разлагая уравнение (II.63) в ряд по малости $b(\tau)$ и представляя его решение в виде ряда:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \dots, \quad (\text{IV.6})$$

в нулевом приближении получим уравнение теплопроводности в сферической системе координат относительно функции \mathcal{G}_0 . Таким образом, функция распределения нулевого приближения определяется решением (II.77). Тогда для линейной по $b(\tau)$ поправки получим неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \tau} + f(\tau, x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \left(\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x} \right), \quad (\text{IV.7})$$

где введены обозначения

$$f(\tau, x) = -\frac{2b_0(\tau)}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \mathcal{G}_0(\tau, x); \quad (\text{IV.8})$$

$$b_0(\tau) = \int_0^{\infty} \mathcal{G}_0(\tau, x) x dx. \quad (\text{IV.9})$$

Учитывая (IV.4) и интегрируя в (IV.9), получим:

$$b_0(\tau) = a \left[\Phi \left(\frac{x_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \left(\frac{x_0^2}{2} - t \right) + \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} x_0 \exp \left(-\frac{x_0^2}{4\tau} \right) \right], \quad (\text{IV.10})$$

куда необходимо в дальнейшем подставить из (IV.2) значения для a и x_0 .

Используем решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} + f(t, \vec{r}) \quad (\text{IV.11})$$

IV.2. Функция распределения первого приближения

(см., например, [100]):

$$u(t, \vec{r}) = \frac{1}{8\pi^{2/3}t^{3/2}} \iiint_{V_0} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t}} u(0, \vec{r}_0) d^3\vec{r}_0 - \frac{1}{8\pi^{2/3}} \int_0^t \frac{dt_0}{t_0^{3/2}} \iiint_{V_0} e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4t_0}} f(t_0, \vec{r}_0) d^3\vec{r}_0, \quad (\text{IV.12})$$

где интегрирование проводится по всему трехмерному пространству V_0 . Перейдем затем к сферической системе координат в пространстве импульсов и проведем интегрирование по его угловым переменным, учитывая тот факт, что по определению начальное значение нулевого приближения функции $\mathcal{G}_0(0, x)$ совпадает с начальным значением самой функции $\mathcal{G}(0, x)$. Тогда в формуле (IV.12)

$$\mathcal{G}(0, x) = 0,$$

и мы получим:¹

$$\mathcal{G}_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \times \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4t}} \right] \frac{\partial}{\partial y} y^2 \mathcal{G}_0(t, y).$$

Поскольку решение (IV.3) (или (IV.4)) является четной функцией переменной x ,

$$\mathcal{G}_0(\tau, -x) = \mathcal{G}_0(\tau, x), \quad (\text{IV.13})$$

в чем нетрудно убедиться, то решение для поправки к функции распределения можно представить в более компактном виде:

$$\mathcal{G}_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{y} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \frac{\partial}{\partial y} y^2 \mathcal{G}_0(t, y). \quad (\text{IV.14})$$

¹Здесь и далее мы для простоты обозначений мы вводим переменную $t = \tau'$

Проводя интегрирование по частям во внутреннем интеграле (IV.14), получим окончательно:

$$\mathcal{G}_1(\tau, x) = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{dt}{\sqrt{t}} b_0(t) \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \mathcal{G}_0(t, y) \left(1 + \frac{y^2}{2t} - \frac{xy}{2t}\right). \quad (\text{IV.15})$$

Необходимо отметить, что встречающиеся здесь и далее интегралы вида (IV.15) крайне неудобны для численного анализа как при малых временах, при которых показатель подынтегральной экспоненты стремится к $-\infty$, так и при малых значениях импульсной переменной. В обоих этих случаях интегралы медленно сходятся. Наличие экспоненты в подынтегральном выражении (IV.15) приводит к тому, что главный вклад в интеграл дают значения y , близкие к x . В связи с этим рассмотрим асимптотическое значение этих интегралов при $t \rightarrow 0$. Согласно известной теореме метода Лапласа (см., например [101]) справедливо разложение:

$$F(t) = \int_{-a}^a e^{-tz^2} \varphi(z) dz \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(0)}{n!2^{2n}} t^{-n-1/2}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{IV.16})$$

где $\varphi(x)$ - аналитическая функция, регулярная в точках отрезка $-a, +a$. Для функций $F(t, x)$ вида:

$$F(t, x) = \int_{-a}^a e^{-t(z-x)^2} \varphi(z) dz$$

выражение (IV.16) принимает вид:

$$F(t, x) \approx \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}(x)}{n!2^{2n}} t^{-n-1/2}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{IV.17})$$

Таким образом, при $t \rightarrow +0$ имеет место асимптотическая оценка:

$$\int_{-a}^a e^{-\frac{(z-x)^2}{4t}} \varphi(z) dz \approx \sqrt{\frac{\pi}{t}} \varphi(x), \quad (\text{IV.18})$$

IV.2. Функция распределения первого приближения

для $x \in (-a, a)$. Применяя асимптотическую оценку (IV.18) к выражению (IV.15) получим асимптотическую оценку для функции $\mathcal{G}_1(\tau, x)$:

$$\mathcal{G}_1(\tau, x) \approx \frac{1}{x} \int_0^\tau \frac{dt}{t} \mathcal{G}_0(t, x) b_0(t). \quad (\text{IV.19})$$

Таким образом, при подстановке нулевого приближения (IV.4), а также (IV.10) в (IV.19), получим явное выражение для первой поправки.

На Рис. 5, Рис. 6 показаны результаты численного моделирования процесса эволюции сверхтеплого ультрарелятивистского компонента космологической плазмы на основе оценки (IV.19).

В распределениях плотности энергии частиц, также как и в Главе II, возникают локальный минимум и два максимума, второй из которых с течением времени сдвигается в область больших значений энергии.

На Рис. 7 показана временная эволюция функции $b(\tau)$ в первом приближении, из которого видно, что функция быстро уменьшается со временем, что подтверждает верность гипотезы о малости $b(\tau)$ при больших временах эволюции.

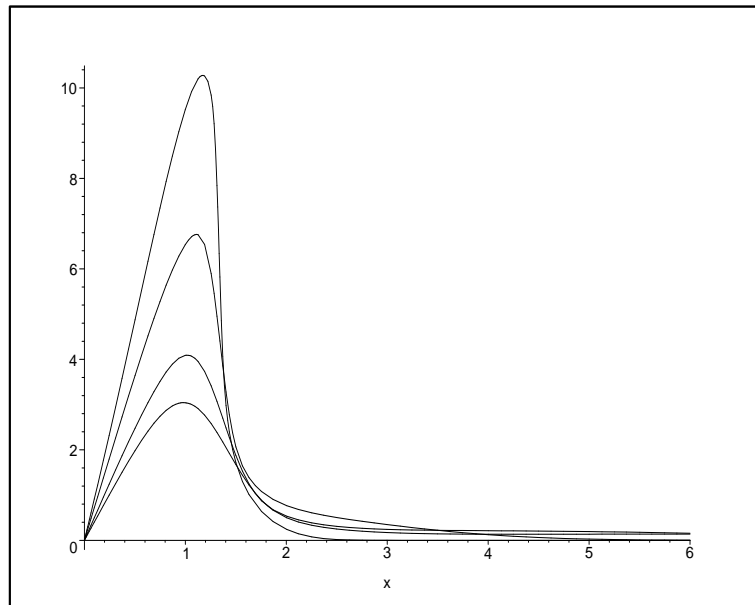


Рис. 5. Временная эволюция распределения плотности числа частиц, функции $x^2 \mathcal{G}(\tau, x)$, сверху вниз: $\tau = 0, 1, \tau = 3, \tau = 10$.

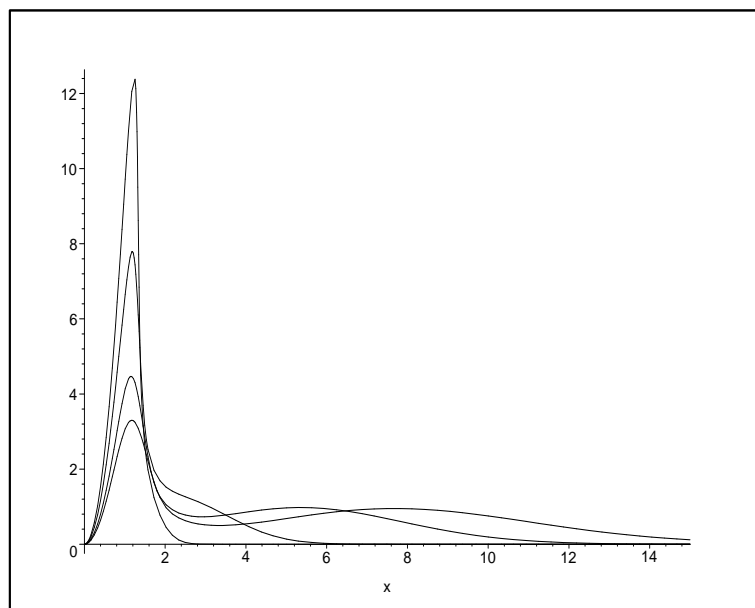


Рис. 6. Временная эволюция распределения плотности энергии частиц, функции $x^3 \mathcal{G}(\tau, x)$, сверху вниз: $\tau = 0, 1, \tau = 1, \tau = 3, \tau = 10$.

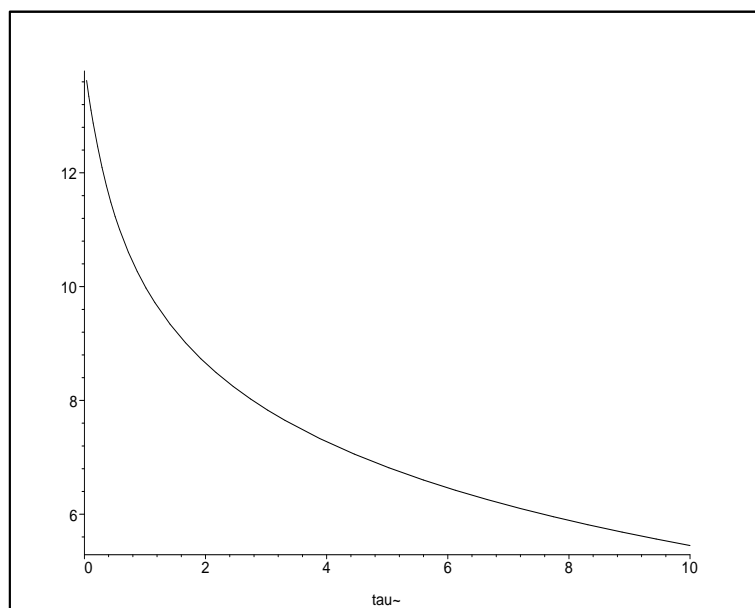


Рис. 7. График функции $b(\tau)$ в первом приближении.

Заключение

1. На основе интегро-дифференциального релятивистского уравнения типа Фоккера-Планка и в предположении восстановления скейлинга в области сверхвысоких энергий частиц сформулирована математическая модель эволюции сверхтепловой ультрарелятивистской компоненты космологической плазмы при наличии скейлинга. Сформулированы начальные и граничные условия модели, соответствующие космологической постановке задачи.
2. Осуществлена проверка сформулированной модели на выполнение интегральных законов сохранения плотности числа частиц и энергии.
3. Исследован упрощенный вариант модели, сводящийся к трехмерному уравнению теплопроводности для сферически-симметричного распределения по импульсам. Найдено и исследовано решение упрощенной задачи в квадратурах.
4. Найдено в квадратурах формальное решение полного интегро-дифференциального уравнения модели в виде разложения функции распределения в ряд Тейлора по малому времени космологической эволюции. При этом получены рекуррентные соотношения между коэффициентами разложения и доказано выполнение интегральных законов сохранения для каждого члена ряда. В явном виде найдено решение уравнения модели во втором по космологическому времени приближении.

5. Найдено в квадратурах асимптотическое решение полного интегродифференциального уравнения модели для больших времен космологической эволюции.
6. На основе полученных решений разработаны программные процедуры численного моделирования космологической эволюции сверхтепловой компоненты плазмы.
7. С помощью созданных программных средств проведено численное моделирование космологической эволюции сверхтепловой ультрарелятивистской компоненты плазмы и выявлены основные закономерности этого процесса. Доказан факт формирования двух максимумов в распределениях энергии сверхтепловых частиц.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность научному руководителю, профессору Ю.Г. Игнатьеву, за постановку всех задач, постоянную моральную и научную поддержку на протяжении всей работы.

Список литературы

- [1] Игнатъев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения и космология/Ю.Г.Игнатъев// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц / Под редакцией - К.П.Станюковича - М.: - Атомиздат.- 1980. - Выпуск 11 - С. 113-124.
- [2] Игнатъев Ю. Г. Релятивистская кинетическая теория и конформные преобразования/Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1982. - т. 25. -№.4.- С. 92-96.
- [3] Балакин А. Б., Игнатъев Ю. Г., Шуликовский В.Ю. Кинетика изотропного расширения однородной электронно-фотонной плазмы/А. Б. Балакин, Ю. Г. Игнатъев, В.Ю. Шуликовский// Известия ВУЗов, Физика, - 1982. -т. 25. - №.9. - С. 53-57.
- [4] Балакин А. Б., Игнатъев Ю. Г., Шуликовский В.Ю. Кинетика изотропного расширения оптически прозрачной плазмы на комптоновской стадии/А. Б. Балакин, Ю. Г. Игнатъев, В.Ю. Шуликовский// Известия ВУЗов, Физика, - 1982. - т. 25. - №.10, - С. 82-85.
- [5] Ignatyev Yu.G., Alsmadi K. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. I. Exact model/Yu.G.Ignatyev, K.Alsmedi// Gravitation & Cosmology, - 2005. - Vol. 11. - No 3. - P. 252-258.
- [6] Ignatyev Yu.G., Alsmadi K. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. II. Numerical

Литература

- model/Yu.G. Ignatyev, K.Alsmadi// Gravitation & Cosmology, - 2005. - Vol. 11. - No 4. - P.363-368.
- [7] Ignatyev Yu.G., Alsmadi K. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. III. Specific Entropy Calculation/Yu.G. Ignatyev, K. Alsmadi// Gravitation & Cosmology, - 2007. - Vol. 13. - No 2. - P.114-118.
- [8] Игнатъев Ю.Г. Релятивистская кинетика и космология. I /Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1980. - 23. - №.8, 1980, с. 42-47.
- [9] Игнатъев Ю.Г. Релятивистская кинетика и космология. II /Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1980. - 23. - №.9. - С. 27-32.
- [10] Игнатъев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной/Ю.Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1986. - т.29. - №.2. - С. 27-32.
- [11] Игнатъев Ю.Г. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной/Игнатъев Ю.Г. - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации.- Тезисы докл. Всесоюзной конференции. -, Москва. 1984. - с. 19-21.
- [12] Игнатъев Ю.Г. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной/Ю.Г. Игнатъев// Астрономический журнал, - 62, №. 4, 1985, с. 633-638.
- [13] Игнатъев Ю.Г. Космологические последствия скейлинга/Ю. Г. Игнатъев// Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной / Под редакцией - Игнатъева Ю.Г. - Издательство КГПИ. - Казань. - 1988.- С. 62-84.
- [14] Л.Д.Ландау /Л.Д.Ландау// ЖЭТФ, - 1937, - с. 203-210.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [15] Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Статистическая физика/Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц - 1964. - М.: Наука. 568 с..
- [16] Игнатъев Ю.Г. О кинетическом уравнении в общей теории относительности/Ю.Г.Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1979. - т.22. - №.2. - С.72-76.
- [17] Игнатъев Ю.Г. Кинетическая модель бариогенезиса в симметричной горячей Вселенной/Ю. Г. Игнатъев// Классические и квантостатистические проблемы релятивистской теории гравитации / Под редакцией - Игнатъева Ю.Г. - Издательство КГПИ, Казань. - 1991. - С.6-21.
- [18] Lichnerovich A., Marrot R. Proprietes statistiques des ensembles de particules en relativite restreinte/A.Lichnerovich,R.Marrot// C.R., - 1940. - V.210. - P. 759-761.
- [19] Климонтович Ю.Л. Релятивистское уравнение для квантовой функции распределения/Ю.Л.Климонтович// Доклады Акад. Наук СССР, - 1952. - т. 87. - Вып. 6. - С.927-930.
- [20] Климонтович Ю.Л. Релятивистские уравнения для плазмы. I./Ю.Л.Климонтович// Журн. эксперим. и теорет. физ., - 1959. - т. 37. - С.735-746.
- [21] Климонтович Ю.Л. Релятивистские уравнения для плазмы. II./Ю.Л.Климонтович// Журн. эксперим. и теорет. физ., - 1960. - т. 38. - С.1212-1224.
- [22] Черников Н.А. Релятивистское кинетическое уравнение и равновесное состояние газа в статическом сферически-симметричном гравитационном поле/А.Н.Черников// Доклады Акад. Наук СССР, - 1960. - т. 133. - С.333-336.

Литература

- [23] Черников Н.А. Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле/А.Н.Черников// Доклады Акад. Наук СССР, - 1962. - т. 144. - С.89-92.
- [24] Tauber G.E., Weinberg J.W. Internal state of a gravitating gas/G.E.Tauber, J.W.Weinberg// Phys. Rev., - 1961. - V. 122. - P.1342-1365.
- [25] Черников Н.А. Релятивистское распределение Максвелла-Больцмана и интегральная форма законов сохранения/А.Н.Черников// Доклады Акад. Наук СССР, - 1962. - т. 144. - С.544-547.
- [26] Chernikov N.A. The macroscopic foudation of the relativistic hydrodynamics/A.N.Chernikov// Acta Phys. Polon., - 1965. - V. 27. - P.723-739.
- [27] Власов А.А. Статистические функции распределения /А.А.Власов - М.: Наука,1966. - 356 с..
- [28] Игнатьев Ю.Г. Взаимодействие высокотемпературной плазмы, находящейся в гравитационном поле, с электромагнитным излучением I. Общая теория/Ю.Г.Игнатьев// Известия Вузов, Физика, - 1975. - т.18, №. 6, - С.7-15..
- [29] Игнатьев Ю.Г. Равновесные состояния релятивистского заряженного газа в рамках общей теории относительности/Ю.Г.Игнатьев// Украинский физ. журнал, - 1976. - т.18. - № 12. -С.1971-1977.
- [30] Игнатьев Ю.Г. О статистической динамике ансамбля частиц в ОТО/Ю.Г.Игнатьев// Гравитация и теория относительности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1978. - Выпуск 14. - С. 90-107.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [31] Игнатъев Ю.Г. Локальные свойства релятивистского максвелловского распределения частиц в гравитационном поле /Ю.Г.Игнатъев// Гравитация и теория относительности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1980. - Выпуск 16. - С. 65-72.
- [32] Игнатъев Ю.Г. Локальная температура статистической системы в общей теории относительности /Ю.Г.Игнатъев// Гравитация и теория относительности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1980. - Выпуск 16. - С. 73-75.
- [33] Игнатъев Ю.Г. Равновесные макроскопические движения релятивистского гравитирующего газа заряженных частиц /Ю.Г.Игнатъев// Гравитация и теория относительности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1980. - Выпуск 17. - С. 56-70.
- [34] Игнатъев Ю. Г. Бесстолкновительный газ в поле плоской гравитационной волны/Ю. Г. Игнатъев// Журнал эксперим. и теоретич.физики, - 1981. - т.81.- № 1. - С. 3-12.
- [35] Игнатъев Ю. Г. Космология, кинетика и масса покоя нейтрино/Ю. Г. Игнатъев// Гравитация и теория относительности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1981. - Выпуск 18. - С. 73-75.
- [36] Игнатъев Ю. Г., Шуликовский В.Ю. Столкновительная релаксация плазмы в поле плоской гравитационной волны/Ю. Г. Игнатъев, В.Ю. Шуликовский// Известия ВУЗов, Физика, - 1982. - т. 25. -№10. -С. 85-92.

Литература

- [37] Игнатъев Ю.Г. Движение идеальной жидкости в поле плоской гравитационной волны/Ю.Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1982. -т. 25. - №.11. - С. 96-99.
- [38] Игнатъев Ю. Г. Идеальная жидкость с предельно жестким уравнением состояния в поле плоской гравитационной волны/Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1982. - 25. - №.11. - С.99-102.
- [39] Игнатъев Ю. Г. Кинетическое уравнение и массовая поверхность/Ю. Г. Игнатъев// Гравитация и теория относительности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1983. - Выпуск 19. - С. 79-88.
- [40] Игнатъев Ю. Г. Статистическая динамика ансамбля классических частиц в гравитационном поле/Ю. Г. Игнатъев// Гравитация и теория относительности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1983. - Выпуск 20. - С. 50-109.
- [41] Игнатъев Ю. Г. Действие плоских гравитационных волн на плазмopodobные среды и жидкости/Ю.Г.Игнатъев// Космические исследования на Украине / Под редакцией - Писаренко Г.С. - Киев: Наукова Думка. - 1983. - Выпуск 17,С. 65-66.
- [42] Balakin A.B., Ignat'ev Yu.G. The effect of a gravitational wave at the contact of conductors/A.B.Balakin, Yu.G.Ignat'ev// Physics Letters., - 1983. - Vol. 96A. -P. 10-11.
- [43] Игнатъев Ю.Г. Релятивистский канонический формализм и инвариантная одночастичная функция/Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1983. -т.26. - №.8. - С. 15-19.
- [44] Игнатъев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле/Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1983. -т.26. - №.8. - С. 19-23.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [45] Игнатъев Ю.Г. Законы сохранения и термодинамическое равновесие в общерелятивистской кинетической теории неупруго взаимодействующих частиц/Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1983. - т.26. - №.12. - С. 9-14.
- [46] Игнатъев Ю.Г. Идеальная жидкость с коротким скалярным взаимодействием в поле плоской гравитационной волны/ Ю. Г. Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1983. - т.26. - №.12. - С. 7-9.
- [47] Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Действие гравитационных волн на радиационно-доминированную плазму/Ю.Г.Игнатъев, В.Ю.Шуликовский// ВИНТИ, - 1984. - №.1532-84. - Деп., - 34с.
- [48] Игнатъев Ю.Г., Шуликовский В.Ю. Затухание гравитационных волн в ранней Вселенной/Ю. Г. Игнатъев, В.Ю.Шуликовский// ВИНТИ, - 1984. - № 1531-84. - Деп., - 10с.
- [49] Игнатъев Ю.Г., Кузеев Р.Р. Термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы со скалярным взаимодействием/Ю.Г. Игнатъев, Р.Р. Кузеев// Украинский физический журнал, - 1984. - т.29. - №.7. - С. 1021-1025.
- [50] Игнатъев Ю.Г. Магнитоактивная бесстолкновительная плазма в поле длинноволнового гравитационного излучения/Ю.Г.Игнатъев// Украинский физический журнал, - 1984. - т.29. - №.7. - С.1025-1029.
- [51] Балакин А.Б., Игнатъев Ю.Г. Действие плоских гравитационных волн на бесстолкновительные плазмоподобные среды/А. Б. Балакин, Ю. Г. Игнатъев// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц / Под редакцией - Станюковича К.П. - М. : Энергоатомиздат. - 1984. -Выпуск 14. - С.43-62.
- [52] Игнатъев Ю.Г. Релятивистская кинетика анизотропной плазмоподобной среды с затуханием в поле гравитационного излуче-

Литература

- ния/Ю.Г.Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1984. - т.27. -№ 12. -С. 70-74.
- [53] Игнатъев Ю.Г. Резонансная генерация плазменных колебаний плоской гравитационной волной/Ю.Г.Игнатъев// Известия ВУЗов, Физика, - 1985. - т.28. - № 1. -С.74-77.
- [54] Ю.Г. Игнатъев, Н.Р. Хуснутдинов Действие плоских гравитационных волн на однородную магнитоактивную плазму/Ю.Г. Игнатъев, Н.Р. Хуснутдинов// Украинский физический журнал, - 1986. - т.31. - №.5. -С.707-715.
- [55] Игнатъев Ю.Г. Кинетические процессы в релятивистских полях тяготения/Ю.Г. Игнатъев// Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, - Казань, Казанский государственный педагогический институт. - 1986. - 359 С.
- [56] Игнатъев Ю.Г., Смирнов А.В. Колебания анизотропной ограниченной плазмы в поле слабой гравитационной волны/Ю.Г. Игнатъев, А. В.Смирнов// Украинский физический журнал, - 1987. - т.32. - №. 6. - С.1917-1925.
- [57] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика/А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий - 1969. - М.: Наука. 624 с..
- [58] Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики/Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. - 1977. - М.: Наука. 367 с..
- [59] Alvares E.J. On the transport equations for a one component relativistic gas/E.J.Alvares// J. Phys. and Math. Gen., - 1976. - Vol.9. - P.1861-1875.
- [60] Иванов Г.Г. Уравнение Улинга - Уленбека и квантовая статистика идеальных газов в ОТО/Г.Г.Иванов // Гравитация и теория относительности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- тельности / Под редакцией - В.Р.Кайгородова - Казань: изд-во КГУ. - 1978. - Выпуск 14. - С. 80-89.
- [61] Исихира А. Статистическая физика/А.Исихира - М.: Мир. -1973. - 526 с..
- [62] de Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch.G. Relativistic Kinetic Theory/S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen, van Ch.G. Weert - North-Holland Publishing Company: Amsterdam - New-York - Oxford. -1980. -422 p..
- [63] Syng J.L. Relativity: The General Theory/J.L.Syng - North-Holland Publishing Company: Amsterdam. - 1960. - 432 p..
- [64] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности/А.З.Петров - 1966. - М.: Наука. - 496с..
- [65] Cartan E. Les espaces de Finsler/E. Cartan - 1934.- Paris. - 234 p..
- [66] Черников Н.А., Шавохина Н.С. Принцип конформной инвариантности. /Н.А.Черников, Н.С.Шавохина// Новейшие проблемы гравитации, Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума, - 1973. - М: Изд-во ВНИИФТРИ. - С.40-42.
- [67] Ehlers I., Geren P., Sachs R. K. Isotropic solutions of the Einstein - Liouville equations /I.Ehlers, P.Geren, R.K.Sachs// J. Math.Phys., - 1968. - Vol.9. - P.1344-1361.
- [68] Орлов С.В. Релятивистское расширение бозе- конденсата/Орлов С.В.// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц / Под редакцией - Станюковича К.П. -М.: Энергоатомиздат. -1985. - Выпуск 16. - С.119-122.
- [69] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной /Я.Б.Зельдович Я.Б., И.Д.Новиков - М.: Наука. -1975. -736с..

Литература

- [70] Козик В.С., Любимов В.А., Новиков Е.Г., Нозик В.З., Третьяков Е.Ф. Об оценке массы ν_e по спектру β - распада трития в валине/В.С.Козик, В.А.Любимов, Е.Г.Новиков, В.З.Нозик, Е.Ф.Третьяков// Ядерная физика, - 1980. -Т.32. - С. 301-303.
- [71] Pilkuhn Н.М. Relativistic Particle Physics/Н.М.Pilkuhn - New York-Heidelberg-Berlin. - Springer-Verlag. - 1982. - 544р..
- [72] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения/Н.Н.Лебедев - 1963. - Москва-Ленинград. - ГИФМЛ. - 360 с.
- [73] Janke E., Emde F., Lösch F. Tafeln Höherer Funktionen/E. Janke, F. Emde, F.Lösch - 1960. - Stuttgart. - B.G.Teubner Verlagsgesellschaft.
- [74] А.Д.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев Интегралы и ряды. Дополнительные главы/А.Д.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев - 1986. - М.: Наука. - 800 с.
- [75] Х. Пилькун Физика релятивистских частиц/Х. Пилькун - 1983. - М.: Мир. - 542 с.
- [76] Л.Б. Окунь Лептоны и кварки/Л.Б. Окунь - 1981. - М.: Наука. - 304 с.
- [77] С. Де Гроот, В. Ван Леувен, Х. Ван Верт Релятивистская кинетическая теория. Принципы и применения/С. Де Гроот, В. Ван Леувен, Х. Ван Верт - 1983. - М.: Мир. - 422 с.
- [78] Я.Б. Зельдович, М.Ю. Хлопов Масса нейтрино в физике элементарных частиц и космологии ранней Вселенной/Я.Б. Зельдович, М.Ю. Хлопов - Успехи физ. наук.1981. - Т.135. - С.45-77
- [79] Л.Д. Ландау Л.Д. Ландау. Собрание трудов, том 1/Л.Д. Ландау - 1969. - М.: Наука. - 512 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [80] Игнатьев Ю.Г., Кузеев Р.Р. Кинетическая теория равновесной самогравитирующей плазмы /Ю.Г. Игнатьев, Р.Р. Кузеев// II Всесоюзное совещание по избранным вопросам статистической физики / Под редакцией - Москва:- 1982. - С. 54-55.
- [81] Игнатьев Ю.Г. Локальная температура неравновесного релятивистского газа в стационарных полях тяготения/Ю.Г.Игнатьев// Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии. / Под редакцией - Кайгородова В.Р. - Казань: изд-во КГУ. - 1976. - С. 85.
- [82] Игнатьев Ю.Г., Башкова Е.В. Космологические последствия влияния классического скалярного поля на массы элементарных частиц /Ю.Г.Игнатьев, Башкова Е.В.// Проблемы теории гравитации и элементарных частиц / Под редакцией - К.П.Станюковича - М.: - Энергоатомиздат.- Выпуск 18.
- [83] Брагинский С.Н. Явление переноса в плазме. /Брагинский С.Н.// Вопросы теории плазмы., - 1963. - М: Госатомиздат,- Вып. I - С.183-272.
- [84] Иден Р. Соударения элементарных частиц при высоких энергиях./Иден Р. - М.: Наука. -1970. -392с.
- [85] Игнатьев Ю.Г. Нарушения термодинамического равновесия в ранней вселенной/Игнатьев Ю.Г. - Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации.- Тезисы докл. Всесоюзной конференции. -, Москва. 1984. - с. 18-19.
- [86] Okun L.B., Zeldovich Ja.B. /L.B.Okun, Ja.B.Zeldovich// Comments on Nucl. and Part. Physics, - 1976. - Vol. 6. - P. 69-73.
- [87] Ignat'ev A.Yu., Krasnikov N.V., Kuzmin V.A., Tavheligidze A.N. /A.Yu.Ignat'ev, N.V.Krasnikov, V.A.Kuzmin, A.N.Tavheligidze// Phys. Letters, - 1978. - V. 76B. - P. 436 - 439.

Литература

- [88] Weinberg S. Cosmological Production of Baryons/S.Weinberg// Phys. Rev. Lett., - 1979. - V.42. - P. 850-853.
- [89] Weinberg S. Beyond the first Three Minutes/S.Weinberg// Physics Scripta, - 1981. - V.21. - P.773-791.
- [90] Долгов А.Д., Зельдович Я.Б. Космология и элементарные частицы/А.Д.Долгов, Я.Б.Зельдович// Успехи физ. наук, - 1980. - Т.130. - С.559-614.
- [91] Froissart M. /Froissart M.// Phys. Rev., - 1961. - V.123. - p. 1053.
- [92] Martin A. /Martin A.// Phys. Rev., - 1963. - V.129. - p. 1432.
- [93] Martin A. /Martin A.// Nouvo. Cim., - 1966. - V.142. - p. 930.
- [94] Jin Y.S., Martin A. /Jin Y.S., Martin A.// Phys. Rev., - 1964. - V.135B. - p. 1369.
- [95] Sugawara M. /Sugawara M.// Phys. Rev. Lett., - 1965. - V.14. - p. 336.
- [96] Bjorken J.D., Paschos E.A. /Bjorken J.D., Paschos E.A.// Phys. Rev., - 1969. - V.185. - p. 1975.
- [97] Feynman R.P. /Feynman R.P.// Phys. Rev. Lett., - 1969. - V.23. - p. 1415.
- [98] Л.П.Грищук /Л.П.Грищук// ЖЭТФ, - 1974. - т.67. - С. 825.
- [99] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений/И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. - М.: Физматгиз. -1963.
- [100] С.Л.Соболев Уравнения математической физики/С.Л.Соболев - М.: Наука. -1966.
- [101] М.А.Евграфов Аналитические функции/М.А.Евграфов - М.: Наука. -1991.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [102] Ф.Клоуз Кварки и партонны. Введение в теорию/Ф.Клоуз - Москва: Мир. - 1982. - 438 с.
- [103] Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия./Ландау Л.Д.// Журн. эксперим. и теорет. физ., - 1937. - № 4. - С.203-210.
- [104] Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early Universe./Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov// Gravitation & Cosmology, - 2006. - Vol. 12. - No 4. - P.289-298.
- [105] Ignatyev Yu.G., Ziatdinov R.A. Diffusion model of evolution of superthermal high-energy particles under scaling in the early Universe.II. The early stages./Yu.G. Ignatyev, R.A. Ziatdinov// Gravitation & Cosmology, - 2008. - Vol. 14. - No 4. (принято к печати).
- [106] Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. Асимптотическое приближение модели Фоккера-Планка космологической эволюции сверхтепловых ультрарелятивистских частиц при наличие скейлинга взаимодействий./Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А.// Изв. ВУЗов. Физика, - 2008. (принято к печати).
- [107] Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. Диффузионная модель эволюции сверхтепловых высокоэнергетических частиц при наличии скейлинга в расширяющейся Вселенной./Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. - Тезисы докладов международной конференции по гравитации, космологии, астрофизике и нестационарной газодинамике, посвященной 90-летию со дня рождения профессора К.П. Станюковича, РУДН-МГТУ, Москва. 2006. - с. 36.
- [108] Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. Математическая модель эволюции спектра реликтовых частиц в области сверхвысоких энергий и ис-

Литература

- следование ее средствами пакета MAPLE./Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. - Труды третьей всероссийской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи", Самара. 2006. - с. 42-45.
- [109] Зиатдинов Р.А., Игнатъев Ю.Г. Математическая модель космологической эволюции космических лучей./Зиатдинов Р.А., Игнатъев Ю.Г. - Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, Казань. 2006. - Т.34 - с. 109-110.
- [110] Зиатдинов Р.А. Исследование кинетики восстановления равновесия в ранней вселенной в пакете MAPLE./Зиатдинов Р.А. - Тезисы VIII Международной конференции "Системы компьютерной математики и их приложения"(СКМП-2007), Смоленск. 2007. - с. 41-43.
- [111] Зиатдинов Р.А. Исследование кинетики процессов с элементарными частицами в ранней вселенной в пакете MAPLE./Зиатдинов Р.А.// Международная научно-практическая конференция "ИТО-Поволжье-2007. Российский научный семинар "Методы информационных технологий, математического моделирования и компьютерной математики в фундаментальных и прикладных научных исследованиях." Материалы конференции и труды семинара / Под редакцией - Игнатъева Ю.Г. - 2007. - Казань: Изд-во "Фолиант". - С. 421-425.
- [112] Игнатъев Ю.Г., Зиатдинов Р.А. Космологическая эволюция спектра сверхтепловых частиц в условиях скейлинга./Ю.Г.Игнатъев, Р.А. Зиатдинов// Российская летняя школа-семинар "Современные теоретические проблемы гравитации и космологии" - "Gracos-2007". Труды семинара. / Под редакцией - Игнатъева Ю.Г. - 2007. - Казань: Изд-во "Фолиант". - С. 63-68.
- [113] Зиатдинов Р.А. Математическая модель космологической эволюции космических лучей: приближение малых времен эволю-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ции./Зиатдинов Р.А. - Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, Казань. 2007. - Т.36 - с. 84-85.

Приложение А

Библиотека численных процедур

А.1 Контролируемая процедура вычисления определенного интеграла

В системах компьютерной математики можно достаточно просто вычислять интегралы интегралы, в том числе, и определенные. Однако, при условиях плохой сходимости интегралов, наличия в подинтегральных выражениях различных особенностей, неприятных для численных расчетов, процесс интегрирования может существенно затянуться, привести к зависанию программы и даже к ошибкам в случае появления в подинтегральном выражении слишком больших или слишком малых чисел. В ряде случаев системы компьютерной математики отказываются проводить интегрирование, если, например, подинтегральное выражение расходится внутри или на границах промежутка интегрирования, хотя определенный интеграл по всем признакам сходится. Именно с такими типами интегралов мы и столкнулись при вычислениях кинетических параметров теории. В этих случаях необходимо комбинировать аналитические и численные методы и там, где это необходимо, заменять функции некоторыми аппроксимациями.

> `restart:`

Создадим сначала необходимую в дальнейшем контролируемую процедуру вычисления определенного интеграла по формуле трапеций:

A.2. Контролируемая процедура нахождения максимума функции распределения

```
> YuFunctions[Integral]:=proc(a,b,N,n,x,f)
> local x0,i,F: x0:=a+(b-a)/N*(i-1/2):
> F:=evalf(subs(x=x0,f),n):evalf((b-a)/N*sum(F,i=1..N),n):end:
```

где введены параметры: a - нижний предел интегрирования, b - верхний, N - количество интервалов разбиения, n - удерживаемое число значащих цифр, x - переменная интегрирования, f - подынтегральная функция этой переменной.

Рассмотрим в качестве примера интеграл:

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..1)=int(1/(1+x^2),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Приближенное значение этой величины есть:

```
> evalf(Pi/4,6);
```

0.785398

Вычислим теперь этот интеграл с помощью созданной нами процедуры:

```
> YuFunctions[Integral](0,1,100,6,x,1/(1+x^2));
```

0.785400

Мы видим, что разница между значениями интеграла появляется лишь в седьмом знаке.

A.2 Контролируемая процедура нахождения максимума функции распределения

Процесс поиска экстремумов сложных функций в системах компьютерной математики при помощи стандартных операторов `maximize` и `minimize` может также существенно затянуться или даже привести к зависанию программы. В этом случае целесообразно пользоваться простейшими численными методами нахождения экстремумов, например, методом поиска.

Приложение А. Библиотека численных процедур

Создадим процедуру для нахождения максимума функции на заданном отрезке методом поиска:

```
> Maximum:=proc(a,b,N,f)
> local A,B:
> A:=seq(a+(b-a)/N*i, i=0..N):
> B:=seq(evalf(subs(x=a+(b-a)/N*i,f)), i=0..N): max(B):
> end:
```

где введены параметры: $[a, b]$ - заданный промежуток, N - количество интервалов разбиения заданного промежутка, f - заданная функция.

Проверим работу процедуры на функции

```
> f:=(x)->x^2*exp(-x);
```

$$f := x \rightarrow x^2 e^{(-x)}$$

```
> maximize(f(x), x=1..4);
```

$$4 e^{(-2)}$$

Максимальное значение функции найденное при помощи стандартного оператора `maximize` есть:

```
> evalf(%);
```

$$0.5413411328$$

Значение найденное при помощи созданной процедуры:

```
> Maximum(1,4,100,f(x));
```

$$0.5413275541$$

Из полученных результатов видно, что значения совпадают до четвертого знака после запятой, что говорит о хорошей точности созданной процедуры.

А.3 Контролируемая процедура аппроксимации функции на заданном промежутке

Во многих областях как прикладной, так и фундаментальной науки приходится иметь дело с аппроксимациями сложных зависимостей. Поэтому создадим процедуру аппроксимации функции на заданном промежутке методом наименьших квадратов.

```
> restart;
> Interpol:=proc(a,b,N,f,Zav) local
> A,B,i,func,Graph1,Graph2,Graph3:
> A:= [seq(a+(b-a)/N*i, i=0..N)]:
> B:= [seq(evalf(subs(x=a+(b-a)/N*i,f)), i=0..N)]:
> func:=Statistics[NonlinearFit](Zav, A, B, y):
> Graph1:=plot(f(x),x=a..b,color=black,thickness=2,style=point):
> Graph2:=plot(func,y=a..b,color=black,thickness=2):
> Graph3:=plots[pointplot]({seq([evalf(a+(b-a)/N*i),
> evalf(subs(x=a+(b-a)/N*i,f))],i=0..N)},thickness=3,color=black);
> print(func):
> print(plots[display](Graph3,Graph2)):
> end:
```

где введены параметры: $[a, b]$ - заданный промежуток, N - количество точек, f - заданная функция, Zav -вид искомой зависимости.

Рассмотрим пример. Будем искать приемлемую аппроксимацию для следующей, отнюдь не простой, тестовой функции:

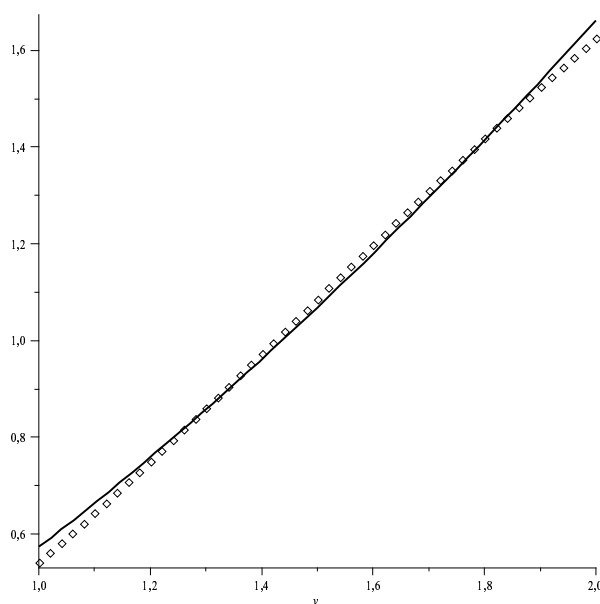
```
> f:=(x)->int(1/GAMMA(t),t=0..x);
```

$$f := x \rightarrow \int_0^x \frac{1}{\Gamma(t)} dt$$

Созданная процедура найдет необходимый вид аппроксимации и построит график.

```
> Interpol(1,2,50,f(x),c/(y^d));
```

$$0.573467525895088093 y^{1.53550513148695011}$$



А.4 Исследование решения дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка

Параметры предполагаемого начального распределения, найденные из соотношений нормировок на функцию распределения

```
> G0k3:=(zeta)->sqrt(1+zeta^2)/(sqrt(1+zeta^2)*ln(zeta+
> sqrt(1+zeta^2))-zeta);
```

$$G0k3 := \zeta \rightarrow \frac{\sqrt{\zeta^2 + 1}}{\sqrt{\zeta^2 + 1} \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1}) - \zeta}$$

```
> k:=(zeta)->(sqrt(1+zeta^2)*ln(zeta+sqrt(1+zeta^2))-
> zeta)/(zeta^2+2-2*sqrt(1+zeta^2));
```

$$k := \zeta \rightarrow \frac{\sqrt{\zeta^2 + 1} \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1}) - \zeta}{\zeta^2 + 2 - 2\sqrt{\zeta^2 + 1}}$$

Полученное решение уравнения теплопроводности в сферической системе координат в случае сферической симметрии с учетом начального распределения

```
> G:=(u,tau,zeta)->G0k3(zeta)/(2*u*sqrt(Pi*tau)*k(zeta)^3)*
> int((exp(-k(zeta)^2*(z-u)^2/(4*tau))-
> exp(-k(zeta)^2*(z+u)^2/(4*tau)))/(1+z^2)^(3/2),z=0..zeta);
```

A.4. Исследование решения дифференциального уравнения типа Фоккера-Планка

$$G := (u, \tau, \zeta) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{G0k3(\zeta)}{u \sqrt{\pi} \tau k(\zeta)^3} \int_0^\zeta \frac{e^{(-1/4 \frac{k(\zeta)^2(z-u)^2}{\tau})} - e^{(-1/4 \frac{k(\zeta)^2(z+u)^2}{\tau})}}{(1+z^2)^{(3/2)}} dz \right)$$

> G(u,tau,zeta);

> U:=u=t^(10);

$$U := u = t^{10}$$

Плотность числа частиц и энергии

> E:=(t,tau,zeta)->subs(U,u^3*G(u,tau,zeta));

> V:=(t,tau,zeta)->subs(U,u^2*G(u,tau,zeta));

$$E := (t, \tau, \zeta) \rightarrow \text{subs}(U, u^3 G(u, \tau, \zeta))$$

$$V := (t, \tau, \zeta) \rightarrow \text{subs}(U, u^2 G(u, \tau, \zeta))$$

Эволюция распределения плотности числа частиц и энергии частиц

при различных временах

> plot([V(t,0.1,1),V(t,1,1),V(t,10,1),V(t,100,1),

> V(t,1000,1)],t=0..2,color=black);

> plot([E(t,0.1,1),E(t,1,1),E(t,10,1),E(t,100,1),

> E(t,1000,1)],t=0..2,color=black);

> plot([V(t,0.1,100),V(t,1,100),V(t,10,100),

> V(t,100,100),V(t,1000,100)],t=0..3,color=black);

> plot([u^2*G(u,0.1,1),u^2*G(u,1,1),u^2*G(u,10,1),

> u^2*G(u,100,1)],u=0..20,color=[black,navy,blue,red]);

Предполагаемое начальное распределение

> G0:=(u,zeta)->G0k3(zeta)/(k(zeta)^3*

> (1+u^2)^(3/2))*Heaviside(zeta-u);

$$G0 := (u, \zeta) \rightarrow \frac{G0k3(\zeta) \text{Heaviside}(\zeta - u)}{k(\zeta)^3 (u^2 + 1)^{(3/2)}}$$

> plot(u^3*G0(u,100),u=0..120);

> plot([u^2*G0(u,10),u^2*G0(u,0.001,10),u^2*G0(u,0.005,10),

> u^2*G0(u,0.01,10),u^2*G0(u,0.1,10),u^2*G0(u,1,10)],u=0..20,

> color=black);

> plot([E(t,0.1,100),E(t,1,100),E(t,10,100),E(t,100,100),

> E(t,1000,100)],t=0..3,color=black);

```
> plot([u^2*G0(u,10),u^2*G(u,0.0001,10),u^2*G(u,0.0005,10),
> u^2*G(u,0.001,10),u^2*G(u,0.05,10), u^2*G(u,0.1,10)],
> u=0..20,color=black);
```

А.5 Исследование решения интегрального уравнения типа Фоккера-Планка при малых временах эволюции

```
> restart;
```

Равновесное распределение

```
> f_0:=(x)->27/2*exp(-3*x);
```

$$f_0 := x \mapsto \frac{27}{2} e^{-3x}$$

```
> read "YuInt.m":with(YuInt);
```

```
[Integral1, Integral2, Integral2_trap, Integral3]
```

```
> S:=(n,y)->YuInt[Integral1](0,y,100,4,x,x^n/(exp(-x)+1));
```

$$S := (n, y) \mapsto \text{YuInt}_{\text{Integral1}}(0, y, 100, 4, x, \frac{x^n}{e^{-x}+1})$$

```
> S(2,1);
```

0.2259

```
> J_1:=(y)->y*ln(2)+Pi^2/12+y*S(0,y)-S(1,y);
```

```
> J_1(1);
```

$$J_1 := y \mapsto y \ln(2) + 1/12 \pi^2 + y S(0, y) - S(1, y)$$

$$\ln(2) + 1/12 \pi^2 + 0.2907$$

```
> plot(J_1(x),x=0..5);
```

```
> J_2:=(y)->y^3*ln(2)+Pi^2/6*y+9/2*Zeta(3)+y^2*S(0,y)
```

```
> -2*y*S(1,y)+S(2,y);
```

$$J_2 := y \mapsto y^3 \ln(2) + 1/6 \pi^2 y + 9/2 \zeta(3) + y^2 S(0, y) -$$

$$-2 y S(1, y) + S(2, y)$$

A.5. Исследование решения интегрального уравнения Фоккера-Планка для малых времен

> J_2(1);

$$\ln(2) + 1/6 \pi^2 + 9/2 \zeta(3) + 0.1871$$

> plot(J_2(x), x=0..5);

> J_3:=(y)->y^3*ln(2)+y^2*Pi^2/4+y*27/2*Zeta(3)+y^3*S(0,y)

> -3*y^2*S(1,y)+3*y*S(2,y)-S(3,y);

$$J_{-3} := y \mapsto y^3 \ln(2) + 1/4 y^2 \pi^2 + \frac{27}{2} y \zeta(3) + y^3 S(0, y) - 3 y^2 S(1, y) + 3 y S(2, y) - S(3, y)$$

> J_3(1);

$$\ln(2) + 1/4 \pi^2 + \frac{27}{2} \zeta(3) + 0.1365$$

> plot(J_3(y), y=0..3);

Параметры начального распределения

> a:=(y)->J_3(y)/J_2(y);

$$a := y \mapsto \frac{J_{-3}(y)}{J_{-2}(y)}$$

> plot(a(y), y=0..20, thickness=2, color=black);

> A:=(y)->(J_3(y))^3/(J_2(y))^4;

$$A := y \mapsto \frac{(J_{-3}(y))^3}{(J_{-2}(y))^4}$$

> plot(A(y), y=0..10, thickness=2, color=black);

> S(0,0.1);

$$0.05124$$

> G_0:=(x,y)->A(y)/(exp(a(y)*x-y)+1);

$$G_{-0} := (x, y) \mapsto \frac{A(y)}{e^{a(y)x-y} + 1}$$

> evalf(G_0(1,100));

$$0.01485337595$$

> plot([G_0(x,6), G_0(x,20), G_0(x,60)], x=0..5, numpoints=2000,

> thickness=2, color=black);

> b_0:=(y)->J_1(y)*J_3(y)/J_2(y)^2;

$$b_{-0} := y \mapsto \frac{J_{-1}(y) J_{-3}(y)}{(J_{-2}(y))^2}$$

Приложение А. Библиотека численных процедур

```
> plot(b_0(y), y=0..10);
```

Первое приближение

```
> G_10:=(x,y)->(2*A(y)/x*((2*b_0(y)-a(y))*exp(a(y)*x-y)+
> 2*b_0(y))/(exp(a(y)*x-y)+1)^2+2*A(y)*a(y)^2*exp(2*(a(y)*x-y))/
> (exp(a(y)*x-y)+1)^3-A(y)*exp(a(y)*x-y)*a(y)*(a(y)\+2*b_0(y))/
> (exp(a(y)*x-y)+1)^2);
```

```
> b_1:=(y)->A(y)*(2*b_0(y)*ln(1+exp(y))/a(y)-exp(y)/(1+exp(y)));
```

$$b_1 := y \mapsto A(y) \left(2 \frac{b_0(y) \ln(1+e^y)}{a(y)} - \frac{e^y}{1+e^y} \right)$$

```
> plot(b_1(y), y=0..10, labels=[y, 'b1'], color=black);
```

Второе приближение

```
> G_20:=(x,y)->subs(u=x, 1/u^2*difff(u^2*(difff(G_10(u,y), u)
> +2*(G_10(u,y)*b_0(y)+G_0(u,y)*b_1(y))), u));
> evalf(G_20(1,1));
```

-0.8551376874

Решение в виде ряда Тейлора в первом и втором приближениях

```
> Gx2:=(x,y,tau)->x^2*(G_0(x,y)+tau*G_10(x,y)
> +1/2*tau^2*G_20(x,y));
```

$$Gx2 := (x, y, \tau) \mapsto x^2 (G_0(x, y) + \tau G_10(x, y) + 1/2 \tau^2 G_20(x, y))$$

```
> evalf(Gx2(1,3,0.1));
```

0.3391392287

```
> Gx12:=(x,y,tau)->x^2*(G_0(x,y)+tau*G_10(x,y));
```

$$Gx12 := (x, y, \tau) \mapsto x^2 (G_0(x, y) + \tau G_10(x, y))$$

Эволюция распределения плотности числа частиц и энергии частиц при различных значениях свободного параметра y в первом приближении:

```
> plot([x^2*G_0(x,1), Gx12(x,1,0.01), Gx12(x,1,0.05),
> Gx12(x,1,0.1), Gx12(x,1,0.2)], x=0..3, color=black,
> thickness=2, style=[line, line, line, line, point]):
> plot([x^2*G_0(x,3), Gx12(x,3,0.01), Gx12(x,3,0.05),
> Gx12(x,3,0.1), Gx12(x,3,0.2)], x=0..3, color=black,
> thickness=2, style=[line, line, line, line, point]):
```

А.5. Исследование решения интегрального уравнения Фоккера-Планка для малых времен

```
> plot([x^2*G_0(x,6),Gx12(x,6,0.01),Gx12(x,6,0.05),
> Gx12(x,6,0.1), Gx12(x,6,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^2*G_0(x,10),Gx12(x,10,0.01),Gx12(x,10,0.05),
> Gx12(x,10,0.1),Gx12(x,10,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^3*G_0(x,1),x*Gx12(x,1,0.01),x*Gx12(x,1,0.05),
> x*Gx12(x,1,0.1),x*Gx12(x,1,0.2)],x=0..4,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^3*G_0(x,3),x*Gx12(x,3,0.01),x*Gx12(x,3,0.05),
> x*Gx12(x,3,0.1),x*Gx12(x,3,0.2)],x=0..4,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^3*G_0(x,6),x*Gx12(x,6,0.01),x*Gx12(x,6,0.05),
> x*Gx12(x,6,0.1),x*Gx12(x,6,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^3*G_0(x,10),x*Gx12(x,10,0.01),x*Gx12(x,10,0.05),
> x*Gx12(x,10,0.1),x*Gx12(x,10,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
```

Эволюция распределения плотности числа частиц и энергии частиц при различных значениях свободного параметра y во втором приближении:

```
> plot([x^2*G_0(x,1),Gx2(x,1,0.01),Gx2(x,1,0.05),
> Gx2(x,1,0.1),Gx2(x,1,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^2*G_0(x,3),Gx2(x,3,0.01),Gx2(x,3,0.05),
> Gx2(x,3,0.1),Gx2(x,3,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^2*G_0(x,6),Gx2(x,6,0.01),Gx2(x,6,0.05),
> Gx2(x,6,0.1),Gx2(x,6,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
```

```

> plot([x^2*G_0(x,10),Gx2(x,10,0.01),Gx2(x,10,0.05),
> Gx2(x,10,0.1),Gx2(x,10,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point]):
> plot([x^3*G_0(x,1),x*Gx2(x,1,0.01),x*Gx2(x,1,0.05),
> x*Gx2(x,1,0.1),x*Gx2(x,1,0.2)],x=0..4,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point])
> plot([x^3*G_0(x,3),x*Gx2(x,3,0.01),x*Gx2(x,3,0.05),
> x*Gx2(x,3,0.1),x*Gx2(x,3,0.2)],x=0..4,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point])
> plot([x^3*G_0(x,6),x*Gx2(x,6,0.01),x*Gx2(x,6,0.05),
> x*Gx2(x,6,0.1),x*Gx2(x,6,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point])
> plot([x^3*G_0(x,10),x*Gx2(x,10,0.01),x*Gx2(x,10,0.05),
> x*Gx2(x,10,0.1),x*Gx2(x,10,0.2)],x=0..3,color=black,
> thickness=2,style=[line,line,line,line,point])

```

А.6 Исследование асимптотического решения интегрального уравнения типа Фоккера-Планка

```

> restart;
> with(plots):
> read "YuInt.m":with(YuInt);

```

$[Integral1, Integral2, Integral2_trap, Integral3]$

Функция нулевого приближения

```

> G0:=(tau,x)->1/(2*x*sqrt(Pi*tau))*int(81/64*y*(exp(-1/4*
> (x-y)^2/tau)-exp(-1/4*(x+y)^2/tau)),y =0 .. 4/3);

```

$$G0 := (\tau, x) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x \sqrt{\pi \tau}} \int_0^{4/3} \frac{81}{64} y \left(e^{(-1/4 \frac{(x-y)^2}{\tau})} - e^{(-1/4 \frac{(x+y)^2}{\tau})} \right) dy \right)$$

```

> G0(t,x);

```


$$\frac{81\sqrt{t}}{64x\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{9x^2 + 24x + 16}{36t}\right) + \frac{81}{128} \operatorname{erf}\left(\frac{3x + 4}{6\sqrt{t}}\right) -$$

$$-\frac{81\sqrt{t}}{64x\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{9x^2 - 24x + 16}{36t}\right) - \frac{81}{128} \operatorname{erf}\left(\frac{3x - 4}{6\sqrt{t}}\right)$$

> assume(tau>0,t>0);

> b0:=(tau)->int(x*G0(tau,x),x=0..infinity);

$$b0 := \tau \rightarrow \int_0^{\infty} x G0(\tau, x) dx$$

> b0(t);

$$\frac{9}{64} \frac{(9t^{(3/2)} e^{(\frac{4}{9t})} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\frac{2}{3\sqrt{t}}) - 12t - 8\sqrt{t} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\frac{2}{3\sqrt{t}}) e^{(\frac{4}{9t})}) e^{(-\frac{4}{9t})}}{\sqrt{t} \sqrt{\pi}}$$

Представим поправку к функции нулевого приближения в виде суммы восьми интегралов. Интегралы $J1$ и $J2$ плохо сходятся при $t \rightarrow 0$, поэтому в окрестности $t = 0.001$ разложим их в ряд Тейлора, а на отрезке $[0.001, 20]$ применим созданную процедуру численного интегрирования.

> J1:=proc(tau,x)

> int(convert(taylor(1/2*(81/64)^2*1/t*erf(2/(3*sqrt(t)))*

> (8/9-t)*erf((x+4/3)/(2*sqrt(t))), t=0.001, 5

>),polynom),t=0..0.001)+Integral1(0.001,tau,100,5,t,1/2*

> (81/64)^2*1/t*erf(2/(3*sqrt(t)))*

> (8/9-t)*erf((x+4/3)/(2*sqrt(t))));

> end proc;

> J1(1,1);

5.131436206

> J2:=proc(tau,x)

> int(convert(taylor(-1/2*(81/64)^2*1/t*erf(2/(3*sqrt(t)))*

> (8/9-t)*erf((x-4/3)/(2*sqrt(t))),t=0.001, 5),polynom),

> t=0..0.001)+Integral1(0.001,tau,100,5,t,-1/2*(81/64)^2*1/t*

> erf(2/(3*sqrt(t))

> *(8/9-t)*erf((x-4/3)/(2*sqrt(t))));

> end proc;

Приложение А. Библиотека численных процедур

```
> J2(1,1);
```

4.302436206

Для остальных интегралов также применим созданную процедуру численного интегрирования.

```
> J3:=proc(tau,x)
```

```
> Integral1(0,tau,50,5,t,-(81/64)^2*1/t*erf(2/(3*sqrt(t)))*  
> (8/9-t)*sqrt(t)/(sqrt(Pi)*x)*exp(-1/4*(x-4/3)^2/t));
```

```
> end proc:
```

```
> J3(1,1);
```

-0.57184

```
> J4:=proc(tau,x)
```

```
> Integral1(0,tau,50,5,t,(81/64)^2*1/t*erf(2/(3*sqrt(t)))*  
> (8/9-t)*sqrt(t)/(sqrt(Pi)*x)*exp(-1/4*(x+4/3)^2/t));
```

```
> end proc:
```

```
> J4(1,1);
```

0.010944

```
> J5:=proc(tau,x)
```

```
> Integral1(0,tau,50,5,t,1/2*(81/64)^2*1/t*sqrt(t)/sqrt(Pi)*  
> 4/3*exp(-4/(9*t))*erf((x+4/3)/(2*sqrt(t))));
```

```
> end proc:
```

```
> J5(1,1);
```

0.26858

```
> J6:=proc(tau,x)
```

```
> Integral1(0,tau,50,5,t,-1/2*(81/64)^2*1/t*sqrt(t)/sqrt(Pi)*  
> 4/3*exp(-4/(9*t))*erf((x-4/3)/(2*sqrt(t))));
```

```
> end proc:
```

```
> J6(1,1);
```

0.070280

```
> J7:=proc(tau,x)
```

```
> Integral1(0,tau,50,5,t,-(81/64)^2*1/t*sqrt(t)/sqrt(Pi)*  
> 4/3*exp(-4/(9*t))*sqrt(t)/(sqrt(Pi)*x)*exp(-1/4*(x-4/3)^2/t));
```

А.6. Исследование асимптотического решения интегрального уравнения типа Фоккера-Планка

```

> end proc:
> J7(1,1);
                                -0.23294
> J8:=proc(tau,x)
> Integral1(0,tau,50,5,t,(81/64)^2*1/t*sqrt(t)/sqrt(Pi)*
> 4/3*exp(-4/(9*t))*sqrt(t)/(sqrt(Pi)*x)*exp(-1/4*(x+4/3)^2/t));
> end proc:
> J8(1,1);
                                0.032940
> G1:=proc(tau,x)
> 1/x*(J1(tau,x)+J2(tau,x)+J3(tau,x)+J4(tau,x)+
> J5(tau,x)+J6(tau,x)+J7(tau,x)+J8(tau,x))
> end proc:
> G1(10,1);
                                6.218192412

```

Функция распределения частиц с учетом первой поправки

```

> G:=(tau,x)->G0(tau,x)+G1(tau,x):
> N1:=(tau,x)->x^2*G1(tau,x);
                                N1 := (tau, x) -> x^2 G1(tau, x)
> E1:=(tau,x)->x^3*G1(tau,x);
                                E1 := (tau, x) -> x^3 G1(tau, x)
> plot([N1(0.1,x),N1(1,x),N1(5,x),N1(10,x)],x=0..3,color=black);
> plot([E1(0.1,x),E1(1,x),E1(5,x),E1(10,x)],x=0..4,color=black);

```

Эволюция плотности числа частиц и энергии в первом приближении

```

> N:=(tau,x)->x^2*G(tau,x);
                                N := (tau, x) -> x^2 G(tau, x)
> E:=(tau,x)->x^3*G(tau,x);
                                E := (tau, x) -> x^3 G(tau, x)

```

Приложение А. Библиотека численных процедур

```
> plot([N(0.1,x),N(1,x),N(5,x),N(10,x)],x=0..6,color=black);  
> plot([E(0.1,x),E(1,x),E(5,x),E(10,x)],x=0..15,color=black);
```

Анимация эволюции плотности числа частиц и энергии в первом приближении

```
> animate( plot, [N(tau,x),x=0..10], tau=0.1..10);  
> animate( plot, [E(tau,x),x=0..15], tau=0.1..20);
```