

## ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

В.В. Сидоренков

*МГТУ им. Н.Э. Баумана*

*Логической цепочкой аналитических рассуждений, аргументированно показано, что реальное электромагнитное поле, совокупно состоящее из четырех векторных компонент: электрической и магнитной напряженностей, электрического и магнитного векторных потенциалов даже в случае статических полей переносит потоки электрической и магнитной энергии, а также потоки электромагнитных импульса и его момента.*

Изучение взаимодействия электромагнитного (ЭМ) поля с материальной средой является центральной проблемой классической электродинамики, где часто в теории стремятся описать энергетику явлений электрической и магнитной поляризации, феномена электропроводности. Для решения этой задачи воспользуемся базовыми соотношениями в этой области знания - фундаментом полевой концепции природы электричества – *законом Кулона для силы взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов и законом сохранения электрического заряда* [1]. На этой основе цепочкой последовательных физико-математических рассуждений составим системы дифференциальных уравнений стационарных явлений электромагнетизма.

Рассмотрим вначале систему уравнений *электростатики*, позволяющую описать стационарную *электрическую поляризацию* материальной среды:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \text{(b) } \operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho, \\ \text{(c) } \operatorname{rot} \mathbf{A}^e &= \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}, & \text{(d) } \operatorname{div}(\mu\mu_0 \mathbf{A}^e) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varepsilon\varepsilon_0$  и  $\mu\mu_0$  - абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Здесь в первом уравнении (1a) аналитически сформулировано прямое следствие формулы закона Кулона – условие потенциальности статического поля электрической напряженности  $\mathbf{E}$ . Следующее уравнение (1b) содержит математическое свойство структуры поля взаимодействия зарядов в законе Кулона  $\sim 1/r^2$  [1], когда поток такого поля через произвольную замкнутую поверхность равен константе (так называемая теорема Гаусса). Физически уравнение описывает результат явления электрической поляризации в виде отклика материальной среды на наличие в данной точке стороннего электрического заряда ( $\rho$  – объемная плотность стороннего заряда) либо на воздействие на электронейтральную среду ( $\rho=0$ ) внешнего электрического поля. Так как дивергенция ротора любого векторного поля тождественно равна нулю, то из уравнения (1b) для областей среды с локальной электронейтральностью ( $\rho=0$ ) напрямую следует третье уравнение (1c), показывающее, что электрическая поляризация материальной среды принципиально сопровождается вихревым полем *электрического векторного потенциала*  $A^e$ . Последнее уравнение (1d) – это условие кулоновской калибровки, обеспечивающее чисто вихревой характер поля вектора  $A^e$ .

Как видим, уравнения данной системы рассматривают области пространства, где присутствует только некое статическое поле, которое физически логично назвать «*электрическое поле*», структурно реализуемое, согласно уравнению (1c), посредством двух векторных взаимно ортогональных полевых компонент: электрической напряженности  $\mathbf{E}$  и векторного электрического потенциала  $A^e$ . Формально право на существование именно такой структуры обсуждаемого здесь электрического поля иллюстрируется логикой проведенных рассуждений и видом полученных уравнений, однако однозначным аргументом объективности представленных результатов служит следующее из этих уравнений *соотношение энергетического баланса для потока электрической энергии*:

$$-\operatorname{div} [\mathbf{E}, A^e] = \varepsilon\varepsilon_0 (\mathbf{E}, \mathbf{E}). \quad (2)$$

Следовательно, перенос извне в данную точку пространства потока электрической энергии (левая часть соотношения (2)) действительно осуществляется двумя взаимно ортогональными векторными компонентами электрического

поля посредством потокового вектора  $[\mathbf{E}, \mathbf{A}^e]$ , что и обеспечивает энергетику процесса электрической поляризации среды (правая часть соотношения (2)).

Продолжим нашу цепочку физически последовательных рассуждений с целью получить теперь систему уравнений, способных описать явление *стационарной электрической проводимости* в материальной среде:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \text{(b) } \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}) &= 0, \\ \text{(c) } \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E}, & \text{(d) } \operatorname{div}(\mu \mu_0 \mathbf{H}) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\sigma$  - удельная электрическая проводимость среды.

Первое уравнение (3a) – это математическая формулировка потенциальности статического поля вектора  $\mathbf{E}$  в проводнике с током. Второе (3b) является аналитической записью *закона сохранения электрического заряда* для случая стационарной электропроводности  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , который, согласно закону Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , описывает характер поведения электрического поля в проводящей среде. Например, из уравнения (3b) следует, что в рамках закона Ома электропроводности однородный проводник с постоянным током локально электронейтрален ( $\rho = 0$ ). А поскольку дивергенция ротора векторного поля тождественно равна нулю, то из (3b) непосредственно получаем третье уравнение (3c), показывающее, что процесс электропроводности принципиально сопровождается вихревым магнитным полем напряженности  $\mathbf{H}$ , охватывающим линии этого тока. Четвертое уравнение (3d) физически являет собой магнитный аналог теоремы Гаусса, хотя математически это условие калибровки, обеспечивающее вихревой характер поля  $\mathbf{H}$ .

Итак, уравнения системы (3) описывают свойства другого *статического* поля, согласно (3c), представленного двумя взаимно ортогональными полевыми компонентами: электрической  $\mathbf{E}$  и магнитной  $\mathbf{H}$  напряженности. Его общепринято называть «*электромагнитное (ЭМ) поле*». Правомерность существования такой структуры поля аргументируется следующим из этих уравнений известным *соотношением баланса для потока ЭМ энергии*:

$$-\operatorname{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}). \quad (4)$$

Поток энергии в пространстве реализуется посредством обеих компонент такого поля в виде потокового вектора Пойнтинга  $[E, H]$ . Этот поток, поступающий в проводник (левая часть соотношения (4)), идет на компенсацию джоулевых потерь, обусловленных выделением тепла в проводнике с током, что описывается широко известным законом Джоуля-Ленца (правая часть (4)). Данный вопрос подробно исследован (вплоть до построения картины “силовых” линий вектора Пойнтинга у поверхности проводника с током) в учебном пособии по электродинамике Зоммерфельда [2]. Последовательное изучение процесса стационарной электропроводности в металлах с учетом ЭМ векторных потенциалов электрического тока представлено работе [3]. Кстати, совокупное наличие в проводнике и вне его взаимосвязанных  $E$  и  $H$  полей вызывает отклик материальной среды в виде *поля объемной плотности электромагнитного импульса*:  $g(r) = [D, B]$ .

Необходимо отметить, что, несмотря на наличие в проводнике с током ЭМ поля с компонентами электрической  $E$  и магнитной  $H$  напряженности, вследствие чего проводник обладает электрической и магнитной энергиями, из уравнений системы (3) никак не следуют для этих энергий соотношения баланса, аналогичные соотношению (2). Структурно уравнения ЭМ поля (3) не способны в принципе описать потоки электрической или магнитной энергий ввиду отсутствия в них вторых компонент соответствующих полей. Так, например, для компоненты  $E$  нужна, как показано выше, еще и компонента  $A^e$ , а это уже электрическое поле, представленное системой уравнений (1). Как видим, структура поля из двух векторных взаимно ортогональных компонент – это объективный способ существования электродинамического поля в Природе, принципиальная и единственная возможность его распространения в виде потока соответствующей физической величины.

Вернемся к нашим рассуждениям с целью вывода теперь уже уравнений, описывающих стационарную *магнитную поляризацию (намагничивание)* материальной среды:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E}, & \text{(b) } \operatorname{div}(\mu \mu_0 \mathbf{H}) &= 0, \\
 \text{(c) } \operatorname{rot} \mathbf{A}^m &= \mu \mu_0 \mathbf{H}, & \text{(d) } \operatorname{div}(\varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{A}^m) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь уравнение (5a) показывает, что в рамках представлений классической электродинамики все магнитные явления имеют токовую природу, то есть в статике вихревое поле  $\mathbf{H}$  порождается процессом электропроводности  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Второе уравнение (5b) – это магнитный аналог теоремы Гаусса, описывающей эффект магнитной поляризации среды. Следующее уравнение (5c) является следствием (5b) и показывает, что магнитная поляризация среды сопровождается вихревым полем векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}^m$ . Чисто вихревой характер поля вектора  $\mathbf{A}^m$  обеспечивается условием калибровки (5d).

Реальность поля, которое назовем «магнитное поле», а описывающую его систему (5) – уравнениями магнитостатики, однозначно подтверждается соотношением баланса для потока магнитной энергии, обуславливающей намагничивание среды:

$$-\operatorname{div}[\mathbf{H}, \mathbf{A}^m] = \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{A}^m) + \mu\mu_0(\mathbf{H}, \mathbf{H}). \quad (6)$$

Полученные выше системы уравнений электростатического (1) и магнитостатического (5) полей позволяют также, по существу уже формально, из (1c), (1d) и (5c), (5d) составить еще одну систему полевых уравнений, рассматривающих поведение статических вихревых компонент поля ЭМ векторного потенциала, порождаемых эффектами электрической и магнитной поляризации материальной среды:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \operatorname{rot} \mathbf{A}^e &= \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}, & \text{(b) } \operatorname{div}(\mu\mu_0 \mathbf{A}^e) &= 0, \\ \text{(c) } \operatorname{rot} \mathbf{A}^m &= \mu\mu_0 \mathbf{H}, & \text{(d) } \operatorname{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{A}^m) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Объективность существования именно таких уравнений указанного поля иллюстрируется следующим из уравнений (7) соотношением баланса:

$$-\operatorname{div}[\mathbf{A}^e, \mathbf{A}^m] = \varepsilon\varepsilon_0(\mathbf{E}, \mathbf{A}^m) + \mu\mu_0(\mathbf{H}, \mathbf{A}^e), \quad (8)$$

описывающим, как видно по размерности потокового вектора  $[\mathbf{A}^e, \mathbf{A}^m]$ , передачу данной точке материальной среды момента ЭМ импульса. Экспериментальным воплощением такого явления служит эффект Эйнштейна-де Гааза [1], выраженном во вращении магнетика, помещенного в однородное магнитное поле соленоида, где ось вращения коллинеарна вектору поля подмагничивания.

Обобщая, приходим к выводу, что реальная структура ЭМ поля - это векторное поле из четырех функционально связанных компонент  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $A^e$  и  $A^m$ , своим посредством реализующих поле векторного потенциала с электрической  $A^e$  и магнитной  $A^m$  компонентами, ЭМ поле с электрической  $\mathbf{E}$  и магнитной  $\mathbf{H}$  напряженностями, электрическое поле с  $\mathbf{E}$  и  $A^e$  компонентами, и, наконец, магнитное поле с  $\mathbf{H}$  и  $A^m$  компонентами. Такое поле логично называть **реальным электромагнитным полем**, поскольку его концепция применима к описанию всех известных в настоящее время ЭМ явлений. Наиболее ярко и физически перспективно такой подход проявляет себя в электродинамических явлениях, обусловленных действием переменного во времени указанного поля, системы уравнений которого представлены в работах [4].

Резюме. Логической цепочкой аналитических рассуждений, аргументированно показано, что **реальное электромагнитное поле**, совокупно состоящее из четырех указанных выше векторных компонент даже в случае статических полей переносит потоки электрической (2) и магнитной (6) энергии, а также поток электромагнитных импульса (4) и его момента (8). Представленные здесь результаты несомненно являются прогрессом в развитии физического знания о природе электричества, и могут, в частности, служить концептуальной основой модернизации тематики разного рода учебных занятий и создания новых пособий по курсам общей физики и классической электродинамики.

#### Литература

1. *Матвеев А.Н.* Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980.
2. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИЛ, 1958.
3. *Сидоренков В.В.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. № 2. С. 28-37;
4. *Сидоренков В.В.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 1. С. 28-37; // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 11. С. 75-82; // Материалы IX Международной конференции «Физика в системе современного образования». Санкт-Петербург: РГПУ, 2007. Т.1. Секция «Профессиональное физическое образование». С. 127-129.